Don

கணக்கு

புதிய பாடத்திட்டத்தின்படி

புதிய 2020 பதிப்பு

10

இணைப்பு QBOOK

- நினைவுக் குறிப்புகள் & முக்கிய சூத்திரங்கள்
- தீர்க்கப்பட்ட பாடநூல் வினாக்கள்
- எதிர்பார்க்கப்படும் வினாக்கள் தீர்வுகளுடன்
- அனைத்து வினாக்களுக்கும் முழுமையான தீர்வுகள்
- அரசு மாதிரி வினாத்தாள் 2020



Don Publications (P) Ltd.

Don

10-ஆம் வகுப்பு

கணக்கு

புதிய பாடத்திட்டத்தின்படி

© Don Publications (P) Ltd.

WARNING: All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means without the prior written permission of the Publisher, the copy-right holder.

பதிப்புரை

இந்த 10 ஆம் வகுப்பிற்கான கணிதம் கையேடு தமிழக அரசின் 2020-'21 ஆண்டு புதிய பாடத் திட்டத்தின்படி சிறந்த ஆசிரியர் குழுமத்தால் தயாரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்படுகிறது.

இப்புத்தகத்தில், அனைத்து பாடங்களுக்குமான விடைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பாடத்திற்கும் முக்கிய நினைவுக் குறிப்புகள் மற்றும் முக்கியச் சூத்திரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மேலும் அனைத்துப் பாடநூல் வினாக்களுக்கும் தெளிவான விடைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எண்ணற்ற கூடுதல் வினாக்கள் [Creative questions] விடைகளுடன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

இப்புத்தகத்தை மாணவச்செல்வங்கள் பயன்படுத்தி, தேர்வில் இனிய வெற்றி பெற எங்கள் உளமார்ந்த வாழ்த்துகள்.

S.A. சுரேஷ் குமார், MCA., MBA.,
டான் பப்ளிகேஷன்ஸ் (பி) லிட்.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. **சங்கரன் பாலசுப்ரமணியன்** M.Sc., M.Phil., BGL.,
சென்னை.

திருமதி. **S.P. ரஜினி** M.Sc., B.Ed., (Maths) M.Com., M.Phil.,
விருகம்பாக்கம், சென்னை.

நூலாக்கம்

Dr. **S.A. ராஜ்குமார்,** MBBS., MS (EM)

"This book is meant for educational and learning purposes. The author(s) of this book has / have taken all reasonable care to ensure that the contents of this book do not violate any existing copyright or other intellectual property rights of any person / any publisher in any manner whatsoever. In the event the author(s) / the publishers has / have been unable to track any source and if any copyright has been inadvertently infringed, please notify the publisher in writing for corrective action."

Published by:

Don Publications (P) Ltd.

3/100/1, தூத்துக்குடி மெயின் ரோடு, உத்தமபாண்டியன்குளம் (PO), திருநெல்வேலி - 627 351.
செல் : **73730 88821, 94433 39941.** ☎ **(0462) 2520977, 2520978.**
மின்னஞ்சல் : donbooks02@gmail.com

புதிய எண் 17, பழைய எண் 21A 2 வது தளம், 11வது அவென்யூ, அசோக்நகர், சென்னை - 600 083.
செல் : **73730 88893, 77083 30666.** ☎ **(044) 48565226, 24892474.**
மின்னஞ்சல் : donbooks.chennai01@gmail.com

Visit us at : 94890 51855 | For online purchase : www.donbookart.com | www.donbooks.co.in

பொருளடக்கம்....

1	உறவுகளும் சார்புகளும்	05
2	எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்	42
3	இயற்கணிதம்	122
4	வடிவியல்	235
5	ஆயத்தொலைவு வடிவியல்	312
6	முக்கோணவியல்	371
7	அளவியல்	433
8	புள்ளியியலும் நிகழ்தகவும்	478
	அரசு மாதிரி வினாத்தாள் 2020	540

eDon

TO ORDER BOOKS

Dear Teachers and Principals

Thank you for your patronage to *Don* Book. You are instrumental in our phenomenal success.

Now you can order your required copies by sending the same in your letter head.

For order please

Mobile No. : 7373088821, 0462 - 2520977, 2520978
Whatsapp No. : 9443339941
Website : www.donbookart.com
E-mail ID : order@donbooks.co.in, enquire@donbooks.co.in

BANK DETAILS (FOR DIRECT DEPOSIT)

STATE BANK OF INDIA
A/C No. : **35655497778**
IFSC Code : SBIN0000932
(Sripuram Branch, Tirunelveli)

INDIAN BANK
A/C No. : **6204213630**
IFSC Code : IDIB000K184
(KTC Nagar Branch, Tirunelveli)

KARUR VYSYA BANK
A/C No. : **1174135000000133**
IFSC Code : KVBL0001174
(Palayamkottai Branch)

KARUR VYSYA BANK
A/C No. : **1651135000001796**
IFSC Code : KVBL0001651
(Saidapet Branch, Chennai)

SYNDICATE BANK
A/C No. : **60501010001381**
IFSC Code : SYNB0006050
(Ashok Nagar Branch, Chennai)

CITY UNION BANK
A/C No. : **230109000157474**
IFSC Code : CIUB000230
(Palayamkottai Branch, Tirunelveli)

D.D./Cheque

Should be drawn in favour of '*Don* Publication (P) Ltd' payable at Tirunelveli.

(Please send the chellan along with your order)

You can purchase our books through online by visiting the website www.donbookart.com Here you can purchase book in bulk quantites.

For students:

You can buy our books through our website **www.donbookart.com** or sending money order (by clearly writing your address)

Address for correspondence:

Don Publications (P) Ltd.

3/100/1, Uthamapandiankulam, Tuticorin Main Road, **TIRUNELVELI** - 627351.

☎ : (0462) 2520977, 2520978, Cell: 73730 88821, 94433 39941. E-Mail: donbooks02@gmail.com

New No. 17, Old No. 21-A, 2nd Floor, 11th Avenue, Ashok Nagar, **CHENNAI** - 600 083.

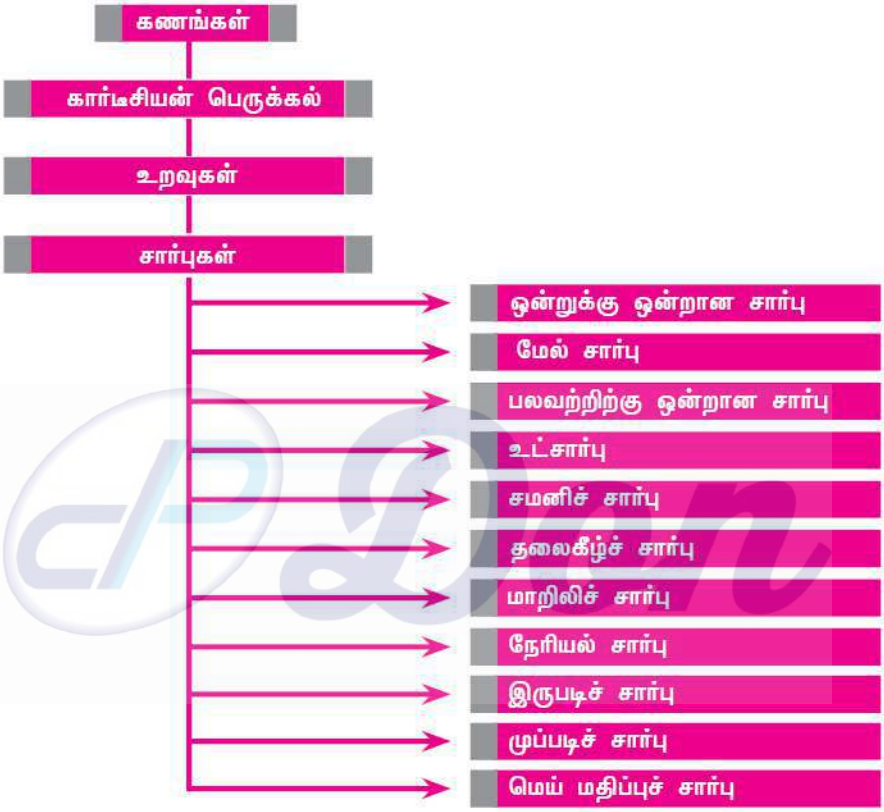
☎ : (044) 24892474, 48565226. Cell: 73730 88893, 77083 30666, E-Mail: donbooks.chennai01@gmail.com

Visit us at : 94890 51855 www.donbooks.co.in

அலகு 1

உறவுகளும் சார்புகளும்

மன வரைபடம்



கார்டீசியன் பெருக்கல்

நினைவில் கொள்க

- A மற்றும் B என்ற இரு வெற்றற்ற கணங்களின் கார்ட்டீசியன் பெருக்கல் என்பது அனைத்து (a, b), $a \in A, b \in B$ என்ற வரிசைச் சோடிகளைக் கொண்ட கணமாகும். A மற்றும் B யின் கார்டீசியன் பெருக்கல் $A \times B$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- A, B மற்றும் C ஆகிய கணங்களின் கார்ட்டீசியன் பெருக்கலை $A \times B \times C$ எனக் குறிக்கலாம். மேலும், $A \times B \times C$ என்பது அனைத்து மூன்றுகளை உள்ளடக்கிய கணமாகும். அதாவது முதல் உறுப்பு A- விலும், இரண்டாம் உறுப்பு B-யிலும் மற்றும் மூன்றாம் உறுப்பு C-யிலும் இருந்து பெறப்படுகிறது.
- A மற்றும் B ஆகியன இரு முடிவுறு கணங்கள் எனில், $A \times B$ ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, அதாவது $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.
- A அல்லது B என்பது முடிவிலி கணமாக இருந்தால் $A \times B$ என்பதும் முடிவிலி கணமாகும்.
- A, B மற்றும் C ஆகியன முடிவிலி கணங்கள் எனில், $n(A \times B \times C) = n(A) \times n(B) \times n(C)$.
- இரண்டு வரிசைச் சோடிகள் (a, b) மற்றும் (c, d) சமம் எனும் போது $a = c$ மற்றும் $b = d$.
- $A = B$ இல்லையெனில் $A \times B \neq B \times A$.

- A மற்றும் B யில் ஏதேனும் ஒன்றோ அல்லது இரண்டுமே வெற்றுக் கணமாக இருந்தால், $A \times B = \phi$.
- $A \times B$ மற்றும் $B \times A$ என்பன சமான கணங்கள்.
- A, B மற்றும் C என்பன மூன்று கணங்கள் எனில்
  - (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  - (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- A என்பது B யின் உட்சார்பு எனில் $A \subseteq B$, $(A \times B) \cap (B \times A) = A^2$

எடுத்துக்காட்டு

1.1 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ எனில்

(i) $A \times B$ மற்றும் $B \times A$ -ஐ காண்க.

(ii) $A \times B = B \times A$ ஆகுமா? இல்லையெனில் ஏன்?

(iii) $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $(A \times B) = \{1, 3, 5\} \times \{2, 3\}$
$= \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ ... (1)

$(B \times A) = \{2, 3\} \times \{1, 3, 5\}$
$= \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ ... (2)

(ii) (1) மற்றும் (2)-ன் மூலமாக $A \times B \neq B \times A$
ஏனெனில் $(1, 2) \neq (2, 1)$, $(1, 3) \neq (3, 1)$, ...

(iii) $n(A) = 3$; $n(B) = 2$
(1) மற்றும் (2)-லிருந்து நாம் காண்பது,
$n(A \times B) = n(B \times A) = 6$;
$n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$ மற்றும்
$n(B) \times n(A) = 2 \times 3 = 6$
எனவே, $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B) = 6$
ஆகவே, $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$.

1.2 $A \times B = \{(3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$ எனில் A மற்றும் B -ஐ காண்க.

தீர்வு: $A \times B = \{(3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
A = {$A \times B$ -யின் முதல் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்}.
எனவே, $A = \{3, 5\}$
B = {$A \times B$ -யின் இரண்டாம் ஆயத்தொலைவு உறுப்புகளின் கணம்}.
எனவே, $B = \{2, 4\}$
எனவே, $A = \{3, 5\}$ மற்றும் $B = \{2, 4\}$.

1.3 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \leq x < 2\}$ மற்றும் $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$ என்க.

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ என்பனவற்றைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\} = \{2, 3\}$
$B = \{x \in \mathbb{W} \mid 0 \leq x < 2\} = \{0, 1\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{1, 2\}$

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$B \cup C = \{0, 1\} \cup \{1, 2\}$
$= \{0, 1, 2\}$
$A \times (B \cup C) = \{2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$
$= \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$ ... (1)
$A \times B = \{2, 3\} \times \{0, 1\}$
$= \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$
$A \times C = \{2, 3\} \times \{1, 2\}$
$= \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\} \cup \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து,
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
$B \cap C = \{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$
$A \times (B \cap C) = \{2, 3\} \times \{1\} = \{(2, 1), (3, 1)\}$ ... (3)
$A \times B = \{2, 3\} \times \{0, 1\}$
$= \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$
$A \times C = \{2, 3\} \times \{1, 2\}$
$= \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\} \cap \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(2, 1), (3, 1)\}$ ... (4)

(3) மற்றும் (4), $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. A மற்றும் B ஆகியன ஏதேனும் இரண்டு வெற்றில்லா கணங்கள் எனில், A × B -ஐ _____ எனலாம்.
விடை: கார்டீசியன் பெருக்கல்

2. n (A × B) = 20 மற்றும் n (A) = 5 எனில், n (B) ஆனது _____.
விடை: n (B) = 4

3. A = {– 1, 1} மற்றும் B = {– 1, 1} எனில், வடிவியல் முறையில் A × B கணத்தின் புள்ளிகள் யாவை?
விடை: A × B = {(– 1, – 1), (– 1, 1), (1, –1), (1, 1)}

4. A, B என்பவை முறையே (– 4, 3) மற்றும் (– 2, 3) -க்கு இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து எண்கள் எனில், A மற்றும் B-ன் கார்டீசியன் பெருக்கலைக் குறிப்பிடுக.
விடை: A × B = {(– 4, – 2), (– 4, 3), (3, – 2), (3, 3)}

சிந்தனைக் களம்

1. எப்பொழுது A × B ஆனது B × A விற்கு சமம்?
விடை: A = B எனும்போது A × B = B × A.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றிற்கு A × B, A × A மற்றும் B × A ஐக் காண்க.
(i) A = {2, – 2, 3} மற்றும் B = {1, – 4}
(ii) A = B = {p, q}
(iii) A = {m, n}; $B = \phi$

தீர்வு:

(i) A = {2, –2, 3} மற்றும் B = {1, – 4}

$A \times B = \{2, -2, 3\} \times \{1, -4\}$
$= \{(2, 1), (2, -4), (-2, 1), (-2, -4), (3, 1), (3, -4)\}$

$A \times A = \{2, -2, 3\} \times \{2, -2, 3\}$
$= \{(2, 2), (2, -2), (2, 3), (-2, 2), (-2, -2), (-2, 3), (3, 2), (3, -2), (3, 3)\}$

$B \times A = \{1, -4\} \times \{2, -2, 3\}$
$= \{(1, 2), (1, -2), (1, 3), (-4, 2), (-4, -2), (-4, 3)\}$

(ii) A = B = {p, q}

$A \times B = \{p, q\} \times \{p, q\}$
$= \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$

$A \times A = \{p, q\} \times \{p. q\}$
$= \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$

$B \times A = \{p, q\} \times \{p, q\}$
$= \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\}$

$\therefore A \times B = A \times A = B \times A$ என்பதால்
$A = B$

(iii) A = {m, n}, $B = \phi$

A அல்லது B என்பது வெற்றுக் கணமாக இருந்தால் A × B என்பதும் வெற்றுக் கணமாகும்.
அதாவது, $A = \phi$ (அல்லது) $B = \phi$
பிறகு $A \times B = \phi$, $B \times A = \phi$
மற்றும் $A \times A = \{m, n\} \times \{m, n\}$
$= \{(m, m), (m, n), (n, m), (n, n)\}$

2. A = {1, 2, 3} மற்றும் B = {x | x என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்} எனில், A × B மற்றும் B × A ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: A = {1, 2, 3}; B = {2, 3, 5, 7}

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (7, 1), (7, 2), (7, 3)\}$

3. B × A= {(– 2, 3), (– 2, 4), (0, 3), (0, 4), (3, 3), (3, 4)} எனில், A மற்றும் B ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு: B × A -லிருந்து எல்லா வரிசைச் சோடிகளின் முதல் உறுப்புகள் B -யையும் மற்றும் இரண்டாம் உறுப்புகள் அனைத்தும் A -யையும் சேர்ந்ததாகும்.

$\therefore A = \{3, 4\}$
$B = \{-2, 0, 3\}$

4. A = {5, 6}, B = {4, 5, 6}, C = {5, 6, 7} எனில், $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : A = {5, 6}, B = {4, 5, 6}, C = {5, 6, 7}

LHS: $A \times A = \{5, 6\} \times \{5, 6\}$
$= \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

RHS:

$B \times B = \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$
$= \{(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$C \times C = \{5, 6, 7\} \times \{5, 6, 7\}$
$= \{(5, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 5), (7, 6), (7, 7)\}$

$(B \times B) \cap (C \times C) = \{(5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

$\therefore$ LHS = RHS
$A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$
நிறுவப்பட்டது.

5. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $C = \{3, 4\}$ மற்றும் $D = \{1, 3, 5\}$ எனில், $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$ என்பது உண்மையா என சோதிக்கவும்.

தீர்வு: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5\}, C = \{3, 4\}, D = \{1, 3, 5\}$

$$A \cap C = \{3\}$$
$$B \cap D = \{3, 5\}$$
$$(A \cap C) \times (B \cap D) = \{3\} \times \{3, 5\}$$
$$= \{(3, 3), (3, 5)\} \quad \ldots(1)$$
$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5)\}$$
$$C \times D = \{(3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$$
$$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(3, 3), (3, 5)\} \quad \ldots(2)$$

(1), (2) லிருந்து

$\therefore (A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$

என்பது தெளிவாகிறது.

இது உண்மை என நிறுவப்பட்டது.

6. $A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$ மற்றும் $C = \{3, 5\}$ எனில், கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்டது

$A = \{x \in \mathbb{W} \mid x < 2\} \Rightarrow A = \{0, 1\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 4\} \Rightarrow B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{3, 5\}$

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$

$A \times (B \cup C) = \{0, 1\} \times \{2, 3, 4, 5\}$
$= \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\} \quad \ldots(1)$

$A \times B = \{0, 1\} \times \{2, 3, 4\}$
$= \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

$A \times C = \{0, 1\} \times \{3, 5\}$
$= \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\} \quad \ldots(2)$

(1), (2) லிருந்து,

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$A = \{0, 1\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{3, 5\}$

$B \cap C = \{3\}$

$A \times (B \cap C) = \{0, 1\} \times \{3\}$
$= \{(0, 3), (1, 3)\} \quad \ldots(1)$

$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

$A \times C = \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(0, 3), (1, 3)\} \quad \ldots(2)$

(1), (2) லிருந்து,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே சரிபார்க்கப்பட்டது.

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$A = \{0, 1\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{3, 5\}$

$(A \cup B) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$(A \cup B) \times C = \{0, 1, 2, 3, 4\} \times \{3, 5\}$
$= \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\} \quad \ldots(1)$

$A \times C = \{0, 1\} \times \{3, 5\}$
$= \{(0, 3), (0, 5), (1, 3), (1, 5)\}$

$B \times C = \{2, 3, 4\} \times \{3, 5\}$
$= \{(2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\}$

$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4, 5)\} \quad \ldots(2)$

(1), (2) லிருந்து

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, சரிபார்க்கப்பட்டது.

7. A என்பது 8 -ஐ விடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம், B என்பது 8 -ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் மற்றும் C என்பது இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் எனில், கீழ்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்டது: 'A' என்பது 8 -க்கு குறைவான இயல் எண்களின் கணம்.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

'B' என்பது 8 க்கு குறைவான பகா எண்களின் கணம் $B = \{2, 3, 5, 7\}$

'C' என்பது இரட்டைப் படை பகா எண்ணின் கணம்

$C = \{2\}$

(i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$A \cap B = \{2, 3, 5, 7\}$

$(A \cap B) \times C = \{2, 3, 5, 7\} \times \{2\}$
$= \{(2, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\} \quad \ldots(1)$

$A \times C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{2\}$
$= \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2)\}$

$B \times C = \{2, 3, 5, 7\} \times \{2\}$
$= \{(2, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\}$
$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(2,2),(3,2),(5,2),(7,2)\}$ ...(2)
(1), (2) லிருந்து $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ என்பது தெளிவாகிறது.
எனவே, சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
$B - C = \{2, 3, 5, 7\} - \{2\} = \{3, 5, 7\}$
$A \times (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{3, 5, 7\}$
$= \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\}$ ... (1)

$A \times B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{2, 3, 5, 7\}$
$= \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (6, 2), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (7, 2), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\}$

$A \times C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \times \{2\}$
$= \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2)\}$

$(A \times B) - (A \times C) = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\}$ ... (2)

(1), (2) லிருந்து
$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ என்பது தெளிவாகிறது.
எனவே, சரிபார்க்கப்பட்டது.

உறவுகள்

நினைவில் கொள்க

- A மற்றும் B என்பன இரு கணங்கள் என்க. A யிலிருந்து B-க்கு உள்ள உறவு R என்பது $A \times B$ ன் உட்கணமாகும். அதாவது $R \subseteq A \times B$.
- A மற்றும் B என்ற இரு வெற்றில்லா கணங்கள் முறையே 'm' மற்றும் 'n' உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளன எனில் $A \times B$ என்பது 'mn' உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும். எனவே, மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கை 2^{mn}.
- கணம் A -யிலிருந்து B -க்கான உறவை கீழ்காணும் முறைகளைப் பயன்படுத்திக் குறிக்கலாம். (i) பட்டியல் முறை (ii) கண கட்டமைப்பு முறை (iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்
- கணம் A -யிலிருந்து B -க்கான உறவு R எனில், R ன் வரிசைச் சோடிகளின் முதல் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் R ன் மதிப்பகம் எனவும், இரண்டாவது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் R -ன் வீச்சகம் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.
- A என்ற வெற்றில்லா கணத்திலிருந்து A -க்கு உள்ள உறவு $A \times A$ -ன் உட்கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

1.4 **A = {3, 4, 7, 8} மற்றும் B = {1, 7, 10} எனில் கீழ் உள்ள கணங்களில் எவை A -லிருந்து B -க்கு ஆன உறவைக் குறிக்கின்றது?**

(i) $R_1 = \{(3, 7), (4, 7), (7, 10), (8, 1)\}$

(ii) $R_2 = \{(3, 1), (4, 12)\}$

(iii) $R_3 = \{(3, 7), (4, 10), (7, 7), (7, 8), (8, 11), (8, 7), (8, 10)\}$

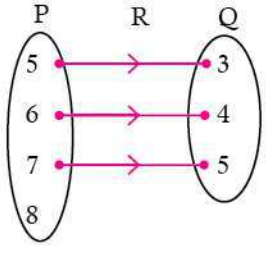
தீர்வு : $A \times B = \{(3, 1), (3, 7), (3, 10), (4, 1), (4, 7), (4, 10), (7, 1), (7, 7), (7, 10), (8, 1), (8, 7), (8, 10)\}$

(i) $R_1 \subseteq A \times B$ என்பதைக் காணலாம். எனவே, R_1 என்பது A -லிருந்து B -க்கு ஆன உறவு ஆகும்.

(ii) இங்கு $(4, 12) \in R_2$, ஆனால் $(4, 12) \notin A \times B$.
எனவே, R_2 ஆனது A -லிருந்து B -க்கு ஆன உறவு இல்லை.

(iii) இங்கு $(7, 8) \in R_3$, ஆனால் $(7, 8) \notin A \times B$.
எனவே, R_3 ஆனது A -லிருந்து B -க்கு ஆன உறவு இல்லை.

1.5 **படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள அம்புக்குறி படமானது P மற்றும் Q கணங்களுக்கான உறவைக் குறிக்கின்றது. இந்த உறவை (i) கணகட்டமைப்பு முறை, (ii) பட்டியல் முறைகளில் எழுதுக. (iii) R ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.**



தீர்வு :

(i) R யின் கணகட்டமைப்பு முறை
$= \{(x, y) \mid y = x - 2, x \in P, y \in Q\}$

(ii) R யின் பட்டியல் முறை
$= \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$

(iii) R யின் மதிப்பகம் = {5, 6, 7};
R யின் வீச்சகம் = {3, 4, 5}

முன்னேற்றச் சோதனை

1. A={1,2,3,4}, B={a,b,c}எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை A -யிலிருந்து B -க்கான உறவாகும்?

(i) {(1, b), (1, c), (3, a), (4, b)}

(ii) {(1, a), (b, 4), (c, 3)}

(iii) {(1, a), (a, 1), (2, b), (b, 2)}

விடை: A = {1, 2, 3, 4} மற்றும் B = {a, b, c}
A யிலிருந்து B க்கு உள்ள உறவு

(i) {(1, b), (1, c), (3, a), (4, b)}

2. A={1,2,3,4}, B={a,b,c}எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை B -யிலிருந்து A -க்கான உறவாகும்?

(i) {(c, a), (c, b), (c, 1)}

(ii) {(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)}

(iii) {(a, 4), (b, 3), (c, 2)}

விடை: A = {1, 2, 3, 4} மற்றும் B = {a, b, c}
B -யிலிருந்து A-க்கு உள்ள உறவு

(iii) {(a, 4), (b, 3), (c, 2)}

பயிற்சி 1.2

1. A = {1, 2, 3, 7} மற்றும் B = {3, 0, – 1, 7} எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை A –லிருந்து B –க்கான உறவுகளாகும்?

(i) $R_1 = \{(2, 1), (7, 1)\}$

(ii) $R_2 = \{(-1, 1)\}$

(iii) $R_3 = \{(2, -1), (7, 7), (1, 3)\}$

(iv) $R_4 = \{(7, -1), (0, 3), (3, 3), (0, 7)\}$

தீர்வு : A = {1, 2, 3, 7}, B = {3, 0, –1, 7}

$A \times B$ = {(1, 3), (1, 0), (1, –1), (1, 7),
(2, 3), (2, 0), (2, –1), (2, 7),
(3, 3), (3, 0), (3, –1), (3, 7),
(7, 3), (7, 0), (7, –1), (7, 7)}

(i) $R_1 = \{(2, 1), (7, 1)\}$
(2, 1) மற்றும் (7, 1) என்பன $A \times B$ -ன் உறுப்புகளாக இல்லாததால், R_1 என்பது A -யிலிருந்து B -க்கான உறவு அல்ல. மேலும், $1 \notin B$,

(ii) $R_2 = \{(-1, 1)\}$ $(-1, 1) \notin A \times B$,
$\therefore$ R_2 என்பது A -யிலிருந்து B -க்கான உறவு அல்ல.

(iii) $R_3 = \{(2, -1), (7, 7), (1, 3)\}$
$R_3 \subseteq A \times B$ என்பது தெளிவாகிறது.
$\therefore$ R_3 என்பது A -யிலிருந்து B –க்கான உறவு ஆகும்.

(iv) $R_4 = \{(7, -1), (0, 3), (3, 3), (0, 7)\}$
இதில் (0, 3) மற்றும் (0, 7) $\in R_4$
ஆனால், (0, 3) மற்றும் (0, 7) ஆகியன $A \times B$ன் உறுப்புகள் அல்ல. எனவே, R_4 என்பது A -யிலிருந்து B -க்கான உறவு அல்ல.

2. A = {1, 2, 3, 4, ... , 45} மற்றும் R என்ற உறவு "A –யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கப்பட்டால், R –ஐ A × A –யின் உட்கணமாக எழுதுக. மேலும் R –க்கான மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் காண்க.

தீர்வு : A= {1, 2, 3, 4, ..., 45}
கொடுக்கப்பட்ட உறவானது "வர்க்கம்" மற்றும் A ல் $A \to A$
$A \times A$={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)...(45, 45)}
1 ன் வர்க்கம் $1 \in A$ மற்றும் $(1, 1) \in A \times A$
2 ன் வர்க்கம் $4 \in A$ மற்றும் $(4, 2) \in A \times A$
3 ன் வர்க்கம் $9 \in A$ மற்றும் $(9, 3) \in A \times A$
4 ன் வர்க்கம் $16 \in A$ மற்றும் $(16, 4) \in A \times A$
5 ன் வர்க்கம் $25 \in A$ மற்றும் $(25, 5) \in A \times A$
6 ன் வர்க்கம் $36 \in A$ மற்றும் $(36, 6) \in A \times A$
7 ன் வர்க்கம் $49 \notin A$.
R = {(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5), (36, 6)}
R ன் மதிப்பகம் = {1, 4, 9, 16, 25, 36}
R ன் வீச்சகம் = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

3. R என்ற ஒரு உறவு {(x, y) / y = x + 3, $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$} எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் கண்டறிக.

தீர்வு :
கொடுக்கப்பட்ட கணம்
$= \{(x, y) / y = x + 3, x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$
x = 0 எனும்போது, y = 0 + 3 = 3
x = 1 எனும்போது, y = 1 + 3 = 4
x = 2 எனும்போது, y = 2 + 3 = 5
x = 3 எனும்போது, y = 3 + 3 = 6
x = 4 எனும்போது, y = 4 + 3 = 7
x = 5 எனும்போது, y = 5 + 3 = 8
$\therefore$ உறவு R = {(0, 3), (1, 4), (2, 5),
(3, 6), (4, 7), (5, 8)}
மதிப்பகம் = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
வீச்சகம் = {3, 4, 5, 6, 7, 8}

4. கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் ஒவ்வொன்றையும் (அ) அம்புக்குறி படம் (ஆ) வரைபடம் (இ) பட்டியல் முறையில் குறிக்க.

(i) $\{(x, y) \mid x = 2y,\ x \in \{2, 3, 4, 5\},\ y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

(ii) $\{(x, y) \mid y = x + 3,\ x, y$ ஆகியவை இயல் எண்கள் $< 10\}$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கண கட்டமைப்பு வடிவம்

$\{(x, y) / x = 2y,\ x \in \{2, 3, 4, 5\},\ y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

$x = 2y$

$y = 1$ எனும்போது, $x = 2\ (1) = 2 \in x$

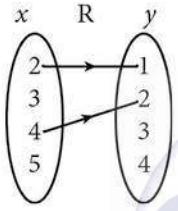
$y = 2$ எனும்போது, $x = 2\ (2) = 4 \in x$

$y = 3$ எனும்போது, $x = 2\ (3) = 6 \notin x$

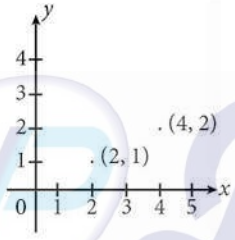
$y = 4$ எனும்போது, $x = 2\ (4) = 8 \notin x$

$\therefore$ உறவு $R = \{(2, 1), (4, 2)\}$

(அ) அம்புக்குறி படம்



(ஆ) வரைபடம்



(இ) பட்டியல் வடிவம்

$R = \{(2,1), (4,2)\}$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கணம்

$\{(x, y) / y = x + 3,\ x, y$ என்பன 10 க்கும் குறைவான இயல் எண்கள்$\}$

$x = 1$ எனும்போது, $y = 1 + 3 = 4$

$x = 2$ எனும்போது, $y = 2 + 3 = 5$

$x = 3$ எனும்போது, $y = 3 + 3 = 6$

$x = 4$ எனும்போது, $y = 4 + 3 = 7$

$x = 5$ எனும்போது, $y = 5 + 3 = 8$

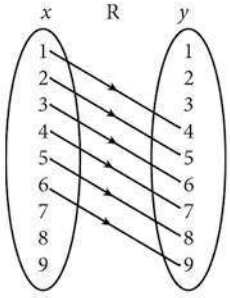
$x = 6$ எனும்போது, $y = 6 + 3 = 9$

$x = 7$ எனும்போது, $y = 7 + 3 = 10$ என்பது சாத்தியமல்ல.

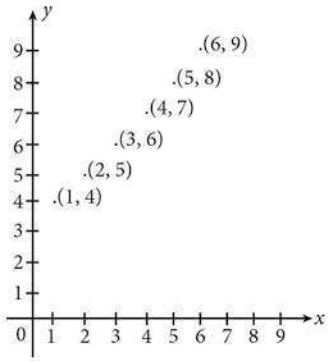
x, y ஆனது 10 -க்கு குறைவாக உள்ளதால்

$\therefore$ உறவு $R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$

(அ) அம்புக்குறி படம்



(ஆ) வரைபடம்



(இ) பட்டியல் வடிவம்

$R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$

5. ஒரு நிறுவனத்தில் உதவியாளர்கள் (A), எழுத்தர்கள் (C), மேலாளர்கள் (M) மற்றும் நிர்வாகிகள் (E) ஆகிய நான்கு பிரிவுகளில் பணியாளர்கள் உள்ளனர். A, C, M மற்றும் E பிரிவு பணியாளர்களுக்கு ஊதியங்கள் முறையே ₹ 10,000, ₹ 25,000, ₹ 50,000 மற்றும் ₹ 1,00,000 ஆகும். A_1, A_2, A_3, A_4 மற்றும் A_5 ஆகியோர் உதவியாளர்கள். C_1, C_2, C_3, C_4 ஆகியோர் எழுத்தர்கள். M_1, M_2, M_3 ஆகியோர்கள் மேலாளர்கள். மற்றும் E_1, E_2 ஆகியோர் நிர்வாகிகள் ஆவர். $x R y$ என்ற உறவில் x -என்பது y என்பவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஊதியம் எனில் R –என்ற உறவை, வரிசைச் சோடிகள் மூலமாகவும் அம்புக்குறி படம் மூலமாகவும் குறிப்பிடுக.

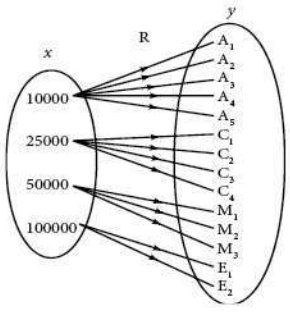
தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட உறவின் மதிப்பகம் என்பது பணியாளருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஊதியத்தைக் குறிப்பதாகும்.

உறவு $R = \{(10000, A_1), (10000, A_2), (10000, A_3), (10000, A_4), (10000, A_5), (25000, C_1), (25000, C_2), (25000, C_3), (25000\ C_4), (50000, M_1), (50000, M_2), (50000, M_3), (100000, E_1), (100000, E_2)\}$

உறவு R என்பது $x R y$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. x என்பது y என்ற பணியாளருக்கு கொடுக்கப்பட்ட ஊதியம்.

அம்புக்குறி படம்



சார்புகள்

நினைவில் கொள்க

- A மற்றும் B என்ற வெற்றில்லா கணங்களில் A க்கும் B க்குமான உறவு $A \times B$ன் உட்கணமாகும். மேலும் உறவின் உட்கணத்தை A யிலிருந்து B ன் சார்பு என்கிறோம். அதாவது,
  - (i) எல்லா $a \in A$ க்கும் $b \in B$ இருக்க வேண்டும். மேலும் $(a, b) \in f$
  - (ii) $(a, b) \in f$ மற்றும் $(a, c) \in f \Rightarrow b = c$
- A என்ற கணத்தில் கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பிற்கு, B ல் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டுமே தொடர்புடையதாக உள்ளது. இத்தகைய உறவுகளையே சார்புகள் என்கிறோம்.
- $f : A \to B$ என்ற சார்பில் A –என்பது f ன் மதிப்பகம் எனவும், B என்பது f –ன் துணை மதிப்பகம் எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. f -ன் உறுப்புகளின் நிழல் உருக்களைக் கொண்ட கணம் f–ன் வீச்சகம் எனப்படுகிறது. மேலும் இது f (A) எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

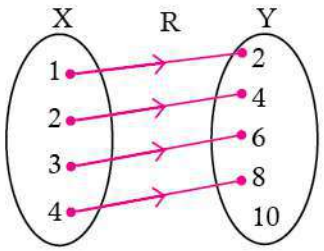
  அதாவது $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ = f –ன் வீச்சகம்

  $\therefore f(A) \subseteq B$
- கார்டீசியன் தளத்தில் அமையும் அனைத்து வளைவரைகளும் சார்பல்ல.
- குத்துக்கோட்டு சோதனை: வளைவரையை ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் அவ்வளைவரை ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

1.6 X = {1, 2, 3, 4}, Y = {2, 4, 6, 8, 10} மற்றும் $\mathbb{R}$ = {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)} எனில், $\mathbb{R}$ ஆனது ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. மேலும் அதன் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

தீர்வு : படத்தில் R குறிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு $x \in X$–க்கும், ஒரே ஒரு $y \in Y$ உறுப்பு மட்டும் கிடைக்கிறது. எனவே X –ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் Y –ல் ஒரே ஒரு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே. R ஆனது ஒரு சார்பு ஆகும்.



மதிப்பகம் X = {1, 2, 3, 4}

துணை மதிப்பகம் Y = {2, 4, 6, 8, 10}

வீச்சகம் f = {2, 4, 6, 8}.

1.7 'f' என்ற உறவானது $f(x) = x^2 - 2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, $x \in \{-2, -1, 0, 3\}$ எனக் கொண்டால் (i) f –யின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக. (ii) f –ஒரு சார்பாகுமா?

தீர்வு : $f(x) = x^2 - 2$ இங்கு, $x \in \{-2, -1, 0, 3\}$

(i)
$$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$$
$$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$
$$f(0) = (0)^2 - 2 = -2$$
$$f(3) = (3)^2 - 2 = 7$$

ஆகையினால், $f = \{(-2, 2), (-1, -1), (0, -2), (3, 7)\}$

(ii) f –யின் ஒவ்வொரு மதிப்பக உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உரு உள்ளதைக் காணலாம். எனவே, f –ஆனது ஒரு சார்பாகும்.

1.8 X = {– 5, 1, 3, 4} மற்றும் Y = {a, b, c} எனில், X –லிருந்து Y –க்கு பின்வரும் உறவுகளில் எவை சார்பாகும்?

(i) $R_1 = \{(-5, a), (1, a), (3, b)\}$

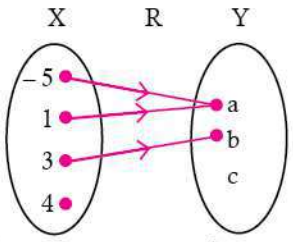
(ii) $R_2 = \{(-5, b), (1, b), (3, a), (4, c)\}$

(iii) $R_3 = \{(-5, a), (1, a), (3, b), (4, c), (1, b)\}$

தீர்வு :

(i) $R_1 = \{(-5, a), (1, a), (3, b)\}$

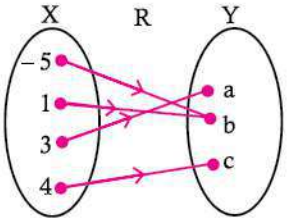
R_1 -க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம்.



R_1 சார்பாகாது. காரணம் $4 \in X$ –க்கு Y –ல் நிழல் உரு இல்லை.

(ii) $R_2 = \{(-5, b), (1, b), (3, a), (4, c)\}$

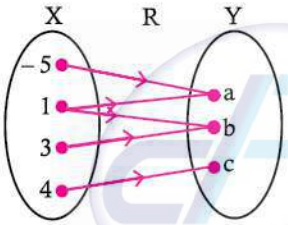
R_2 -க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம்.



R_2 ஒரு சார்பாகும். காரணம் X –யின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் ஒரே ஒரு நிழல் உரு Y –ல் உள்ளது .

(iii) $R_3 = \{(-5, a), (1, a), (3, b), (4, c), (1, b)\}$

R_3 க்கான உறவை அம்புக்குறி படத்தில் குறிக்கலாம்.



R_3 ஒரு சார்பாகாது. காரணம் $1 \in X$ –க்கு இரண்டு நிழல் உருக்கள் $a \in Y$ மற்றும் $b \in Y$ என உள்ளன.

இவற்றின் மூலம், ஓர் உறுப்பிற்கு, ஒரே ஒரு நிழல் உரு இருந்தால் மட்டுமே அந்த உறவு சார்பாகும் என அறியலாம்.

1.9 $f(x) = 2x - x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், (i) $f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x) + f(1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) x –க்கு, 1 –ஐ பிரதியிட்டால்,

$$f(1) = 2(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

(ii) x –க்கு $x + 1$ –ஐ பிரதியிட்டால்,

$$f(x+1) = 2(x+1) - (x+1)^2$$
$$= 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1)$$
$$= -x^2 + 1$$

(iii) $f(x) + f(1) = (2x - x^2) + 1 = -x^2 + 2x + 1$

[$f(x) + f(1) \neq f(x+1)$ என்பதைக் காணலாம். பொதுவாக, $f(a+b)$ ஆனது $f(a) + f(b)$ –க்கு சமமாக இருப்பதில்லை]

முன்னேற்றச் சோதனை

1. உறவுகள் _____ ன் உட்கணமாகும். சார்புகள் _____ ன் உட்கணமாகும்.

விடை: கார்டீசியன் பெருக்கல், உறவுகள்

2. சரியா அல்லது தவறா: ஓர் உறவின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.

விடை: தவறு

3. சரியா அல்லது தவறா: ஒரு சார்பின் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நிழல் உரு இருக்கும்.

விடை: சரி

4. சரியா அல்லது தவறா: $R : A \to B$ ஆனது ஒரு உறவு எனில், R –ன் மதிப்பகம் A ஆகும்.

விடை: சரி

5. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x) = x^2$ –ல் 1 மற்றும் 2 முன் உரு(க்கள்) _____ மற்றும் _____.

விடை: 1 மற்றும் ஏதுமில்லை

6. உறவிற்கும் சார்பிற்கும் இடையேயான வேறுபாடு என்ன?

விடை: எல்லா சார்புகளும் உறவுகளாகும். ஆனால் எல்லா உறவுகளும் சார்புகளாகாது.

7. A மற்றும் B ஆகியவை இரண்டு வெற்றில்லா முடிவுற்ற கணங்கள் என்க.

(i) A மற்றும் B –க்கு இடையேயான உறவுகளின் எண்ணிக்கை

(ii) A மற்றும் B –க்கு இடையேயான சார்புகளின் எண்ணிக்கை.

விடை:

(i) A மற்றும் B –க்கு இடைப்பட்ட உறவுகளின் எண்ணிக்கை மிகப்பெரியது.

(ii) உறவுகளின் எண்ணிக்கை என்பது சார்புகளின் எண்ணிக்கையை விடப் பெரியதாக இருக்கும்.

சிந்தனைக் களம்

1. கோள்களுக்கும் அதன் துணைக்கோள்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு சார்பாகுமா?

விடை: ஆம்

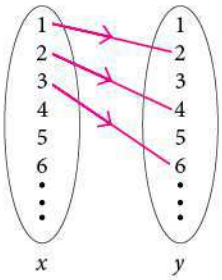
பயிற்சி 1.3

1. $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $y = 2x\}$ ஆனது $\mathbb{N}$ -ன் மீதான ஓர் உறவு என்க. மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. இந்த உறவு சார்பாகுமா?

தீர்வு :

$f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $y = 2x\}$

கொடுக்கப்பட்டது $y = 2x$



'x' என்பது இயல்எண். மதிப்பகம் என்பது முதல் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். எனவே மதிப்பகம்-இயல் எண்களின் கணம் = N மற்றும் y என்பது எப்போதும் இரட்டை எண் $y = 2x$

வீச்சகம் = இரட்டை இயல் எண்களின் கணம்

துணை மதிப்பகம் = இயல் எண்களின் கணம் = N

இங்கு முதல் உறுப்புகள் அனைத்தும் ஒவ்வொரு நிழல் உருக்களைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட உறவு ஒரு சார்பாகும்.

2. $X = \{3, 4, 6, 8\}$ என்க. $R = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$ என்ற உறவானது X -லிருந்து $\mathbb{N}$ -க்கு ஒரு சார்பாகுமா?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $X = \{3, 4, 6, 8\}$

உறவு $R = \{(x, f(x)) / x \in X, f(x) = x^2 + 1\}$

$x = 3$ எனும்போது, $f(3) = (3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \in N$

$x = 4$ எனும்போது, $f(4) = (4)^2 + 1 = 16 + 1 = 17 \in N$

$x = 6$ எனும்போது, $f(6) = (6)^2 + 1 = 36 + 1 = 37 \in N$

$x = 8$ எனும்போது, $f(8) = (8)^2 + 1 = 64 + 1 = 65 \in N$

$R = \{(3, 10), (4, 17), (6, 37), (8, 65)\}$

X -ன் எல்லா உறுப்புகளும் இயல் எண்களை நிழல் உருக்களாகக் கொண்டிருப்பதால், X -லிருந்து N -க்கான உறவு ஒரு சார்பாகும்.

3. கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f : x \to x^2 - 5x + 6$ எனில்,

(i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$

(iii) $f(2)$ (iv) $f(x - 1)$

ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

தீர்வு : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(i) $f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$

(ii) $f(2a) = (2a)^2 - 5(2a) + 6 = 4a^2 - 10a + 6$

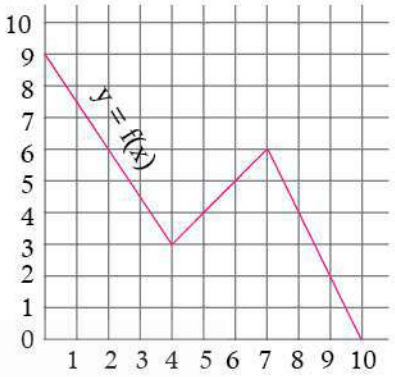
(iii) $f(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

(iv) $f(x - 1) = (x - 1)^2 - 5(x - 1) + 6$

$= x^2 - 2x + 1 - 5x + 5 + 6$

$= x^2 - 7x + 12$

4. படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் f(x) -யின் மூலமாக, $f(9) = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.



(i) பின்வரும் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(அ) $f(0)$ (ஆ) $f(7)$

(இ) $f(2)$ (ஈ) $f(10)$

(ii) x -ன் எம்மதிப்பிற்கு $f(x) = 1$ ஆக இருக்கும்?

(iii) f(x) -ன் (1) மதிப்பகம் (2) வீச்சகம் காண்க.

(iv) f என்ற சார்பில் 6 -ன் நிழல் உரு என்ன?

தீர்வு :

(i) (அ) $f(0) = 9$

(ஆ) $f(7) = 6$

(இ) $f(2) = 6$

(ஈ) $f(10) = 0$

(ii) வரைபடத்திலிருந்து $x = 9.5$ எனும்போது $f(9.5) = 1$ என்பது தெரிகிறது.

(iii) (1) மதிப்பகம் $= \{x / 0 \le x \le 10, x \in R\}$

(2) வீச்சகம் $= \{x / 0 \le x \le 9, x \in R\}$

(iv) f ல் '6' ன் நிழல் உரு '5'.

5. $f(x) = 2x + 5$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $\frac{f(x+2) - f(2)}{x}$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = 2x + 5, \quad x \neq 0$

$$\frac{f(x+2) - f(2)}{x} = \frac{[2(x+2) + 5 - [2(2) + 5]}{x}$$

$$= \frac{2x+4+5-9}{x}$$

$$= \frac{2x+9-9}{x}$$

$$= \frac{2x}{x} = 2$$

6. ஒரு சார்பு f ஆனது f (x) = 2x – 3 என வரையறுக்கப் பட்டால்

(i) $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ **-ஐக் காண்க.**

(ii) f (x) = 0 எனும்பொழுது, x -ஐக் காண்க.

(iii) f (x) = x எனில் x -ஐக் காண்க.

(iv) f (x) = f (1 – x) எனில் x -ஐக் காண்க.

தீர்வு : f (x) = 2x – 3

(i) $\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{[2(0)-3]+[2(1)-3]}{2}$

$$= \frac{0-3+2-3}{2}$$

$$= \frac{2-6}{2}$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

(ii) கொடுக்கப்பட்டது:

$$f(x) = 0$$

$$\therefore 2x - 3 = 0$$

$$2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$$

(iii) கொடுக்கப்பட்டது:

$$f(x) = x$$

$$2x - 3 = x$$

$$2x - x = 3 \Rightarrow x = 3$$

(iv) கொடுக்கப்பட்டது:

$$f(x) = f(1 - x)$$

$$2x - 3 = 2(1 - x) - 3$$

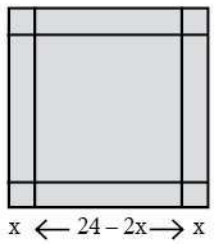
$$2x - 3 = 2 - 2x - 3$$

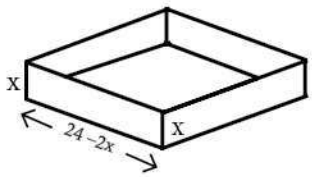
$$2x + 2x = 2 - 3 + 3$$

$$4x = 2$$

$$x = 2/4 = 1/2$$

7. 24 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவத் துண்டிலிருந்து நான்கு மூலைகளிலும் சம அளவுள்ள சதுரங்களை வெட்டி படத்தில் உள்ளவாறு மேல்புறம் திறந்த ஒரு பெட்டி செய்யப்படுகிறது. இந்தப் பெட்டியின் கன அளவு V எனில், V -ஐ x -யின் சார்பாகக் குறிப்பிடுக.





தீர்வு : படத்திலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட திடப்பொருள் என்பது கன செவ்வகம் ஆகும்.

மேலும், கன செவ்வகத்தின் கன அளவு (அல்லது) கொள்ளளவு = நீளம் × அகலம் × உயரம்

இங்கு $l = 24 - 2x$, $b = 24 - 2x$, $h = x$

$\therefore$ கொள்ளளவு $V(x) = (24 - 2x)(24 - 2x)x$

$$V(x) = x(24 - 2x)^2, x > 0$$

$$= 4x^3 - 96x^2 + 576x, x > 0$$

மதிப்பகம் $0 < x < 12$

8. f என்ற சார்பு f (x) = 3 – 2x என வரையறுக்கப் படுகிறது. $f(x^2) = (f(x))^2$ எனில், x -ஐக் காண்க.

தீர்வு : $f(x) = 3 - 2x$

கொடுக்கப்பட்டது: $f(x^2) = [f(x)]^2$

$$3 - 2x^2 = (3 - 2x)^2$$

$$3 - 2x^2 = 9 - 12x + 4x^2$$

$$6x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$6(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

9. ஒரு விமானம் 500 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. விமானம் 'd' தொலைவு செல்வதற்கு ஆகும் காலத்தை t (மணியில்) -ன் சார்பாக வெளிப்படுத்துக.

தீர்வு : 'd' என்பது தூரத்தைக் குறிக்கட்டும்.

வேகம் = 500 கி.மீ/மணி,

நேரம் = 't' மணி நேரங்கள்

$\therefore$ தூரம் = வேகம் × நேரம்

$$d(t) = 500t$$

10. அருகில் உள்ள அட்டவணையில் பெண்களின் முன்னங்கைகளின் நீளம் மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய உயரங்களின் தகவல்கள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. அந்த விவரங்களின் அடிப்படையில் ஒரு மாணவர், உயரம் (y) மற்றும் முன்னங்கை நீளம் (x) -க்கான உறவை y = ax + b எனக் கண்டுபிடித்தார். இங்கு a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள்.

முன்னங்கைகளின் நீளம் (செ.மீ) 'x'	உயரம் (அங்குலம்) 'y'
35	56
45	65
50	69.5
55	74

(i) இந்த உறவானது சார்பாகுமா என ஆராய்க.

(ii) a மற்றும் b –ஐக் காண்க.

(iii) முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில், அந்தப் பெண்ணின் உயரத்தைக் காண்க.

(iv) உயரம் 53.3 அங்குலம் எனில், அந்தப் பெண்ணின், முன்னங்கையின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு : y = ax + b; x = முன்னங்கை நீளம்; y = உயரம்

x	y
35	56
45	65
50	69.5
55	74

எல்லா x -மதிப்பிற்கும், 'y' ல் நிழல் உரு உள்ளது. மேலும், y –ன் தொடர்ச்சியான இரு மதிப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட இடைவெளி என்பது மாறிலியாகும்.

∴ y = ax + b ல்

(i) உறவு R = {(35, 56), (45, 65), (50, 69.5), (55, 74)} என்பது சார்பாகும்.

(ii) y = ax + b ல்

x = 35 எனும்போது, y = 56

$\Rightarrow 56 = 35a + b$ ....(1)

x = 45 எனும்போது, y = 65

$\Rightarrow 65 = 45a + b$ ....(2)

(1), (2) ஐத் தீர்க்கக் கிடைப்பது,

a = 0.90 மற்றும் b = 24.5

(iii) கொடுக்கப்பட்டது:

முன்னங்கை நீளம் = 40 செ.மீ

அதாவது, x = 40 எனும்போது, y = ax + b ல்

$y = (0.90)(40) + 24.5 = 60.5$

∴ பெண்ணின் உயரம் 60.5 அங்குலம்.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட உயரம் 53.3 அங்குலம்

y = 53.3 எனும்போது, x = ?

$\Rightarrow 53.3 = 0.9x + 24.5$

$53.3 - 24.5 = 0.9x$

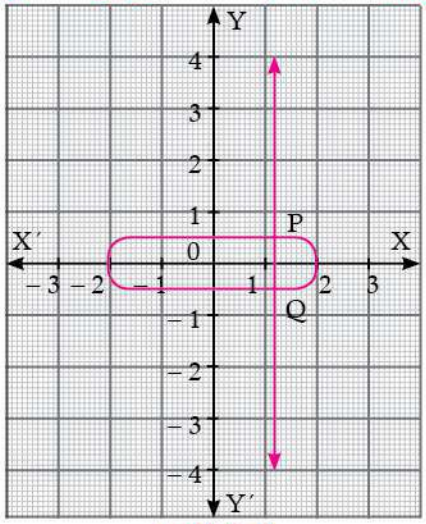
$\Rightarrow x = \frac{28.8}{0.9} = 32$

முன்னங்கை நீளம் 32 செ.மீ.

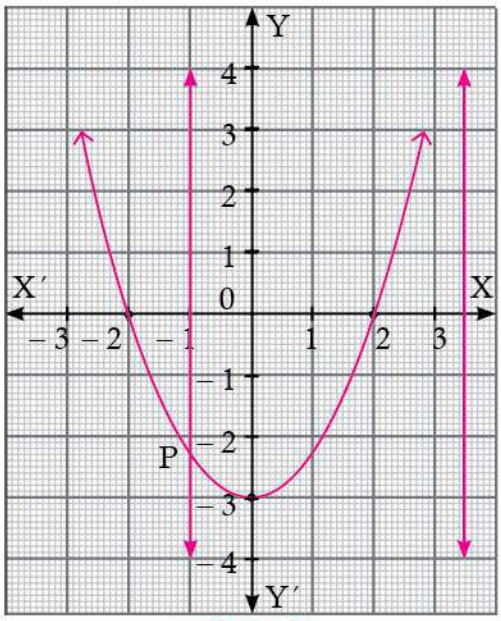
சார்புகளைக் குறிக்கும் முறை

எடுத்துக்காட்டு

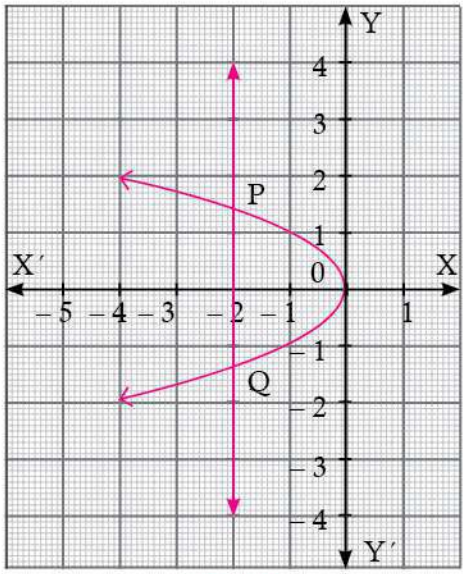
1.10 குத்துக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனத் தீர்மானிக்கவும். (படம் அ, ஆ, இ, ஈ)



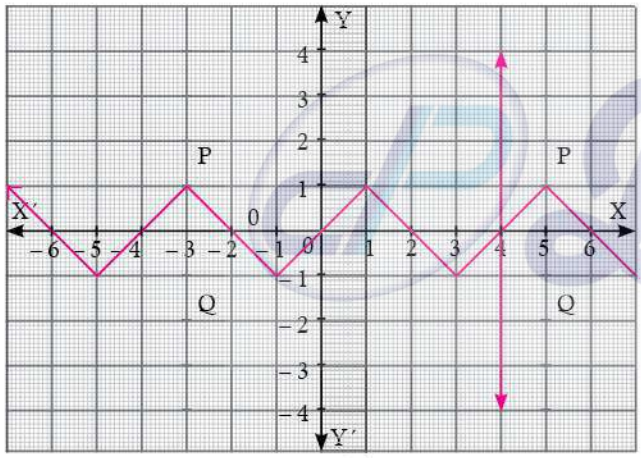
படம் (அ)



படம் (ஆ)



படம் (இ)



படம் (ஈ)

தீர்வு :

படம் (அ) மற்றும் படம் (இ) வரைபடங்களில், ஒரு குத்துக்கோடு, வரைபடத்தை P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், இவை ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

படம் (ஆ) மற்றும் படம் (ஈ) வரைபடங்களில், அதிகபட்சமாக ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இவை சார்பினைக் குறிக்கும்.

1. 11 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $f : A \to B$ எனும் சார்பு $f(x) = 3x - 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சார்பினை

(i) அம்புக்குறி படம்

(ii) அட்டவணை

(iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

(iv) வரைபடம் ஆகியவற்றால் குறிக்க.

தீர்வு :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$;

$f(x) = 3x - 1$

$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$

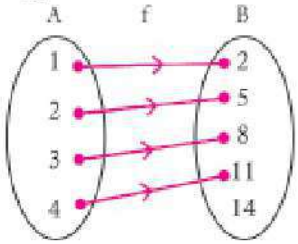
$f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$

$f(3) = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$

$f(4) = 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$

(i) அம்புக்குறி படம்

சார்பு $f : A \to B$ -ஐ ஒரு அம்புக்குறி படத்தால் குறிப்போம்.



(ii) அட்டவணை அமைப்பு

சார்பு f -ஐ கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையால் குறிப்போம்.

x	1	2	3	4
f (x)	2	5	8	11

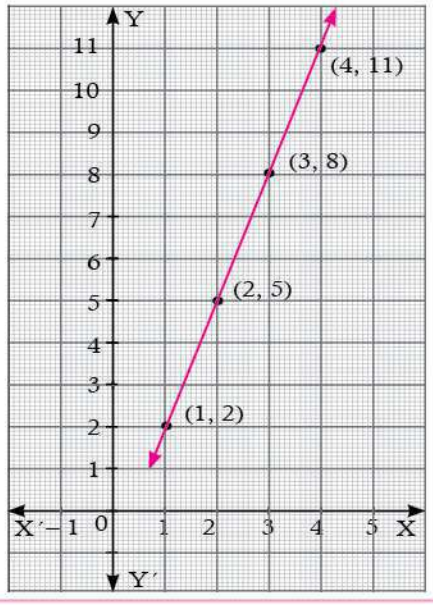
(iii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

சார்பு f-ஐ வரிசை சோடிகளின் கணமாக எழுதலாம்.

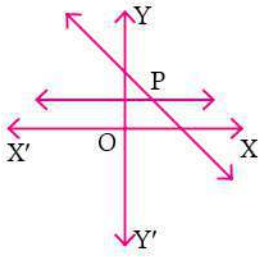
$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 8), (4, 11)\}$

(iv) வரைபடம்

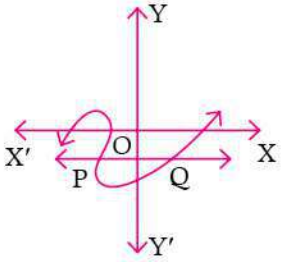
படத்திலுள்ள XY -தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டில் (1, 2), (2, 5), (3, 8), (4, 11) ஆகிய புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.



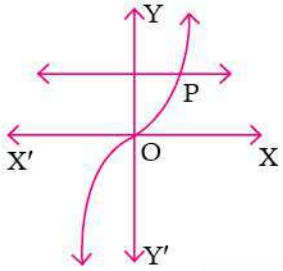
1. 12. கிடைமட்டக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்தி (படம் (அ), (ஆ), (இ)), கீழ்க்கண்ட சார்புகளில் எவை ஒன்றுக்கொன்றானவை எனக் காண்க.



(அ)



(ஆ)



(இ)

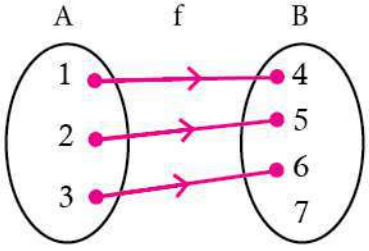
தீர்வு : ஒரு கிடைமட்டக்கோடு, வரைபடம் (அ) மற்றும் (இ) ஆகியவற்றை அதிகபட்சமாக ஒரே ஒரு புள்ளியில் (P) வெட்டுவதால் இவை ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பினைக் குறிக்கும்.

வரைபடம் (ஆ)-ல் வரையப்பட்ட ஒரு கிடைமட்டக் கோடு P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பைக் குறிக்காது.

1. 13. A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} மற்றும் f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)} ஆனது A -லிருந்து B -க்கான சார்பு f ஆகும். f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆனால் மேல்சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

தீர்வு : A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7};
f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)}

A -லிருந்து B -க்கு ஆன சார்பு f -ல், A -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு, B -ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது. எனவே, f ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும். துணை மதிப்பகத்தில் உள்ள உறுப்பு 7 -க்கு மதிப்பகத்தில் முன் உரு இல்லை. எனவே, f ஆனது மேல்சார்பு இல்லை.



எனவே, f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானது, ஆனால் மேல்சார்பு இல்லை.

1. 14. A = {– 2, –1, 0, 1, 2} மற்றும் $f : A \to B$ என்ற சார்பானது $f(x) = x^2 + x + 1$ மேல் சார்பு எனில், B -ஐ காண்க.

தீர்வு : A = {– 2, – 1, 0, 1, 2} மற்றும்
$f(x) = x^2 + x + 1$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 3$
$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$
$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$
$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$

எனவே, f -ன் வீச்சகம் B = {1, 3, 7}.

1. 15 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பானது $f(x) = 3x + 2$, $x \in \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

(i) 1, 2, 3 -யின் நிழல் உருக்களைக் காண்க.

(ii) 29 மற்றும் 53 -யின் முன் உருக்களைக் காண்க.

(iii) சார்பின் வகையைக் காண்க.

தீர்வு: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பானது $f(x) = 3x + 2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $x = 1$ எனில், $f(1) = 3(1) + 2 = 5$
$x = 2$ எனில், $f(2) = 3(2) + 2 = 8$
$x = 3$ எனில், $f(3) = 3(3) + 2 = 11$
1, 2, 3 -யின் நிழல் உருக்கள் முறையே 5, 8, 11 ஆகும்.

(ii) 29 -யின் முன் உரு x எனில், $f(x) = 29$.
எனவே, $3x + 2 = 29 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$.
இதைப்போலவே 53 -ன் முன் உரு x எனில்,
$f(x) = 53$. எனவே, $3x + 2 = 53$
$3x = 51 \Rightarrow x = 17$.
எனவே, 29 மற்றும் 53 -யின் முன் உருக்கள் முறையே 9 மற்றும் 17 ஆகும்.

(iii) $\mathbb{N}$ -யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்குத் துணை மதிப்பகத்தில் வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள் உள்ளன. எனவே, f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.
f -யின் துணை மதிப்பகமானது $\mathbb{N}$.
வீச்சகம் f = {5, 8, 11, 14, 17 , ...} ஆனது $\mathbb{N}$ -ன் தகு உட்கணமாகும்.
எனவே, f ஆனது மேல்சார்பு இல்லை.
அதாவது, f உட்சார்பு ஆகும்.
எனவே, f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் உட்சார்பு ஆகும்.

1. 16 தடயவியல் விஞ்ஞானிகள், தொடை எலும்புகளைக் கொண்டு ஒருவருடைய உயரத்தை (செ.மீட்டரில்) கணக்கிடுகிறார்கள். அவர்கள் பொதுவாக, $h(b) = 2.47b + 54.10$ என்ற சார்பை இதற்குப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இங்கு, b ஆனது தொடை எலும்பின் நீளமாகும்.

(i) h ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சோதிக்க.

(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் 50 செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரத்தைக் காண்க.

(iii) நபரின் உயரம் 147.96 செ.மீ எனில், அவர் தொடை எலும்பின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) h ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சோதிக்க $h(b_1) = h(b_2)$ எனக் கருதுக.
எனவே, நமக்குக் கிடைப்பது,

$2.47\, b_1 + 54.10 = 2.47\, b_2 + 54.10$

$2.47\, b_1 = 2.47\, b_2$ -லிருந்து $b_1 = b_2$

எனவே, $h(b_1) = h(b_2)$ எனில், $b_1 = b_2$.
ஆகையால், இந்தச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் $b = 50$ செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரமானது
$h(50) = (2.47 \times 50) + 54.10 = 177.6$ செ.மீ ஆகும்.

(iii) நபரின் உயரம் 147.96 செ.மீ எனில்,

$h(b) = 147.96$

$2.47\, b + 54.10 = 147.96$

$$b = \frac{93.86}{2.47} = 38$$

ஆகையால், தொடை எலும்பின் நீளமானது 38 செ.மீ ஆகும்.

1. 17. f ஆனது $\mathbb{R}$ -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு ஆன சார்பு. மேலும் அது $f(x) = 3x - 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. (a, 4) மற்றும் (1, b) எனக் கொடுக்கப்பட்டால் a மற்றும் b -யின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு: $f(x) = 3x - 5$

$f = \{(x, 3x - 5) \mid x \in \mathbb{R}\}$ என எழுதலாம்.

(a, 4) எனில், a யின் நிழல் உரு 4.

அதாவது, $f(a) = 4$

$3a - 5 = 4$ -லிருந்து $a = 3$

(1, b) எனில், 1 -யின் நிழல் உரு b.

அதாவது, $f(1) = b$

$3(1) - 5 = b$ -எனவே, $b = -2$

1. 18. ஒரு துகள் 't' (மணியில்) கால அளவில் கடந்த தூரமானது (கி.மீட்டரில்) $S(t) = \frac{t^2 + t}{2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துகள்,

(i) மூன்றரை மணி

(ii) 8 மணி மற்றும் 15 நிமிடங்கள் கால அளவிற்குப் பின் கடந்த தொலைவுகளைக் கண்டறிக.

தீர்வு : துகள் கடந்த தூரமானது

$$S(t) = \frac{t^2 + t}{2}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) $t = 3.5$ மணி. அப்படியானால்,

$$S(3.5) = \frac{(3.5)^2 + 3.5}{2}$$

$$= \frac{15.75}{2} = 7.875$$

மூன்றரை மணி நேரத்தில் கடந்த தூரம் 7. 875 கி.மீ ஆகும்.

(ii) $t = 8.25$ மணி (0.25 மணி = 15 நிமிடங்கள்)
அப்படியானால்,

$$S(8.25) = \frac{(8.25)^2 + 8.25}{2}$$

$$= \frac{76.3125}{2}$$

$$= 38.15625$$

8.25 மணி நேரத்தில் தோராயமாகக் கடந்த தூரம் 38.16 கி.மீ ஆகும்.

1. 19. சார்பு $f : R \to R$ ஆனது

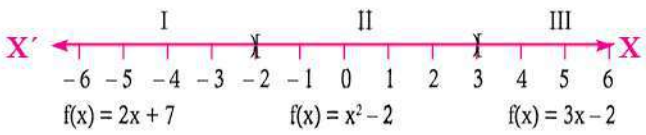
$$f(x) = \begin{cases} 2x+7, & x < -2 \\ x^2 - 2, & -2 \le x < 3 \\ 3x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$

(iii) $f(4) + 2f(1)$ (iv) $\frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)}$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : படத்தில் காட்டியுள்ளபடி சார்பு f ஆனது I, II, III என்ற இடைவெளிகளில் வரையறுக்கப்படுகிறது.



$x = a$, என்ற கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கு a-இருக்கும் இடைவெளியைக் கண்டுபிடித்து, அந்த இடைவெளியில் f(a) –ஐக் காண வேண்டும்.

(i) $x = 4$ ஆனது மூன்றாவது இடைவெளியில் உள்ளதை நாம் காணலாம்.
இங்கு, $f(x) = 3x - 2; f(4) = 3(4) - 2 = 10$

(ii) $x = -2$ ஆனது இரண்டாவது இடைவெளியில் உள்ளது.
எனவே, $f(x) = x^2 - 2; f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$

(iii) (i) –லிருந்து, $f(4) = 10$.
$f(1)$ –ன் மதிப்பைக் காண, $x = 1$ ஆனது இரண்டாவது இடைவெளியில் உள்ளது.
ஆகையினால்,
$f(x) = x^2 - 2$ -லிருந்து $f(1) = 1^2 - 2 = -1$
எனவே, $f(4) + 2f(1) = 10 + 2(-1) = 8$

(iv) $f(1) = -1, f(4) = 10$ எனக் கண்டோம்.
$f(-3)$ –யைக் காண $x = -3$ ஆனது ஒன்றாவது இடைவெளியில் உள்ளதைக் காணலாம்.
ஆகையினால், $f(x) = 2x + 7;$
எனவே, $f(-3) = 2(-3) + 7 = 1$

எனவே, $\frac{f(1) - 3f(4)}{f(-3)} = \frac{-1 - 3(10)}{1} = -31$

முன்னேற்றச் சோதனை

சரியா அல்லது தவறா?

1. எல்லா ஒன்றுக்கு ஒன்று சார்புகளும் மேல் சார்பாகும்.
விடை: தவறு

2. n(A) = 4, n(B) = 3 ஆக இருக்கும்பொழுது A–லிருந்து B–க்கு அமையும் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்காது.
விடை: சரி

3. எல்லா மேல்சார்புகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்புகளாகும்.
விடை: தவறு

4. n(A) = 4, n(B) = 5 ஆக இருக்கும்போது A–யிலிருந்து B க்கான சார்பு மேல் சார்பாக இருக்க முடியாது.
விடை: சரி

5. A–லிருந்து B–க்கான சார்பு f ஆனது, ஓர் இருபுறச் சார்பு எனில், n (A) = n (B).
விடை: சரி

6. n (A) = n (B) எனில், f ஆனது A –யிலிருந்து B –க்கு ஓர் இருபுறச்சார்பு.
விடை: தவறு

7. எல்லா மாறிலிச் சார்புகளும் இருபுறச் சார்புகளாகும்.
விடை: தவறு

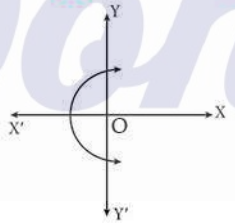
சிந்தனைக் களம்

1. ஒன்றிற்குப் பல என்ற சார்பு இருக்க முடியுமா?
விடை: ஒன்றிலிருந்து பலவற்றிற்கான சார்பு என்பது சாத்தியமல்ல. ஏனெனில் துணை மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் மதிப்பகத்தில் ஒரேயொரு முன் நிழல் உரு மட்டுமே இருக்க வேண்டும்.

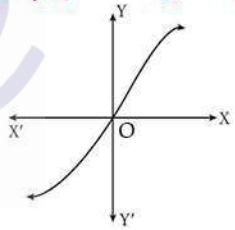
2. சமனிச் சார்பு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா?
விடை: ஆம். இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

பயிற்சி 1.4

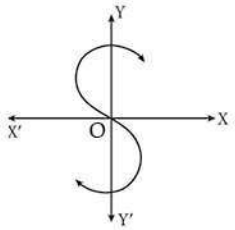
1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனத் தீர்மானிக்கவும். விடைகளுக்கான காரணத்தையும் கொடுக்கவும்.



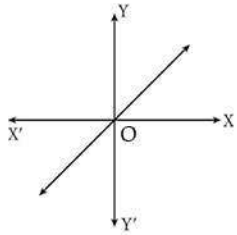
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

தீர்வு :

(i) குத்துக்கோடானது வளைவரையை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், இது ஒரு சார்பல்ல.

(ii) குத்துக்கோடு வளைவரையை ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இது ஒரு சார்பாகும்.

(iii) குத்துக்கோடானது வளைவரையை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், இது ஒரு சார்பல்ல.

(iv) குத்துக்கோடு வளைவரையை ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இது ஒரு சார்பாகும்.

2. $f : A \to B$ என்ற சார்பானது $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு, $A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$ ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f -ஐ பின்வரும் முறைகளில் குறிக்க

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

(ii) அட்டவணை

(iii) அம்புக்குறி படம்

(iv) வரைபடம்

தீர்வு : $f : A \to B$, $f(x) = \frac{x}{2} - 1$

$A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$

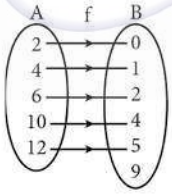
(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

$= \{(2, 0), (4, 1), (6, 2), (10, 4), (12, 5)\}$

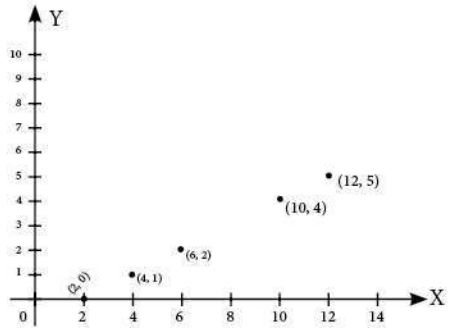
(ii) அட்டவணை

x	2	4	6	10	12
f(x)	0	1	2	4	5

(iii) அம்புக்குறி படம்



(iv) வரைபடம்



3. $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$ என்ற சார்பினை

(i) அம்புக்குறி படம்

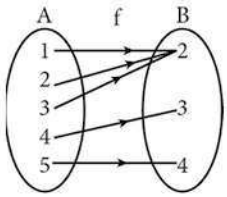
(ii) அட்டவணை

(iii) வரைபடம் மூலமாகக் குறிக்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சார்பு

$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

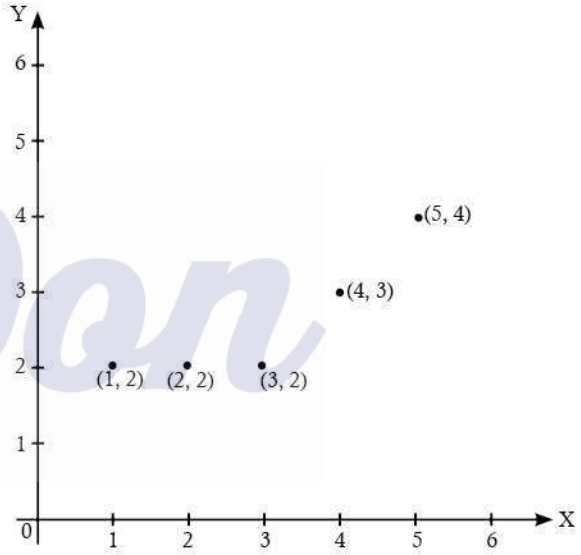
(i) அம்புக்குறி படம்



(ii) அட்டவணை வடிவம்

x	1	2	3	4	5
f(x)	2	2	2	3	4

(iii) வரைபடம்



4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஆனால் மேல் சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

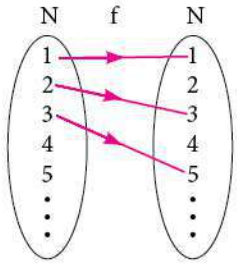
தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = 2x - 1$

இந்த சார்பானது மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 2-ஆல் பெருக்கி 1 -ஐக் கழிக்கக் கிடைக்கும் உறுப்புக்கு குறிக்கப்படுகிறது. மேலும் $2x - 1$ என்பது எப்போதும் $x \in N$ எனும் போது ஒற்றை எண்ணைக் குறிக்கும்.

எனவே, மதிப்பகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும், துணை மதிப்பகத்தில் உள்ள வெவ்வேறான உறுப்புகளுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகிறது. எனவே, இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும். மாறாக, மதிப்பகத்தில் உள்ள எந்தவொரு உறுப்பும் இரட்டை எண்ணுடன் தொடர்புபடுத்தப்படவில்லை. எனவே, சார்பானது மேல் சார்பல்ல.

$x = 1$ எனும்போது, $f(1) = 2(1) - 1 = 1$
$x = 2$ எனும்போது, $f(2) = 2(2) - 1 = 3$
$x = 3$ எனும்போது, $f(3) = 2(3) - 1 = 5$ மற்றும் பல.



5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(m) = m^2 + m + 3$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(m) = m^2 + m + 3$

$m = 1$ எனும்போது, $f(1) = (1)^2 + 1 + 3 = 5$

$m = 2$ எனும்போது, $f(2) = (2)^2 + 2 + 3 = 9$

$m = 3$ எனும்போது, $f(3) = (3)^2 + 3 + 3 = 15$ மற்றும் பல.

இதில் வீச்சகத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பும், மதிப்பகத்தின் ஒரேயொரு உறுப்புடன் மட்டுமே தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது தெளிவாகிறது.

எனவே, இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \mathbb{N}$ என்க. மேலும் $f : A \to B$ ஆனது, $f(x) = x^3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்,

(i) f –யின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(ii) f எவ்வகை சார்பு எனக் காண்க.

தீர்வு : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = N$

(i) $f : A \to B$

$f(x) = x^3$

$f(1) = (1)^3 = 1 \in N$

$f(2) = (2)^3 = 8 \in N$

$f(3) = (3)^3 = 27 \in N$

$f(4) = (4)^3 = 64 \in N$

வீச்சகம் $f = \{1, 8, 27, 64\}$

(ii) 'f' என்பது 'A'யிலிருந்து 'B' க்கான சார்பாகும். மேலும் 'A' ன் உறுப்புகள் அனைத்தும் 'B' ல் வெவ்வேறான நிழல் உருக்களைக் கொண்டுள்ளது.

எனவே, $f : A \to B$ என்பது ஒரு சார்பாகும். மேலும் இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான உட்படு சார்பாகும். இதை கன சார்பு எனவும் குறிக்கலாம்.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சார்பும் இருபுறச் சார்பா, இல்லையா? உன் விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = 2x + 1$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = 3 - 4x^2$

தீர்வு : (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ மற்றும் $f(x) = 2x + 1$

$x = -1$ எனும்போது, $f(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \in \mathbb{R}$

$x = 0$ எனும்போது, $f(0) = 2(0) + 1 = 1 \in \mathbb{R}$

$x = 1$ எனும்போது, $f(1) = 2(1) + 1 = 3 \in \mathbb{R}$ மற்றும் பல.

$x \in R$ ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும், $f(x) \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ இச்சார்பானது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது மற்றும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். (ஒருபுறச் சார்பு)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ க்கு மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் என்பன நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவை. எனவே இது மேல்சார்பு ஆகும். (மேல்புறச் சார்பு).

எனவே, இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மேல் சார்பு அதாவது இருபுறச் சார்பு ஆகும்.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4x^2$

$x = 0$ எனும்போது, $f(0) = 3 - 4(0) = 3 \in \mathbb{R}$

$x = 1$ எனும்போது, $f(1) = 3 - 4(1)^2 = -1 \in \mathbb{R}$

$x = 2$ எனும்போது, $f(2) = 3 - 4(2)^2 = -13 \in \mathbb{R}$

$x = -1$ எனும்போது, $f(-1) = 3 - 4(-1)^2 = -1 \in \mathbb{R}$

$x = -2$ எனும்போது, $f(-2) = 3 - 4(-2)^2 = -13 \in \mathbb{R}$

மதிப்பகத்தில் உள்ள உறுப்புகள் ஒரே மாதிரியான நிழல் உருக்களை துணை மதிப்பகத்தில் கொண்டுள்ளன.

எனவே, இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பல்ல. மாறாக இது பலவற்றிற்கு ஒன்றான சார்பாகும். எனவே, இது இருபுறச் சார்பாகாது.

8. $A = \{-1, 1\}$ மற்றும் $B = \{0, 2\}$ என்க. மேலும், $f : A \to B$ ஆனது $f(x) = ax + b$ என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு எனில், a மற்றும் b –ஐக் காண்க.

தீர்வு : $A = \{-1, 1\}$, $B = \{0, 2\}$

$f : A \to B$, $f(x) = ax + b$

$x = -1$ எனும்போது, $f(-1) = 0$

$x = 1$ எனும்போது, $f(1) = 2$

x மற்றும் f (x) -க்கான வேறுபாடு மாறிலி என்பதால் இது ஒரு மேல் சார்பு ஆகும்.

மதிப்புகளைப் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$-a + b = 0$

$a + b = 2$

இவற்றைத் தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பது

$a = 1, b = 1$

9. f என்ற சார்பானது

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x>1\\ 2, & -1\le x\le 1\\ x-1, & -3<x<-1\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால்

(i) f (3)

(ii) f (0)

(iii) f (– 1.5)

(iv) f (2) + f (– 2)

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x>1\\ 2, & -1\le x\le 1\\ x-1, & -3<x<-1\end{cases}$$

(i) $f(3)=3+2=5$ $[\because 3>1]$

(ii) $f(0)=2$ $[\because -1\le 0\le 1]$

(iii) $f(-1.5)=-1.5-1=-2.5$ $[\because -3<-1.5<-1]$

(iv) $f(2)+f(-2)=(2+2)+(-2-1)$

$=4-3=1$ $[\because 2>1$ மற்றும் $-3<-2<-1]$

10. $f:[-5,9]\to\mathbb{R}$ என்ற சார்பானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$f(x)=\begin{cases}6x+1, & -5\le x<2\\ 5x^2-1, & 2\le x<6\\ 3x-4, & 6\le x\le 9\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) f (– 3) + f (2) (ii) f (7) – f (1)

(iii) 2f (4) + f (8) (iv) $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$

தீர்வு : $f:[-5,9]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}6x+1, & -5\le x<2\\ 5x^2-1, & 2\le x<6\\ 3x-4, & 6\le x\le 9\end{cases}$$

(i) $f(-3)+f(2)=[6(-3)+1]+[5(2)^2-1]$

$=(-18+1)+(20-1)$

$=-17+19=2$ $[\because -5\le -3<2$

$2\le 2<6]$

(ii) $f(7)-f(1)=[3(7)-4]-[6(1)+1]$

$=(21-4)-(6+1)$

$=17-7=10$ $[\because 6\le 7\le 9$

$-5\le 1<2]$

(iii) $2f(4)+f(8)=2[5(4)^2-1]+[3(8)-4]$

$=2[80-1]+[24-4]$

$=158+20=178$ $[\because 2\le 4<6$

$6\le 8\le 9]$

(iv) $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$

$f(-2)=6(-2)+1=-12+1=-11$

$[\because -5\le -2<2]$

$f(6)=3(6)-4=18-4=14$ $[\because 6\le 6<9]$

$f(4)=5(4)^2-1=80-1=79$ $[\because 2\le 4<6]$

$f(-2)=-11$

$\therefore \frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}=\frac{2(-11)-14}{79-11}$

$=\frac{-22-14}{68}=-\frac{36}{68}=-\frac{9}{17}$

11. புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக t வினாடிகளில் ஒரு பொருள் கடக்கும் தூரமானது $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு a, b ஆகியவை மாறிலிகள் (g ஆனது புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம்). S(t) ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா என ஆராய்க.

தீர்வு : பொருள் கடந்த தூரமானது

$$S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$$

'g'- புவிஈர்ப்பு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம். மேலும், இது ஒரு மாறிலி.

'a' மற்றும் 'b' என்பதும் மாறிலிகள்

't' என்பது மாறி (t - காலம்)

't' ன் வெவ்வேறான மதிப்புகளுக்கு, S(t)–யும் வெவ்வேறான நிழல் உருக்களை துணை மதிப்பகத்தில் கொண்டுள்ளது. அதாவது, $f: t\to S(t)$ என்பது தெளிவாகிறது. மேலும், f என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

கொடுக்கப்பட்டது: $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ (a, b மாறிலிகள்)

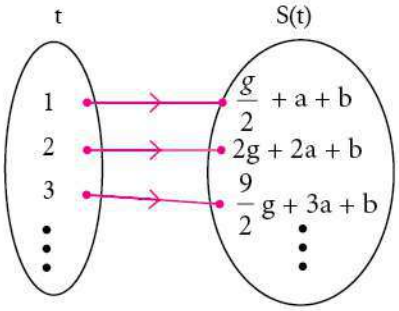
t = காலம் (நொடிகளில்)

t = 1, 2, 3 ... நொடிகள் என்க.

t = 1 எனும்போது, $S(1)=\frac{g}{2}+a+b$

t = 2 எனும்போது, $S(2)=2g+2a+b$

t = 3 எனும்போது, $S(3)=\frac{9}{2}g+3a+b$ மற்றும் பல.



t –ன் எல்லா உறுப்புகளும், S(t) ல் வெவ்வேறான நிழல் உருக்களைக் கொண்டுள்ளது. எனவே இது ஓர் ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

12. 't' என்ற சார்பானது செல்சியஸில் (C) உள்ள வெப்பநிலையையும், பாரன்ஹீட்டில் (F) உள்ள வெப்பநிலையையும் இணைக்கும் சார்பாகும். மேலும் அது t (C) = F என வரையறுக்கப்பட்டால், (இங்கு, $F=\frac{9C}{5}+32$).

(i) t (0)

(ii) t (28)

(iii) t (– 10)

(iv) t (C) = 212 ஆக இருக்கும்போது C –ன் மதிப்பு

(v) செல்சியஸ் மதிப்பும் ஃபாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும் பொழுது வெப்பநிலை ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது : t (C) = F

இங்கு $F=\frac{9C}{5}+32$

C - செல்சியஸ், F - ஃபாரன்ஹீட்

$$\therefore\ t(C)=\frac{9C}{5}+32$$

(i) $t(0)=\frac{9(0)}{5}+32=0+32=32\ ^{o}F$

(ii) $t(28)=\frac{9(28)}{5}+32=\frac{252}{5}+32$

$=50.4+32=82.4\ ^{o}F$

(iii) $t(-10)=\frac{9(-10)}{5}+32=-18+32=14\ ^{o}F$

(iv) கொடுக்கப்பட்டது: t (C) = 212

$$\therefore\ \frac{9C}{5}+32=212\Rightarrow\frac{9C}{5}=212-32$$

$$C=180\times\frac{5}{9}=100\ ^{o}C$$

(v) செல்சியஸ் மதிப்பும் ஃபாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும்போது வெப்பநிலை

$$\therefore F=C$$

$$\frac{9C}{5}+32=C$$

$$\frac{9C}{5}-C=-32\Rightarrow\frac{9C-5C}{5}=-32$$

$$4C=-32\times5\Rightarrow C=-\frac{160}{4}$$

$$C=-40^{o}C$$

சார்புகளின் சேர்ப்பு

நினைவில் கொள்க

- $f:X\to R$ மற்றும் $g:X\to R$ என்பன இரு மெய் சார்புகள் என்க. இங்கு $X\subset R$, எனில் இவற்றின் கூட்டல் $f+g$ அதாவது, $(f+g):X\to R$ என்ற சார்பு $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, எல்லா $x\in X$ என்பதால் வரையறுக்கப்படுகிறது.
- வேறுபாடு அதாவது, $(f-g):X\to R$ என்ற சார்பு $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, எல்லா $x\in X$ என்பதால் வரையறுக்கப்படுகிறது.
- மாறிலியால் பெருக்கலானது (αf) என்ற சார்பு $X\to R$, $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$, $x\in X$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- சார்புகளின் பெருக்கல் $fg:X\to R$ என்பது $(fg)(x)=f(x).g(x)$, எல்லா $x\in X$ க்கும் என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- சார்புகளின் வகுத்தல் $\frac{f}{g}$ என்ற சார்பானது $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, இதில் $g(x)\neq0$, $x\in X$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.
- f மற்றும் g என்ற இரண்டு சார்புகளின் சேர்ப்பானது $f\circ g$ மற்றும் $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ எனக் குறிக்கப்படுறது.
- சார்புகளின் சேர்ப்பு என்பது எப்போதும் பரிமாற்றுப் பண்பை நிறைவு செய்வதில்லை. அதாவது, $f\circ g\neq g\circ f$.
- சார்புகளின் சேர்ப்பு, சேர்ப்பு விதியை எப்போதும் நிறைவு செய்யும்.

எடுத்துக்காட்டு

1.20. $f(x) = 2x + 1$ மற்றும் $g(x) = x^2 - 2$ எனில், $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ –ஐ காண்க.

தீர்வு : $f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - 2$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2)$
$= 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1)$
$= (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$

எனவே, $f \circ g = 2x^2 - 3$, $g \circ f = 4x^2 + 4x - 1$

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து $f \circ g \neq g \circ f$ என அறிகிறோம்.

1.21. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$ –ஐ இரு சார்புகளின் சேர்ப்பாகக் குறிக்க.

தீர்வு :

$f_2(x) = 2x^2 - 5x + 3$ மற்றும் $f_1(x) = \sqrt{x}$ என வரையறுப்போம்.

எனவே, $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$

$= \sqrt{f_2(x)}$

$= f_1[f_2(x)] = f_1 f_2(x)$

1.22. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 2x + k$ மற்றும் $f \circ g = g \circ f$ எனில், k யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $f(x) = 3x - 2, g(x) = 2x + k$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + k)$
$= 3(2x + k) - 2 = 6x + 3k - 2$

எனவே, $f \circ g(x) = 6x + 3k - 2$

$g \circ f(x) = g(3x - 2) = 2(3x - 2) + k$

எனவே $g \circ f(x) = 6x - 4 + k$

$f \circ g = g \circ f$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையினால்,

$6x + 3k - 2 = 6x - 4 + k$

$6x - 6x + 3k - k = -4 + 2$ -லிருந்து $k = -1$

1.23. $f \circ f(k) = 5$, $f(k) = 2k - 1$ எனில், k –யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$f \circ f(k) = f(f(k)) = f(2k - 1)$
$= 2(2k - 1) - 1 = 4k - 3$

எனவே, $f \circ f(k) = 4k - 3$

ஆனால், $f \circ f(k) = 5$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகையினால்,

$4k - 3 = 5$ -லிருந்து $k = 2$

1.24. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 1 - 2x$ மற்றும் $h(x) = 3x$ எனில், $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$f(x) = 2x + 3, g(x) = 1 - 2x, h(x) = 3x$

இப்பொழுது,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - 2x)$
$= 2(1 - 2x) + 3 = 5 - 4x$

மேலும்,

$(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x))$
$= (f \circ g)(3x)$
$= 5 - 4(3x) = 5 - 12x$ ... (1)

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x)$
$= 1 - 2(3x) = 1 - 6x$

மேலும், $f \circ (g \circ h)(x) = f(1 - 6x) = 2(1 - 6x) + 3$
$= 5 - 12x$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது,

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

1.25. $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x + 3$ ஆகியவை இரு சார்புகள். மேலும், $gff(x) = fgg(x)$ எனில், x –ஐக் காண்க.

தீர்வு : $gff(x) = g[f\{f(x)\}]$
$= g[f(3x + 1)] = g[3(3x + 1) + 1]$
$= g(9x + 4)$
$= (9x + 4) + 3 = 9x + 7$

$fgg(x) = f[g\{g(x)\}]$
$= f[g(x + 3)] = f[(x + 3) + 3]$
$= f(x + 6)$

$f(x + 6) = 3(x + 6) + 1 = 3x + 19$

$gff(x) = fgg(x)$ எனவே, $9x + 7 = 3x + 19$.

இந்தச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்பொழுது நமக்குக் கிடைப்பது $x = 2$.

முன்னேற்றச் சோதனை

பின்வரும் வினாக்களுக்குச் சரியானவற்றைத் தேர்ந்தெடுப்பதன் மூலமாக விடை கூறுக.

1. சார்புகளின் சேர்ப்பானது பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டது.
   (அ) எப்பொழுதும் உண்மையே
   (ஆ) ஒருபொழுதும் உண்மையில்லை
   (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

   விடை: (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

2. சார்புகளின் சேர்ப்பானது சேர்ப்பு விதிக்குட்பட்டது.
   (அ) எப்பொழுதும் உண்மையே
   (ஆ) ஒருபொழுதும் உண்மையில்லை
   (இ) சில சமயங்களில் உண்மை

   விடை: (அ) எப்பொழுதும் உண்மையே

3. ஒரு மாறிலிச் சார்பு நேரிய சார்பாகுமா?
விடை: ஆம்

4. இருபடிச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா?
விடை: இல்லை

5. கனச் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா?
விடை: ஆம்

6. தலைகீழ்ச் சார்பு இருபுறச்சார்பாகுமா?
விடை: ஆம்

7. $f : A \to B$ ஆனது மாறிலிச் சார்பு எனில் f –யின் வீச்சகத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.
விடை: ஓர் உறுப்பு

சிந்தனைக் களம்

1. $f(x) = x^m$ மற்றும் $g(x) = x^n$ எனில், $f \circ g = g \circ f$?

விடை: $f(x) = x^m, g(x) = x^n$

$f \circ g = f[g(x)] = f(x^n) = (x^n)^m = x^{nm}$

$g \circ f = g[f(x)] = g[x^m] = (x^m)^n = x^{mn}$

$\therefore f \circ g = g \circ f$

பயிற்சி 1.5

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள f மற்றும் g எனும் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ –ஐக் காண்க. $f \circ g = g \circ f$ என்பது சரியா சோதிக்க.

(i) $f(x) = x - 6, g(x) = x^2$

(ii) $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 2x^2 - 1$

(iii) $f(x) = \frac{x+6}{3}, g(x) = 3 - x$

(iv) $f(x) = 3 + x, g(x) = x - 4$

(v) $f(x) = 4x^2 - 1, g(x) = 1 + x$

தீர்வு :

(i) $f(x) = x - 6, g(x) = x^2$

$f \circ g = f[g(x)] = f[x^2] = x^2 - 6$

$g \circ f = g[f(x)] = g[x - 6] = (x - 6)^2$

$= x^2 - 12x + 36$

$\therefore f \circ g \neq g \circ f$

(ii) $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 2x^2 - 1$

$f \circ g = f[g(x)] = f[2x^2 - 1] = \frac{2}{2x^2 - 1}$

$g \circ f = g[f(x)] = g\left[\frac{2}{x}\right] = 2\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1$

$= 2\left(\frac{4}{x^2}\right) - 1 = \frac{8 - x^2}{x^2}$

$\therefore f \circ g \neq g \circ f$

(iii) $f(x) = \frac{x+6}{3}, g(x) = 3 - x$

$f \circ g = f[g(x)] = f(3 - x) = \frac{3 - x + 6}{3} = \frac{9 - x}{3}$

$g \circ f = g[f(x)] = g\left(\frac{x+6}{3}\right) = 3 - \left(\frac{x+6}{3}\right)$

$= \frac{9 - x - 6}{3} = \frac{3 - x}{3}$ $\therefore f \circ g \neq g \circ f$

(iv) $f(x) = 3 + x, g(x) = x - 4$

$f \circ g = f[g(x)] = f[x - 4] = 3 + x - 4 = x - 1$

$g \circ f = g[f(x)] = g[3 + x] = 3 + x - 4 = x - 1$

$\therefore f \circ g = g \circ f$

(v) $f(x) = 4x^2 - 1, g(x) = 1 + x$

$f \circ g = f[g(x)] = f(1 + x) = 4(1 + x)^2 - 1$

$= 4(1 + 2x + x^2) - 1$

$= 4 + 8x + 4x^2 - 1$

$= 4x^2 + 8x + 3$

$g \circ f = g[f(x)] = 1 + 4x^2 - 1$

$= 4x^2$

$\therefore f \circ g \neq g \circ f$

2. $f \circ g = g \circ f$ எனில் k –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $f(x) = 3x + 2, g(x) = 6x - k$

(ii) $f(x) = 2x - k, g(x) = 4x + 5$

தீர்வு :

(i) $f(x) = 3x + 2, g(x) = 6x - k$

$f \circ g = f[g(x)] = f(6x - k)$

$= 3(6x - k) + 2$

$= 18x - 3k + 2$

$g \circ f = g[f(x)] = 6(3x + 2) - k$

$= 18x + 12 - k$

கொடுக்கப்பட்டது

$f \circ g = g \circ f$

$\therefore 18x - 3k + 2 = 18x + 12 - k$

$3k - k = -12 + 2$

$2k = -10$

$k = -5$

(ii) $f(x) = 2x - k, g(x) = 4x + 5$

$f \circ g = f[g(x)] = f[4x + 5]$

$= 2(4x + 5) - k$

$= 8x + 10 - k$

$g \circ f = g[f(x)] = g(2x - k) = 4(2x - k) + 5$

$= 8x - 4k + 5$

கொடுக்கப்பட்டது,

$f \circ g = g \circ f$

$\therefore 8x + 10 - k = 8x - 4k + 5$

$4k - k = 5 - 10$

$3k = -5$

$k = -5/3$

3. $f(x) = 2x - 1$ மற்றும் $g(x) = \frac{x+1}{2}$ எனில், $f \circ g = g \circ f = x$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{x+1}{2}$

$$f \circ g = f[g(x)] = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

$$g \circ f = g[f(x)] = g(2x - 1) = \frac{2x - 1 + 1}{2}$$
$$= \frac{2x}{2} = x$$

$\therefore f \circ g = g \circ f = x$ என நிறுவப்பட்டது.

4. (i) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 2$ மற்றும் $g \circ f(a) = 1$ எனில், a -ஐக் காண்க.

(ii) $f(k) = 2k - 1$ மற்றும் $f \circ f(k) = 5$ எனில், k -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2$

$f(a) = a^2 - 1$

கொடுக்கப்பட்டது,

$g \circ f(a) = 1$

$g[f(a)] = 1$

$g[a^2 - 1] = 1$

$a^2 - 1 - 2 = 1$

$a^2 - 3 = 1$

$a^2 = 1 + 3 = 4$

$a = \pm 2$

(ii) $f(k) = 2k - 1$

கொடுக்கப்பட்டது

$f \circ f(k) = 5$

$f[f(k)] = 1$

$f[2k - 1] = 1$

$\therefore 2(2k - 1) - 1 = 5$

$4k - 2 - 1 = 5$

$4k - 3 = 5$

$4k = 5 + 3 = 8$

$k = 8/4 = 2$

5. $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ மற்றும் $f : A \to B$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x + 1$ எனவும் மற்றும் $g : B \to C$ ஆனது $g(x) = x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்பட்டால், $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ -யின் வீச்சகத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$

$f : A \to B$ என்பது $f(x) = 2x + 1$

என வரையறுக்கப்பட்டது

$g : B \to C$ என்பது $g(x) = x^2$

என வரையறுக்கப்பட்டது

$f \circ g = f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$g \circ f = g[f(x)] = g(2x - 1) = (2x + 1)^2$

$= 4x^2 + 4x + 1$

'x' என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்மதிப்பு எனில், மெய்மதிப்புகளை மட்டுமே தரும். எனவே, $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ -ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் என்பது $\mathbb{R}$ ஆகும் (மெய்யெண்களின் கணம்).

6. $f(x) = x^2 - 1$ எனில் (அ) $f \circ f$ (ஆ) $f \circ f \circ f$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு : $f(x) = x^2 - 1$

(அ) $f \circ f = f[f(x)] = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1$

$= x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$

(ஆ) $f \circ f \circ f = f[f[f(x)]] = f[f(x^2 - 1)] = f[x^4 - 2x^2]$

$= (x^4 - 2x^2)^2 - 1 = x^8 - 4x^6 + 4x^4 - 1$

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ மற்றும் $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஆனது முறையே, $f(x) = x^5$, $g(x) = x^4$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f, g ஆகியவை ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா மற்றும் $f \circ g$ ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா என்று ஆராய்க.

தீர்வு :

$f(x) = x^5, g(x) = x^4$

$f(x) = x^5$

'x' ன் எந்த ஒரு மதிப்புக்கும் $f(x)$ என்பது வெவ்வேறான மதிப்புகளை (நிழல் உருக்களை) துணை மதிப்பகத்தில் கொண்டுள்ளது.

$\therefore f(x)$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு.

$g(1) = 1 \; ; \; g(-1) = 1$

எனவே, $g(x)$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பல்ல.

$f \circ g = f[g(x)] = f(x^4) = (x^4)^5 = x^{20}$

x என்பது $f \circ g$ ன் வெவ்வேறான மதிப்புகளுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டிருப்பதால், $f \circ g$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.

8. கொடுக்கப்பட்ட $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ஆகியவற்றைக் கொண்டு $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ எனக் காட்டுக.

(i) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x + 1$ மற்றும் $h(x) = x^2$

(ii) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ மற்றும் $h(x) = x + 4$

(iii) $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2$ மற்றும் $h(x) = 3x - 5$

தீர்வு :

(i) $f(x) = x - 1, g(x) = 3x + 1, h(x) = x^2$

$f \circ g = f[g(x)] = f[3x + 1]$

$= (3x + 1) - 1 = 3x$

$(f \circ g) \circ h = (f \circ g)[h(x)] = (f \circ g)[x^2] = 3x^2$

$g \circ h = g[h(x)] = g[x^2] = 3x^2 + 1$

$f \circ (g \circ h) = f[g(h(x))] = f[g(x^2)] = f[3x^2 + 1]$
$= (3x^2 + 1) - 1 = 3x^2$
$\therefore (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
நிறுவப்பட்டது.

(ii) $f(x) = x^2, g(x) = 2x, h(x) = x + 4$
$f \circ g = f[g(x)]$
$= f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$
$(f \circ g) \circ h = (f \circ g)[h(x)] = (f \circ g)[x + 4]$
$= 4(x + 4)^2$
$= 4(x^2 + 8x + 16) = 4x^2 + 32x + 64$
$g \circ h = g[h(x)] = g[x + 4] = 2(x + 4)$
$f \circ (g \circ h) = f[g(h(x))] = f[g(x + 4)]$
$= f[2(x + 4)] = [2(x + 4)]^2 = 4(x + 4)^2$
$= 4(x^2 + 8x + 16) = 4x^2 + 32x + 64$
$\therefore (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(iii) $f(x) = x - 4, g(x) = x^2, h(x) = 3x - 5$
$f \circ g = f[g(x)] = f(x^2) = x^2 - 4$
$(f \circ g) \circ h = (f \circ g)[h(x)] = (f \circ g)[3x - 5]$
$= (3x - 5)^2 - 4 = 9x^2 - 30x + 25 - 4$
$= 9x^2 - 30x + 21$
$g \circ h = g[h(x)]$
$= g(3x - 5) = (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$
$f \circ (g \circ h) = f[g(h(x))] = f[g(3x - 5)] = f(3x - 5)^2]$
$= 9x^2 - 30x + 25 - 4 = 9x^2 - 30x + 21$
$\therefore (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

9. $f = \{(-1, 3), (0, -1), (2, -9)\}$ ஆனது $\mathbb{Z}$ -லிருந்து $\mathbb{Z}$-க்கான ஒரு நேரிய சார்பு எனில், f (x) -ஐக் காண்க.

தீர்வு : $f = \{(-1, 3), (0, -1), (2, -9)\}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
'f' என்பது நேரிய சார்பு. ஆதலால்,
$f(x) = ax + b$
$(0, -1)$ ல் $x = 0$ எனும்போது, $f(0) = -1$
$\therefore a(0) + b = -1 \Rightarrow b = -1$
$(-1, 3)$ ல் $x = -1$ எனும்போது, $f(-1) = 3$
$\therefore a(-1) + b = 3 \Rightarrow -a - 1 = 3$
$-a = 4 \Rightarrow a = -4$
$\therefore f(x) = -4x - 1$

10. ஒரு மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின்படி, C(t) என்ற ஒரு நேரிய சுற்று, $C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2)$ -ஐ பூர்த்தி செய்கிறது. மேலும் இங்கு a, b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில், $C(t) = 3t$ ஆனது ஒரு நேரிய சுற்று எனக் காட்டுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது:
மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின்படி
$C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2)$
இதில், a, b என்பன மாறிலிகள்.
$C(t_1)$ ன் தெரிந்த மதிப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்தும் தனித்த மதிப்புகள் எனில்,
$C(t) = aC(t_1) + d$, d என்பது $bC(t_2)$
$\therefore C(t)$ என்பது நேரிய சார்பாகும்.

மாற்றுமுறை:
C(t) என்பது நேரிய சார்பு மற்றும் $t = t_1 + t_2$
$C(t_1) = t$ மற்றும் $C(t_2) = 2t$ என்க.
கொடுக்கப்பட்டது,
$C(at_1 + bt_2) = aC(t_1) + bC(t_2)$ ... (1)
இப்போது,
$C(t) = C(t_1 + t_2)$ [$\because t = t_1 + t_2$]
$= C(t_1) + C(t_2)$ [(1) -லிருந்து
$= t + 2t = 3t$
எனவே, C(t) என்பது நேரிய சார்பாகும்.

பயிற்சி 1.6

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்:

1. $n(A \times B) = 6$ மற்றும் $A = \{1, 3\}$ எனில், n (B) ஆனது
(1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 6
[விடை: (3)]

தீர்வு :
$n(A \times B) = 6$
$A = \{1, 3\} \Rightarrow n(A) = 2$
$n(B) = \frac{n(A \times B)}{n(A)} = \frac{6}{2} = 3$

2. $A = \{a, b, p\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{p, q, r, s\}$ எனில், $n[(A \cup C) \times B]$ ஆனது
(1) 8 (2) 20
(3) 12 (4) 16
[விடை: (3)]

தீர்வு :
$A = \{a, b, p\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{p, q, r, s\}$
$A \cup C = \{a, b, p, q, r, s\}$
$n(A \cup C) = 6$
$n(B) = 2$
$\therefore n[(A \cup C) \times B] = 6 \times 2 = 12$

3. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$ மற்றும் $D = \{5, 6, 7, 8\}$ எனில் கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது சரியான கூற்று?
(1) $(A \times C) \subset (B \times D)$ (2) $(B \times D) \subset (A \times C)$
(3) $(A \times B) \subset (A \times D)$ (4) $(D \times A) \subset (B \times A)$
[விடை: (1)]

தீர்வு : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

$C = \{5, 6\}$ மற்றும் $D = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \times C = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

$B \times D = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$

எனவே, $(A \times C) \subset (B \times D)$

4. A = {1, 2, 3, 4, 5} -லிருந்து, B என்ற கணத்திற்கு 1024 உறவுகள் உள்ளது எனில் B ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 2

(3) 4 (4) 8

[விடை: (2)]

தீர்வு : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n(A) = 5$, $n(B) = ?$

A -யிலிருந்து B -க்கான உறவுகளின் எண்ணிக்கையானது 1024.

அதாவது, 'mn' என்பது $A \times B$ -ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை என்பதால் $2^{mn} = 1024$.

$$2^{mn} = 2^{10} \Rightarrow mn = 10$$

$$n(B) = \frac{n(A \times B)}{n(A)} = \frac{10}{5} = 2$$

5. $R = \{(x, x^2) \mid x$ ஆனது 13 -ஐ விடக் குறைவான பகா எண்கள்$\}$ என்ற உறவின் வீச்சகமானது

(1) {2, 3, 5, 7}

(2) {2, 3, 5, 7, 11}

(3) {4, 9, 25, 49, 121}

(4) {1, 4, 9, 25, 49, 121}

[விடை: (3)]

தீர்வு : 13 -க்கு குறைவாக உள்ள பகா எண்களின் கணம் {2, 3, 5, 7, 11}

உறவு $R = \{(x, x^2)/x$ என்பது 13 -க்கும் குறைவான பகா எண்$\}$

$R = \{(2, 4), (3, 9), (5, 25), (7, 49), (11, 121)\}$

$\therefore$ வீச்சகம் $= \{4, 9, 25, 49, 121\}$

6. (a + 2, 4) மற்றும் (5, 2a + b) ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், (a, b) என்பது

(1) (2, – 2)

(2) (5, 1)

(3) (2, 3)

(4) (3, – 2)

[விடை: (4)]

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது: $(a + 2, 4) = (5, 2a + b)$

$a + 2 = 5$	$2a + b = 4$
$a = 5 - 2$	$2(3) + b = 4$
$= 3$	$b = 4 - 6 = -2$

7. n (A) = m மற்றும் n (B) = n என்க. A -லிருந்து B-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட வெற்று கணமில்லாத உறவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை.

(1) m^n (2) n^m

(3) $2^{mn} - 1$ (4) 2^{mn}

[விடை: (3)]

8. {(a, 8), (6, b)} ஆனது ஒரு சமனிச் சார்பு எனில், a மற்றும் b மதிப்புகளாவன முறையே

(1) (8, 6) (2) (8, 8)

(3) (6, 8) (4) (6, 6)

[விடை: (1)]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது {(a, 8), (6, b)} என்பது சமனிச் சார்பு

அதாவது., {(8, 8), (6, 6)}

$\therefore \quad a = 8, b = 6$

9. A = {1, 2, 3, 4}, B = {4, 8, 9, 10} என்க. சார்பு $f : A \to B$ ஆனது f = {(1, 4), (2, 8), (3, 9), (4, 10)} எனக் கொடுக்கப்பட்டால் f-என்பது

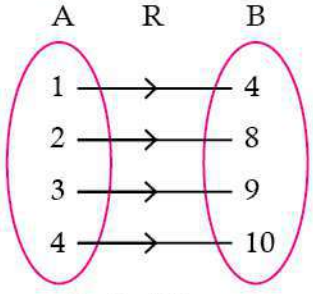
(1) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு

(2) சமனிச் சார்பு

(3) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு

(4) உட்சார்பு [விடை: (3)]

தீர்வு : A = {1, 2, 3, 4}, B = {4, 8, 9, 10}



$f : A \to B$

மற்றும் f ={(1, 4), (2, 8), (3, 9), (4, 10)}

ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு

10. $f(x) = 2x^2$ மற்றும் $g(x) = \frac{1}{3x}$ எனில், $f \circ g$ ஆனது

(1) $\frac{3}{2x^2}$ (2) $\frac{2}{3x^2}$

(3) $\frac{2}{9x^2}$ (4) $\frac{1}{6x^2}$

[விடை: (3)]

தீர்வு : $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 1/3x$

$$f \circ g = f[g(x)] = f\left[\frac{1}{3x}\right]$$
$$= 2\left(\frac{1}{3x}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{9x^2}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{9x^2}\right)$$

11. f : $A \to B$ ஆனது இருபுறச் சார்பு மற்றும் n (B) = 7 எனில், n (A) ஆனது

(1) 7 (2) 49
(3) 1 (4) 14 **[விடை: (1)]**

தீர்வு :
f : A → B என்பது இருபுறச் சார்பு மற்றும் n(B) = 7. f என்பது இருபுறச் சார்பு. அதாவது, ஒன்றுக்கு ஒன்றான மேல்சார்பு.
∴ A மற்றும் B ஆகியவற்றில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்க வேண்டும்.
n(A) = 7

12. f மற்றும் g என்ற இரண்டு சார்புகளும் f = {(0, 1), (2, 0), (3, – 4), (4, 2), (5, 7)} g = {(0, 2), (1, 0), (2, 4), (– 4, 2), (7, 0)} எனக் கொடுக்கப்பட்டால் $f \circ g$ –ன் வீச்சகமானது

(1) {0, 2, 3, 4, 5} (2) {– 4, 1, 0, 2, 7}
(3) {1, 2, 3, 4, 5} (4) {0, 1, 2} **[விடை: (4)]**

தீர்வு : f = {(0, 1), (2, 0), (3, – 4), (4, 2), (5, 7)}
g = {(0, 2), (1, 0), (2, 4), (– 4, 2), (7, 0)}
இப்போது,
f o g(0) = f[2] = 0
f o g(1) = f[0] = 1
f o g(2) = f[4] = 2
f o g(– 4) = f[2] = 0
f o g(7) = f[0] = 1
'fog' ன் வீச்சகம் = {0, 1, 2}

13. f (x) = $\sqrt{1+x^2}$ எனில்

(1) f (xy) = f (x). f (y)
(2) $f(xy) \geq f(x).f(y)$
(3) $f(xy) \leq f(x).f(y)$
(4) இவற்றில் ஒன்றுமில்லை **[விடை: (3)]**

தீர்வு : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
பிறகு, $f(y) = \sqrt{1+y^2}$
மற்றும் $f(xy) = \sqrt{1+x^2y^2}$
எனவே, f(xy) ≤ f(x) f(y) என்பது தெளிவாகிறது.

14. g = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)} என்ற சார்பானது g (x) = $\alpha x + \beta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் α மற்றும் β –வின் மதிப்பானது

(1) (– 1, 2) (2) (2, – 1)
(3) (– 1, – 2) (4) (1, 2) **[விடை: (2)]**

தீர்வு :
g = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)}
$g(x) = \alpha x + \beta$
$\alpha = 2$ மற்றும் $\beta = -1$ எனும்போது, g(x) = 2x – 1
என்பது 'g' யை நிறைவு செய்கிறது.

15. f (x) = $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$ குறிப்பிடும் சார்பானது

(1) நேரிய சார்பு
(2) ஒரு கனச் சார்பு
(3) தலைகீழ்ச் சார்பு
(4) இருபடிச் சார்பு **[விடை: (4)]**

தீர்வு :
$f(x) = (x + 1)^3 - (x - 1)^3$
$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$
$= 6x^2 + 2$

அலகுப் பயிற்சி - 1

1. $(x^2 - 3x, y^2 + 4y)$ மற்றும் $(-2, 5)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், x மற்றும் y -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $(x^2 - 3x, y^2 + 4y) = (-2, 5)$

$\therefore x^2 - 3x = -2$ | $y^2 + 4y = 5$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ | $y^2 + 4y - 5 = 0$

$(x - 1)(x - 2) = 0$ | $(y + 5)(y - 1) = 0$

$x = 1, 2$ | $y = -5, 1$

2. A × A கார்டீசியன் பெருக்கல் பலனின், 9 உறுப்புகளில், உறுப்புகள் (–1, 0) மற்றும் (0, 1) -யும் இருக்கிறது எனில், A -யில் உள்ள உறுப்புகளைக் காண்க மற்றும் A × A -ன் மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : A × A வில் 9 உறுப்புகள் உள்ளதால் A யில் 3 உறுப்புகள் இருக்கும். ($\because 3 \times 3 = 9$)

A × A என்பது $(-1, 0)$ மற்றும் $(0, 1)$ என்பனவற்றைக் கொண்டுள்ளது.

$\therefore -1, 0 \in A$ ... (1)

இதே போல $(0, 1)$, A × A -ல் உள்ளது.

எனவே, $0, 1 \in A$ ... (2)

(1), (2) லிருந்து $-1, 0, 1 \in A$

$\therefore A = \{-1, 0, 1\}$

$\therefore A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$

$= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$

$\therefore$ A × A ன் மீதமுள்ள உறுப்புகள்

$\{(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1,1)\}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ 4, & x < 1 \end{cases}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால்,

(i) f (0) (ii) f (3)

(iii) f (a + 1) ($a \geq 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$

(i) $f(0) = 4$ [$\because 0 < 1$

(ii) $f(3) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ [$\because 3 \geq 1$

(iii) $f(a + 1) = \sqrt{a+1-1} = \sqrt{a}$

[$\because$ கொடுக்கப்பட்டது $a \geq 0$

[$\because a + 1 \geq 1$

4. A = {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17} மற்றும் $f : (A \to N)$ ஆனது f (n) = n -ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி $n \in A$ என வரையறுக்கப்பட்டால் f -ன் வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தை எழுதுக மற்றும் f -ன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

தீர்வு : A = {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}

$f : A \to N$, f (n) = மிகப் பெரிய பகாக் காரணி $n \in A$

$\therefore f(9) = 3, \quad f(10) = 5, \quad f(11) = 11$

$f(12) = 3, \quad f(13) = 13, \quad f(14) = 7$

$f(15) = 5, \quad f(16) = 2, \quad f(17) = 17$

வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

f = {(9, 3), (10, 5), (11, 11), (12, 3), (13, 13), (14, 7), (15, 5), (16, 2), (17, 17)}

வீச்சகம் = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}

5. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ என்ற சார்பின் மதிப்பகத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$

$f(x) = \sqrt{1-t}$,

இங்கு $t = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

$1 - t \geq 0$

$t \leq 1$

$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \leq 1$

வர்க்கப்படுத்த $1-\sqrt{1-x^2} \leq 1$

$-\sqrt{1-x^2} \leq 0$

$\sqrt{1-x^2} \geq 0$

$1 - x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 1$

$\Rightarrow x \in [-1, 1]$ அதாவது {– 1, 0, 1}

6. f (x) = x^2, g (x) = 3x மற்றும் h (x) = x – 2 எனில், $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $f(x) = x^2, g(x) = 3x, h(x) = x - 2$

$f \circ g = f[g(x)] = f(3x)$

$= (3x)^2 = 9x^2$

$(f \circ g) \circ h = (f \circ g)[h(x)] = (f \circ g)[x - 2]$

$= 9(x - 2)^2$

$g \circ h = g[h(x)] = g[x - 2] = 3(x - 2)$

$f \circ (g \circ h) = f[g(h(x))]$

$= f[3(x - 2)] = [3(x - 2)]^2 = 9(x - 2)^2$

$\therefore (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ நிறுவப்பட்டது.

7. A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6} மற்றும் D = {5, 6, 7, 8} எனில், A × C ஆனது B × D உட்கணமா எனச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6}, D = {5, 6, 7, 8}

$A \times C = \{1, 2\} \times \{5, 6\}$

$= \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

$B \times D = \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$

$\therefore$ (A × C) என்பது (B × D) ன் உட்கணமாகும்.

8. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $f(f(x)) = -\frac{1}{x}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$

$$f[f(x)] = f\left[\frac{x-1}{x+1}\right]$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{\frac{x-1-(x+1)}{x+1}}{\frac{x-1+(x+1)}{x+1}}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

நிறுவப்பட்டது.

9. சார்பு f மற்றும் g ஆகியவை $f(x) = 6x + 8$; $g(x) = \frac{x-2}{3}$ எனில்,

(i) $gg\left(\frac{1}{2}\right)$ -யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) gf (x) -ஐ எளிய வடிவில் எழுதுக.

தீர்வு : $f(x) = 6x + 8$, $g(x) = \frac{x-2}{3}$

(i) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1-4}{2\times 3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$\therefore gg\left(\frac{1}{2}\right) = g\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$= g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{-1-4}{2\times 3} = -\frac{5}{6}$

(ii) $gf(x) = g[f(x)] = g[6x + 8]$

$= \frac{6x+8-2}{3} = \frac{6x+6}{3}$

$= \frac{6(x+1)}{3} = 2(x + 1)$

10. பின்வருவற்றின் மதிப்பகங்களை எழுதுக.

(i) $f(x) = \frac{2x+1}{x-9}$ **(ii)** $p(x) = \frac{-5}{4x^2+1}$

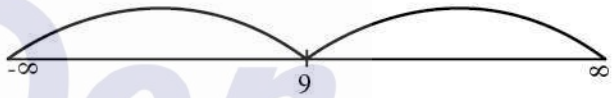
(iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$ **(iv)** $h(x) = x + 6$

தீர்வு :

(i) $f(x) = \frac{2x+1}{x-9}$

$x - 9 = 0$, எனில்

$x = 9$



$\therefore$ மதிப்பகம் என்பதிலிருந்து x ன் மதிப்புகள் சார்பை வரையறுக்கிறது.

அதாவது, $(-\infty, 9) \cup (9, \infty)$

அதாவது, $(x \in \mathbb{R} / x \neq 9) \Rightarrow \mathbb{R} - \{9\}$

(ii) $p(x) = \frac{-5}{4x^2+1}$

'x' ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $x \in \mathbb{R}$

(iii) $g(x) = \sqrt{x-2}$

g (x) என்பது $x \geq 2$ எனும்போது மட்டுமே வரையறுக்கப்படுகிறது.

(iv) $h(x) = x + 6$

h (x) என்பது 'x' -ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $x \in \mathbb{R}$.

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்:

கார்டீசியன் பெருக்கல்

1. A = {1, 2}, B = {0, 1} எனில், A × B என்பது

(1) {(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)}
(2) {(1, 0), (2, 1)}
(3) {(1, 1), (1, 2), (0, 1), (0, 2)}
(4) இவற்றில் ஏதுமில்லை [விடை: (1)]

தீர்வு :

$A = \{1, 2\}, \quad B = \{0, 1\}$

$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$

2. A என்ற கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 'p' மற்றும் B என்ற கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 'q' எனில், A × B – யில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) p + q (2) p + q + 1
(3) pq (4) p^2 [விடை: (3)]

தீர்வு :

A –யில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = p
B –யில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = q
∴ A × B –யின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = pq

3. A, B, C என்பன மூன்று கணங்கள் எனில், $A \times (B \cup C)$ க்குச் சமமானது

(1) $(A \times B) \cup (A \times C)$
(2) $(A \cup B) \cup (A \cup C)$
(3) (1) மற்றும் (2) ஆகிய இரண்டும்
(4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

[விடை: (1)]

4. A = {a, b, c, d}, B = {b, c, d, e} எனில், $n\{(A \times B) \cap (B \times A)\}$ =

(1) 3 (2) 6
(3) 9 (4) இவற்றில் ஏதுமில்லை [விடை: (3)]

தீர்வு :

$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{b, c, d, e\}$

$A \times B = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,d),(b,e),(c,b),(c,c),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(d,d),(d,e)\}$

$B \times A = \{(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)\}$

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

$n\{(A \times B) \cap (B \times A)\} = 9$

உறவுகள்

5. A என்பது 8 -க்குக் குறைவாக உள்ள இரட்டை எண்களைக் கொண்ட கணம் மற்றும் B என்பது 7 –க்குக் குறைவாக உள்ள பகா எண்களின் கணம் எனில், A யிலிருந்து B –க்கு உள்ள உறவுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 2^9 (2) 9^2
(3) 3^2 (4) 2^{9-1} [விடை: (1)]

தீர்வு :

$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$
$B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3$
$\therefore \quad n(A \times B) = 3 \times 3 = 9$
A - யிலிருந்து B க்கு உள்ள உறவுகளின் எண்ணிக்கை = 2^9

6. ℕ என்பது அனைத்து இயல் எண்களின் கணம் மற்றும் ℕ –ல் வரையறுக்கப்பட்ட உறவு R என்பது $R = \{(x, y) / x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x + 3y = 15\}$ என்க. R என்ற வரிசைச் சோடிகளின் கணம் என்பது

(1) {(3, 4), (5, 3), (9, 2), (13, 2)}
(2) {(3, 5), (2, 7), (9, 2), (12, 1)}
(3) {(3, 4), (6, 3), (9, 2), (12, 1)}
(4) {(4, 5), (7, 3), (4, 5), (4, 2)} [விடை: (3)]

தீர்வு :

$R = \{(x, y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x + 3y = 15\}$
$x + 3y = 15$
$x = 3, \ y = 4$ எனும்போது, $3 + 3(4) = 15$
$x = 6, \ y = 3$ எனும்போது, $6 + 3(3) = 15$
$x = 9, \ y = 2$ எனும்போது, $9 + 3(2) = 15$
$x = 12, \ y = 1$ எனும்போது, $12 + 3(1) = 15$
$\therefore \quad R = \{(3, 4), (6, 3), (9, 2), (12, 1)\}$

7. R என்பது {2, 3, 4, 5} லிருந்து {3, 6, 7, 10} க்கு வரையறுக்கப்பட்ட உறவு மேலும் $x \, R \, y \Leftrightarrow x$ என்பது y –யுடன் ஒப்பிடும்போது முதன்மையானது எனில் R ன் மதிப்பகம் என்பது

(1) {2, 3, 5} (2) {3, 5}
(3) {2, 3, 4} (4) {2, 3, 4, 5} [விடை: (4)]

தீர்வு :

x –ன்பது y –யுடன் ஒப்பிடும்போது முதன்மையானதால், மதிப்பகம் = {2, 3, 4, 5}

8. R என்பது A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்திற்கான உறவு எனில்

(1) $R = A \cup B$ (2) $A \cap B$

(3) $R \subseteq A \times B$ (4) $R \subseteq B \times A$ [விடை: (3)]

தீர்வு :

உறவு என்பது கார்டீசியன் பெருக்கலின் உட்கணமாகும்.

சார்புகள்

9. $f(x) = 2x^2 + bx + c$ மற்றும் $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ எனில், $f(1)$ என்பது

(1) -2 (2) 0

(3) 1 (4) 2 [விடை: (2)]

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^2 + bx + c$$

$$f(0) = 3$$

$$\Rightarrow 2(0) + b(0) + c = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$f(2) = 1$$

$$\Rightarrow 2(2)^2 + b(2) + c = 1 \Rightarrow 2b + c = -7$$

$$2b + 3 = -7$$

$$b = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f(1) = 2(1)^2 - 5(1) + 3$$

$$= 2 - 5 + 3 = 0$$

10. $A = \{x, y, z\}$ மற்றும் $B = \{a, b, c, d\}$ என்க. கீழ்க்காண்பனவற்றில் எது A -யிலிருந்து B -க்கான உறவும் அல்ல சார்பும் அல்ல?

(1) $\{(x, a), (x, c)\}$ (2) $\{(y, c), (y, d)\}$

(3) $\{(z, a), (z, d)\}$ (4) $\{(z, b), (y, b), (a, d)\}$

[விடை: (4)]

தீர்வு :

$A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

$\{(z, b), (y, b), (a, d)\}$ என்பது A -யிலிருந்து B -க்கான சார்பு அல்ல. [$\because a \notin A$ என்பதால்]

11. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$ ன் மதிப்பகம் என்பது

(1) $\mathbb{R} - \{3, -2\}$ (2) $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$

(3) $\mathbb{R} - \{3, 2\}$ (4) $\mathbb{R} - \{-3, -2\}$

[விடை: (1)]

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6} = \frac{x^2+2x+1}{(x-3)(x+2)}$$

$x = 3$ அல்லது $x = -2$ எனும்போது $f(x)$ என்பது முடிவிலியாகிறது.

எனவே மதிப்பகம் $= \mathbb{R} - \{3, -2\}$

12. கீழ்க்காண்பனவற்றில் எது சார்பாகும்?

(1) $\{(x, y) : y^2 = x,\ x, y \in \mathbb{R}\}$

(2) $\{(x, y) : y = |x|,\ x, y \in \mathbb{R}\}$

(3) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$

(4) $\{(x, y) : x^2 - y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ [விடை: (2)]

13. $x \neq 1$ மற்றும் $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ என்பது ஒரு மெய் மதிப்புச் சார்பு எனில், $f(f(f(2)))$ ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 4 [விடை: (3)]

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(2) = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$f[f(2)] = f(3) = \frac{3+1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f[f(f(2))] = f(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

14. $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $(x \neq 0)$ எனில் $f(2) = ?$

(1) $\frac{-7}{4}$ (2) $\frac{5}{2}$

(3) -1 (4) இவற்றில் ஏதுமில்லை

[விடை: (1)]

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது: $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

$x = 2$ எனில்,

$$2f(2) - 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \quad \ldots (1)$$

$x = \frac{1}{2}$ எனில்,

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(2) = \frac{1}{4} \quad \ldots (2)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} + 3f(2)}{2}$$

$$= \frac{1 + 12f(2)}{8}$$

(1) –ல் பதிலிடக் கிடைப்பது

$$f(2) = \frac{-7}{4}$$

சார்புகளின் சேர்ப்பு

15. $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ எனில், f (x) என்பது

(1) $x^2 - 2$ (2) $x^2 - 1$

(3) $f\left(-\frac{a}{a+1}\right)$ (4) f (a) [விடை: (1)]

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது :

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2+\frac{1}{x^2}$$

இப்போது, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2x.\frac{1}{x}$

$$= x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

இதிலிருந்து '2' ஐக் கழிக்க $x^2+\frac{1}{x^2}$

$\therefore$ $f(x) = x^2 - 2$

16. $f(x) = x - 2$ மற்றும், $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ எனில், $(g \circ f)$ (x) =

(1) $\sqrt{x^2+1}-2$ (2) $\sqrt{x^2+4x+5}$

(3) $x^2 - 1$ (4) $x^2 - 4x + 5$ [விடை: (2)]

தீர்வு :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x-2]$$

$$= \sqrt{(x-2)^2+1}$$

$$= \sqrt{x^2-4x+4+1}$$

$$= \sqrt{x^2-4x+5}$$

17. கொடுக்கப்பட்டது $f(2) = 3$, $g(3) = 2$ மற்றும் $g(2) = 5$ எனில், $(f \circ g)(3)$ =

(1) 2 (2) 3

(3) 4 (4) 5 [விடை: (2)]

தீர்வு :

$$(f \circ g)(3) = f[g(3)]$$

$$= f[2] = 3$$

18. கொடுக்கப்பட்டது $f = \{(-2, 1), (0, 3), (4, 5)\}$, $g = \{(1, 1), (3, 3), (4, 5)\}$ எனில், $g \circ f$ -ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் என்பன

(1) D = {3, 0}, R = {– 2, 1}

(2) D = {3, – 2}, R = {1, 5}

(3) D = {– 2, 0}, R = {1, 3}

(4) D = {– 2, 1}, R = {0, 3} [விடை: (3)]

தீர்வு :

$(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g(1) = 1$

$(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(3) = 3$

$(g \circ f)(4) = g[f(4)]$

$= g(5)$ = வரையறுக்கப்படாதது

$\therefore$ $g \circ f = \{(-2, 1), (0, 3)\}$

மதிப்பகம் = {– 2, 0},

வீச்சகம் = {1, 3}

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ எனில், 'x' மற்றும் 'y'ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$\frac{x}{3}+1 = \frac{5}{3}$, $y-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{x}{3} = \frac{5}{3}-1$, $y = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

$\frac{x}{3} = \frac{5-3}{3}$, $y = \frac{3}{3}$

$\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$, $y = 1$

$x = 2$

2. கணம் 'A'யின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 3 மற்றும் கணம் B = {3, 4, 5} எனில், (A × B) யிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு :

'A' யில் மூன்று உறுப்புகளும், 'B' யில் மூன்று உறுப்புகளும் உள்ளதால் 'A × B' என்பது 9 உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கும்.

3. G = {7, 8} மற்றும் H = {5, 4, 2} எனில், G × H மற்றும் H × G யைக் காண்க.

தீர்வு :

$G \times H = \{7, 8\} \times \{5, 4, 2\}$

$= \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$

$H \times G = \{5, 4, 2\} \times \{7, 8\}$

$= \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$

4. A = {– 1, 1} எனில், A × A × A ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$A \times A = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$

$= \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$

$A \times A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\} \times \{-1, 1\}$

$= \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$

5. $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ எனில், 'A' மற்றும் 'B' –யைக் காண்க.

தீர்வு :

A = முதல் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் = {a, b}

B = இரண்டாவது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் = {x, y}

6. A = {3, 5} மற்றும் B = {7, 11} என்க. மேலும் R = {(a, b); a∈A, b∈B, a – b என்பது ஒற்றை எண்} எனில், R என்பது A யிலிருந்து B க்கான வெற்றுச் சார்பு அல்லது இன்மைச் சார்பு எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

a∈A மற்றும் b∈B என்பதால்

a – b = (3 – 7), (3 – 11), (5 – 7), (5 – 11)

= – 4, – 8, – 2, – 6.

இதில் ஏதும் ஒற்றை எண் இல்லை.

எனவே, R என்பது வெற்றுச் சார்பு ஆகும்.

7. R என்பது 'n' உறுப்புகளைக் கொண்ட A என்ற முடிவுறு கணத்திலுள்ள உறவு எனில், மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு :

A என்ற கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 'n'.

∴ A×A ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = $n \times n = n^2$

$A \times A$ ன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை = 2^{n^2}

$A \times A$ ன் ஒவ்வொரு உட்கணமும் A -ன் ஓர் உறவு என்பதால், மொத்த உறவுகளின் எண்ணிக்கை 2^{n^2}.

8. கணம் A = {ஜனவரி, பிப்ரவரி, ஏப்ரல், ஜூன், செப்டம்பர், அக்டோபர், நவம்பர், டிசம்பர்} மற்றும் B = {28, 29, 30, 31} என்க. மேலும் A யிலிருந்து B க்கான உறவு R என்பது R = {(a, b)∈A × B : 'a' மாதத்தின் நாட்கள் 'b'} என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், 'ஆசிரியர் தினம்' என்பதன் தொடர்புடைய உறவு R -ன் உட்கணத்தை எழுதுக.

தீர்வு :

R = {(a, b)∈A × B, 'a' மாதத்தின் நாட்கள் 'b'}

∴ R = {(ஜனவரி, 31), (பிப்ரவரி, 28), (பிப்ரவரி, 29), (ஏப்ரல், 30), (ஜூன், 30), (செப்டம்பர், 30), (அக்டோபர், 31), (நவம்பர், 30), (டிசம்பர், 31)}

∴ 'ஆசிரியர் தினம்' என்பதன் தொடர்புடைய R என்ற உறவின் உட்கணம் என்பது {(செப்டம்பர், 30)}

9. f(x) = 2x – 5 எனுமாறு 'f' என்ற சார்பு வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், f (0), f (7) மற்றும் f (– 3) ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

f (x) = 2x – 5

f (0) = 2 (0) – 5 = – 5

f (7) = 2 (7) – 5 = 14 – 5 = 9

f (– 3) = 2 (– 3) – 5 = – 6 – 5 = – 11

10. A = {1, 2, 3} மற்றும் B = {a, b, c} எனில்

i) {(1, a), (2, b), (2, c), (3, c)} மற்றும்

ii) {(2, b), (3, b)} என்பவை A → B க்கான சார்பைக் குறிக்குமா?

தீர்வு :

(i) (2, b), (2, c) என்ற வரிசைச் சோடிகள் ஒரே மாதிரியான முதல் உறுப்பைக் கொண்டுள்ளன. எனவே, (1, a), (2, b), (2, c), (3, c) என்பது A → B -க்கான சார்பைக் குறிக்காது.

(ii) A யிலுள்ள உறுப்பு 1 ஆனது B யிலுள்ள எந்தவொரு உறுப்புடனும் தொடர்புபடுத்தப் படவில்லை. அதாவது 1 என்பது வரிசைச் சோடிகளில் முதல் உறுப்பாக இல்லை. எனவே, {(2, b), (3, b)} என்பது A → B க்கான சார்பைக் குறிக்கவில்லை.

11. A = {1, 2, 3} மற்றும் B = {4, 5} என்க. f = {(1, 4),(1, 5), (2, 4), (3, 5)} என்க. 'f' என்பது A யிலிருந்து B க்கான சார்பாகுமா எனக் காண்க?

தீர்வு :

(1, 4) மற்றும் (1, 5) என்ற வரிசைச் சோடிகளில் முதல் உறுப்புகள் ஒன்றாக உள்ளன.

எனவே, f = {(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 5)} என்பது A யிலிருந்து B க்கான சார்பு அல்ல.

12. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ என்பதன் மதிப்பகம் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{(x-3)(x-2)}$$

x = 2 அல்லது 3, எனும்போது, f(x) என்பது முடிவிலியாகிறது.

∴ f ன் மதிப்பகம் = $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

13. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ என்பது $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 4x + 1, & x > 0 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், f(– 3), f(0) மற்றும் f(5) காண்க.

தீர்வு :

f(– 3) = 3(– 3) – 2 = – 11, – 3 < 0 என்பதால்

f(0) = 1, x = 0 என்பதால்

f(5) = 4(5) + 1 = 20 + 1 = 21, z > 0 என்பதால்

14. $f : \mathbb{R} \to A$ என்ற சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண் எனில்} \\ -1, & x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

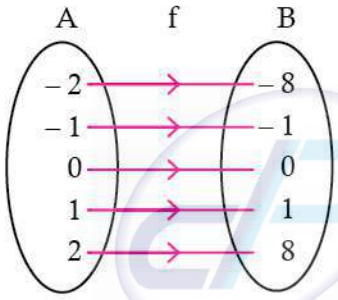
என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில்,

$f\left(\frac{1}{3}\right)$ மற்றும் $f(\sqrt{5})$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$\frac{1}{3}$ என்பது விகிதமுறு எண் என்பதால், $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ மற்றும் $\sqrt{5}$ விகிதமுறா எண் என்பதால், $f(\sqrt{5}) = -1$.

15. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அம்புக்குறி படத்தைக் கருதுக.



(i) இது ஒரு சார்பா? சார்பு எனில், சமன்பாட்டு வடிவத்தை எழுதுக.

(ii) சார்பின் உறுப்புகளை பட்டியலிடுக.

தீர்வு :

ஆம், இது ஒரு சார்பாகும். மேலும் $f(x) = x^3$

f -ன் உறுப்புகள் = $\{(-2,-8),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,8)\}$

16. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ எனில், $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$= -\frac{(x-1)}{x+1} = -f(x)$$

நிறுவப்பட்டது.

17. கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x + 5$ $f[g(x)]$ மற்றும் $g[f(x)]$ காண்க.

தீர்வு :

$f[g(x)] = f[x + 5] = 3(x + 5) + 2$
$= 3x + 15 + 2 = 3x + 17$

$g[f(x)] = g[3x + 2] = 3x + 2 + 5 = 3x + 7$

18. $f(x) = 2x - 1$ எனில், $f \circ f$ காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = 2x - 1$
$f \circ f = f[f(x)]$
$= f(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1$
$= 4x - 2 - 1 = 4x - 3$

19. கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = x^2 + 6$ மற்றும் $g(x) = 2x + 1$, $(g \circ f)(2)$ காண்க.

தீர்வு :

$g \circ f = g[f(x)]$
$= g[x^2 + 6]$
$= 2(x^2 + 6) + 1$
$= 2x^2 + 12 + 1 = 2x^2 + 13$

இப்போது, $(g \circ f)(2) = 2(2)^2 + 13$
$= 2(4) + 13 = 8 + 13 = 21$

20. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ மற்றும் $C = \{4, 5, 6\}$ எனில், $(A \times B) \cup (A \times C)$ காண்க.

தீர்வு :

$A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{3, 4\}$
$= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$
$A \times C = \{1, 2, 3\} \times \{4, 5, 6\}$
$= \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$
$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

21. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{2, 5\}$ எனில், $(A - B) \times (B - C)$ காண்க.

தீர்வு :

$A - B = \{1, 2, 4\} - \{2, 4, 5\}$
$= \{1\}$
$B - C = \{2, 4, 5\} - \{2, 5\}$
$= \{4\}$
$\therefore (A - B) \times (B - C) = \{1\} \times \{4\}$
$= \{(1, 4)\}$

22. $R_1 = \{(x, y) / y = 2x + 7$, இதில் $x \in \mathbb{R}$ மற்றும் $-5 \le y \le 5\}$ என்பது ஒரு உறவு எனில், R_1 ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$R_1 = \{(x, y) / y = 2x + 7, x \in \mathbb{R}, -5 \le y \le 5\}$
$x = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
$y = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

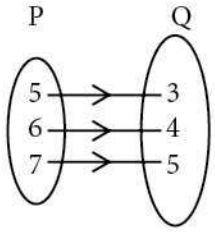
$x = -6$ எனும்போது, $y = -5$
$x = -5$ எனும்போது, $y = -3$
$x = -4$ எனும்போது, $y = -1$
$x = -3$ எனும்போது, $y = 1$
$x = -2$ எனும்போது, $y = 3$
$x = -1$ எனும்போது, $y = 5$
$\therefore R = \{(-6, -5), (-5, -3), (-4, -1), (-3, 1), (-2, 3), (-1, 5)\}$
மதிப்பகம் $= \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
வீச்சகம் $= \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$

23. $\mathbb{N}$ -ல் வரையறுக்கப்பட்ட R என்ற உறவானது $R = \{(1 + x, 1 + x^2) / x \leq \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}\}$ எனில்
(i) R (ii) R ன் மதிப்பகம்
(iii) R ன் வீச்சகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$R = \{(1 + x, 1 + x^2) / x \in \mathbb{N}\}$
$x \leq 4$ என்பதால் $x \in \mathbb{N}$, x ன் மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4
$\therefore R = \{(2, 2), (3, 5), (4, 10), (5, 17)\}$
R ன் மதிப்பகம் $= \{2, 3, 4, 5\}$
R ன் வீச்சகம் $= \{2, 5, 10, 17\}$

24. கீழ்க்காணும் படமானது P மற்றும் Q ஆகிய கணங்களுக்கான உறவைக் குறிக்கிறது. இந்த உறவை
(i) கண கட்டமைப்பு முறை
(ii) பட்டியல் முறைகளில் எழுதுக.
(iii) உறவின் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.



தீர்வு :

(i) கண கட்டமைப்பு வடிவம்
$R = \{(x, y) / y = x - 2, x = 5, 6, 7$ க்கு$\}$
(ii) பட்டியல் வடிவம் $R = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$
(iii) R ன் மதிப்பகம் $= \{5, 6, 7\}$
R ன் வீச்சகம் $= \{3, 4, 5\}$

25. கீழ்க்காணும் சார்புகளின் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(அ) $f(x) = x^2 + 2$ (ஆ) $f(t) = \frac{1}{t+2}$

தீர்வு :

(அ) $f(x) = x^2 + 2$ என்பது 'x' ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் வரையறுக்கப்பட்டது. எனவே, $f(x)$ ன் மதிப்பகம் என்பது "x" ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளாகும்.

'x^2' என்பது மிகை மதிப்பாதலால், $x^2 + 2$ என்பது எப்போதும் 2 விடக் குறைவாக இருக்காது.
$\therefore f(x)$ ன் வீச்சகம் என்பது "$f(x) \geq 2$ எனுமாறு எல்லா மெய்யெண்கள்".

(ஆ) $f(t) = \frac{1}{t+2}$

$t = -2$ எனும்போது சார்பு வரையறுக்கப் படவில்லை.
எனவே, $f(t)$ ன் மதிப்பகம் என்பது " -2 ஐத் தவிர எல்லா மெய்யெண்களும்"
வீச்சகம்: "பூச்சியத்தைத் தவிர அனைத்து மெய்யெண்களும்".

26. $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ என்ற சார்பு Z லிருந்து Z க்கு $f(x) = ax + b$, a, b என்ற முழு எண்களுக்கு வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், a, b ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = ax + b$
$x = 1$ க்கு, $f(x) = 1$
$\therefore a(1) + b = 1 \Rightarrow a + b = 1$ ... (1)
$x = 2$ க்கு, $f(x) = 3$
$\therefore a(2) + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 3$ ... (2)

(1), (2) ஐத் தீர்க்க
கிடைப்பது, $a = 2, b = -1$
$\therefore f(x) = 2x - 1$
மேலும் $x = 0$ க்கு, $f(0) = -1$ மற்றும்
$x = -1$ எனும் போது, $f(-1) = -3$.

27. $f(x) = \frac{4-x}{x-4}$ என வரையறுக்கப்பட்ட 'f' என்ற மெய்மதிப்புச் சார்புக்கு மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$x = 4$ எனும்போது, $f(x)$ என்பது வரையறுக்கப்படவில்லை, ஏனெனில் $f(4) = \frac{0}{0}$
எனவே, மதிப்பகம் என்பது $x = 4$ ஐத் தவிர எல்லா மெய்யெண்களும் கொண்டது. அதாவது $\mathbb{R} - \{4\}$.

மற்றும் $f(x) = \frac{4-x}{x-4} = -\frac{(x-4)}{x-4} = -1, x \neq 4$

$\therefore f(x)$ ன் வீச்சகம் $= -1$.
மதிப்பகம் $= \mathbb{R} - \{4\}$,
வீச்சகம் $= \{-1\}$

28. கொடுக்கப்பட்ட சார்பை வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக எழுதுக. மேலும் வீச்சகத்தைக் காண்க. $f: X \to \mathbb{R}, f(x) = x^3+1$, இங்கு $X = \{-1, 0, 3, 9, 7\}$.

தீர்வு :

$f: X \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$ இங்கு $X = \{-1, 0, 3, 9, 7\}$

$f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$

$f(0) = (0)^3 + 1 = 0 + 1 = 1$

$f(3) = (3)^3 + 1 = 27 + 1 = 28$

$f(9) = (9)^3 + 1 = 729 + 1 = 730$

$f(7) = (7)^3 + 1 = 343 + 1 = 344$

$\therefore f = \{(-1, 0), (0, 1), (3, 28), (9, 730), (7, 344)\}$

மற்றும் f ன் வீச்சகம் $= \{0, 1, 28, 730, 344\}$

29. $A = \{-1, 0, 2, 5, 1\}$ மற்றும் $f: A \to \mathbb{Z}$ என்பது $f(x) = x^2 - x - 2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், 'f'ன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது:

$A = \{-1, 0, 2, 5, 1\}$

$f(x) = x^2 - x - 2$

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$

$f(0) = (0)^2 - 0 - 2 = -2$

$f(2) = (2)^2 - 2 - 2 = 0$

$f(5) = (5)^2 - 5 - 2 = 18$

$f(1) = (1)^2 - 1 - 2 = -2$

$\therefore$ f ன் வீச்சகம் $= \{-2, 0, 18\}$

30. $f(x) = x^2$ எனில், $\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}$ காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = x^2$

$f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$\therefore \frac{f(1.1)-f(1)}{(1.1-1)} = \frac{1.21-1}{1.1-1}$

$= \frac{0.21}{0.1} \times \frac{100}{100} = \frac{21}{10} = 2.1$

31. கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 4x + 2$ எனில், $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ என்பதை மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

$f(x) = 4x + 2$

$f(a + h) = 4(a + h) + 2$

$= 4a + 4h + 2$

$f(a) = 4a + 2$

$\therefore \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{4a+4h+2-4a-2}{h}$

$= \frac{4h}{h} = 4$

32. கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 3x + 7$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = 2x - 3$ எனில், $f(2) + h(1)$ மற்றும் $f(0) + g(0) - h(0)$ ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

$f(2) + h(1) = 3(2) + 7 + 2(1) - 3$

$= 6 + 7 + 2 - 3 = 12$

$f(0) + g(0) - h(0) = 3(0) + 7 + 0 + 1 - (2(0) - 3)$

$= 0 + 7 + 0 + 1 - 0 + 3 = 11$

33. $f(x) = 2x^4 + x^2 + 1$ மற்றும் $g(x) = \sqrt{x}$ எனில், $f \circ g$ காண்க.

தீர்வு :

$f \circ g = f[g(x)] = f[\sqrt{x}]$

$= 2(\sqrt{x})^4 + (\sqrt{x})^2 + 1$

$= 2x^2 + x + 1$

34. $g(x) = \sqrt[3]{x-4}$ மற்றும் $h(x) = x^3 + 4$ எனில், $(h \circ g)(-15)$ காண்க.

தீர்வு :

$h \circ g = h[g(x)]$

$= h[\sqrt[3]{x-4}]$

$= (\sqrt[3]{x-4})^3 + 4$

$= (x-4)^{3 \times \frac{1}{3}} + 4$

$= x - 4 + 4 = x$

$\therefore (h \circ g)(-15) = -15$

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $f(x) = x^2 - 2$ மற்றும் $g(x) = 2x - 3$ எனில், (i) $f(-3)$ (ii) $g(5)$ (iii) $f(a + 1)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

தீர்வு :

(i) $f(-3)$

$f(x) = x^2 - 2$

$f(-3) = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

(ii) $g(5)$

$g(x) = 2x - 3$

$g(5) = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$

(iii) $f(a + 1)$

$f(x) = x^2 - 2$

$f(a + 1) = (a + 1)^2 - 2$

$= a^2 + 2a + 1 - 2 = a^2 + 2a - 1$

2. $f(x) = -2x + 9$ மற்றும் $g(x) = -4x^2 + 5x - 3$ எனில், $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ காண்க.

தீர்வு :

$$f \circ g = f[g(x)]$$
$$= f[-4x^2 + 5x - 3]$$
$$= -2(-4x^2 + 5x - 3] + 9$$
$$= 8x^2 - 10x + 15$$
$$g \circ f = g[f(x)]$$
$$= g[-2x + 9]$$
$$= -4(-2x + 9)^2 + 5(-2x + 9) - 3$$
$$= -4(4x^2 - 36x + 81) - 10x + 45 - 3$$
$$= -16x^2 + 144x - 324 - 10x + 42$$
$$= -16x^2 + 134x - 282$$

3. $A = \{x / x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x / x^2 - x - 6 = 0\}$, $C = \{x / x^3 - 4x = 0\}$ எனில், (i) $A \times B$ (ii) $A \times C$ (iii) $(A - B) \times C$ காண்க.

தீர்வு :

$A = \{x / x^2 - 4x + 3 = 0\}$
$= \{x / (x - 3)(x - 1) = 0\}$
$= \{x / x = 1, 3\}$
$B = \{x / x^2 - x - 6 = 0\}$
$= \{x / (x + 2)(x - 3) = 0\}$
$= \{x / x = -2, 3\}$
$C = \{x / x^3 - 4x = 0\}$
$= \{x / x(x^2 - 4) = 0\}$
$= \{x / x = 0, -2, 2\}$
$A = \{1, 3\}$, $B = \{-2, 3\}$, $C = \{-2, 0, 2\}$

(i) $A \times B = \{1, 3\} \times \{-2, 3\}$
$= \{(1, -2), (1, 3), (3, -2), (3, 3)\}$

(ii) $A \times C = \{1, 3\} \times \{-2, 0, 2\}$
$= \{(1, -2), (1, 0), (1, 2), (3, -2), (3, 0), (3, 2)\}$

(iii) $A - B = \{1, 3\} - \{-2, 3\} = \{1\}$
$(A - B) \times C = \{1\} \times \{-2, 0, 2\}$
$= \{(1, -2), (1, 0), (1, 2)\}$.

4. A மற்றும் B என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள் மற்றும் $A = B$ எனில், $A \times B = B \times A$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$A \times B = B \times A$ மற்றும் $x \in A$ என்க.

$x \in A \Rightarrow (x, b) \in A \times B \; \forall \; b \in B$

$\Rightarrow (x, b) \in (B \times A)$

$\because A \times B = B \times A$

$\Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow A \subseteq B$ .....(1)

கார்டீசியன் பெருக்கலின் வரையறையின்படி மற்றும் y என்பது B ன் உறுப்பு என்க.

$y \in B \Rightarrow (a, y) \in A \times B \; \forall \; a \in A$

$\Rightarrow (a, y) \in (B \times A)$ $\because A \times B = B \times A$

கார்டீசியன் பெருக்கலின் வரையறையின்படி

$\Rightarrow y \in A$

$B \subseteq A$ .....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$A = B$

மாறாக $A = B$, பிறகு

$A \times B = A \times A$ மற்றும் $B \times A = A \times A$

$\therefore A \times B = B \times A$

எனவே, $A = B$ எனும் போது,

$A \times B = B \times A$.

5. $A = \{2, 3, 4, 5\}$ மற்றும் $B = \{8, 9, 10, 11\}$ என்க. A யிலிருந்து B க்கான உறவு R என்பது 'காரணி' எனில்

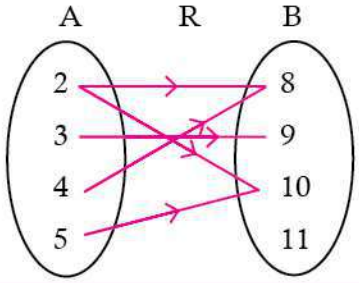
(i) R -ஐப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக. மேலும் R-ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(ii) உறவைக் குறிப்பதற்கான அம்புக்குறி படத்தை வரைக.

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்டது: R என்ற உறவில் உள்ள உறுப்புகள் (a, b) இதில் 'a' என்பது 'b'ன் காரணி.
எனவே, R என்ற உறவு பட்டியல் முறையில்
$R = \{(2, 8), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 10)\}$ ஆகும்.
R ன் மதிப்பகம் $= \{2, 3, 4, 5\}$
R ன் வீச்சகம் $= \{8, 10, 9\}$

(ii) 'R' ஐக் குறிக்கும் அம்புக்குறிபடம்



6. கொடுக்கப்பட்டது: $f(x) = 3x + 7$, $g(x) = -x + 8$, $h(x) = x^2 + 3x - 1$ எனில், சார்புகளின் சேர்ப்பு, சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்யும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$f \circ g = f[g(x)]$
$= f[-x + 8]$

$= 3(-x+8)+7$

$= -3x+24+7 = -3x+31$

$(f\circ g)\circ h = (f\circ g)[h(x)]$

$= (f\circ g)[x^2+3x-1]$

$= -3(x^2+3x-1)+31$

$= -3x^2-9x+3+31$

$= -3x^2-9x+34$ ... (1)

$g\circ h = g[h(x)]$

$= g[x^2+3x-1]$

$= -(x^2+3x-1)+8$

$= -x^2-3x+1+8 = -x^2-3x+9$

$f\circ(g\circ h) = f[g(h(x))] = f[g(x^2+3x-1)]$

$= f[-x^2-3x+9]$

$= 3(-x^2-3x+9)+7$

$= -3x^2-9x+27+7$

$= -3x^2-9x+34$ ... (2)

(1), (2) லிருந்து

$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

∴ சார்புகளின் சேர்ப்பு, சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்கிறது.

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. கொடுக்கப்பட்ட வரிசைச்சோடிகளில் (4, 6), (8, 4), (3, 3), (9, 11), (6, 3), (3, 0), (2, 3) கீழ்க்காணும் உறவுகளைக் காண்க. மேலும் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(i) 2 ஐ விடக் குறைவாக

(ii) குறைவாக

(iii) அதிகமாக

(iv) சமமாக

தீர்வு :

(i) R_1 என்பது வரிசைச் சோடிகளில் முதல் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பை விட 2 குறைவாக இருக்குமாறு உள்ள கணமாகும்.

∴ $R_1 = \{(4,6),(9,11)\}$

R_1ன் மதிப்பகம் = முதல் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம்

$= \{4, 9\}$

R_1ன் வீச்சகம் = இரண்டாம் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம்

$= \{6, 11\}$

(ii) R_2 என்பது வரிசைச் சோடிகளில் முதல் உறுப்பு இரண்டாவது உறுப்பை விடக் குறைவாக இருக்குமாறு உள்ள கணமாகும்.

∴ $R_2 = \{(4,6),(9,11),(2,3)\}$

R_2ன் மதிப்பகம் = $\{4, 9, 2\}$

R_2ன் வீச்சகம் = $\{6, 11, 3\}$

(iii) R_3 வரிசைச் சோடிகளில் முதல் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பை விடக் கூடுதலாக இருக்குமாறு உள்ள கணமாகும்.

∴ $R_3 = \{(8,4),(6,3),(3,0)\}$

R_3ன் மதிப்பகம் = $\{8, 6, 3\}$

R_3ன் வீச்சகம் = $\{4, 3, 0\}$

(iv) R_4 என்பது வரிசைச் சோடிகளில் முதல் உறுப்பும் இரண்டாம் உறுப்பும் சமமாக இருக்குமாறு உள்ள கணமாகும்.

∴ $R_4 = \{(3,3)\}$

R_4ன் மதிப்பகம் = $\{3\}$ மற்றும் R_4ன் வீச்சகம் = $\{3\}$.

2. 'f' மற்றும் 'g' என்பன இரு மெய்மதிப்புச் சார்புகள், மேலும் $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2+1$ எனில், (i) $f+g$ (ii) $f-g$ (iii) fg (iv) $\frac{f}{g}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$= 2x+1+x^2+1$

$= x^2+2x+2$

(ii) $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$= (2x+1)-(x^2+1)$

$= 2x+1-x^2-1 = 2x-x^2$

$= -x^2+2x$

(iii) $(fg)(x) = [f(x)][g(x)]$

$= (2x+1)(x^2+1)$

$= 2x^3+x^2+2x+1$

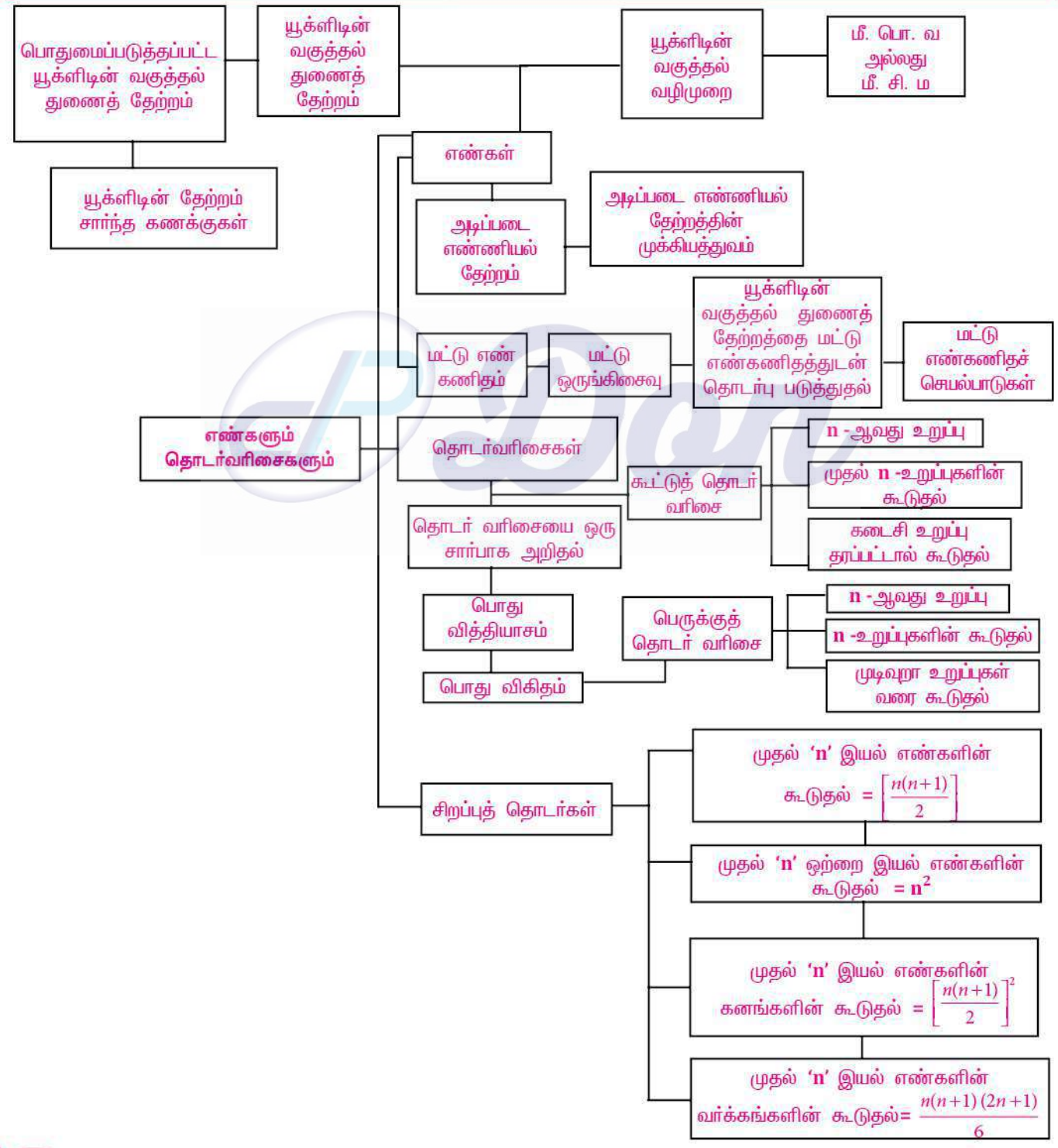
(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, என்பதால் $g(x)\neq 0$

$= \frac{2x+1}{x^2+1}$

அலகு 2

எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்

மன வரைபடம்



யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்

நினைவில் கொள்க

தேற்றம் 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்.

a மற்றும் b (a > b) என்பன ஏதேனும் இரு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r, 0 \leq r < b$ என்றவாறு q, r எனும் தனித்த மிகை முழுக்கள் கிடைக்கும்.

தேற்றம் 2:

a மற்றும் b என்பன $a = bq + r$ என அமையும் மிகை முழுக்கள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் அனைத்துப் பொது வகுத்திகளும் முறையே b மற்றும் r ஆகியவற்றின் பொது வகுத்திகளுக்குச் சமமாக இருக்கும். மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை.

பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றம்.

a மற்றும் b (a > b) என்பன ஏதேனும் இரு முழுக்கள் எனில், $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$ என்றவாறு q, r எனும் முழுக்கள் கிடைக்கும்.

வழிமுறை (Algorithm)

வழிமுறை என்பது நமக்குத் தேவையான முடிவினைப் பெறும் வரையில் ஒரு படிநிலையில் பெறும் முடிவுகளை அதற்கு அடுத்த படிநிலையில் பயன்படுத்தும் வகையில் நன்கு வரையறை செய்யப்பட்ட தொடர்ச்சியான படிநிலை ஆகும்.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை (மீ.பொ.வ) எளிய முறையில் காணலாம்.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை (Euclid's Division Algorithm)

a மற்றும் b, a > b என்ற இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் காண:

படி 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி $a = bq + r; 0 \leq r < b$. இங்கு q என்பது ஈவு, r என்பது மீதி. $r = 0$ எனில் a மற்றும் b யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி b ஆகும்.

படி 2 : அவ்வாறில்லையெனில், யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி b ஐ r -ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது $b = rq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < r$.

படி 3 : $r_1 = 0$ எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி r ஆகும்.

படி 4 : அவ்வாறில்லையெனில் மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பூச்சியம் மீதியாக வரும் நிலையில் அமையும் வகுத்தியானது a மற்றும் b யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

தேற்றம் 3:

a மற்றும் b என்பன இரு மிகை முழுக்கள் மற்றும் a > b எனில், (a, b) – யின் மீ.பொ.வ = (a – b, b). -யின் மீ.பொ.வ

மூன்று எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி:

a, b, c என்பன கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் என்க.

(i) a, b - யின் மீ.பொ.வ காண்க. அதை d எனக் கொள்க, d = (a, b)

(ii) d மற்றும் c - யின் மீ.பொ.வ காண்க.

இந்த மீப்பெரு பொது வகுத்தியே கொடுக்கப்பட்ட மூன்று மிகை முழுக்கள் a, b, c -யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

2.1 நம்மிடம் 34 கேக் துண்டுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 5 கேக்குகள் மட்டுமே வைக்க இயலுமெனில் கேக்குகளை வைக்க எத்தனை பெட்டிகள் தேவை மற்றும் எத்தனை கேக்குகள் மீதமிருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

30 கேக்குகளை வைக்க 6 பெட்டிகள் தேவைப்படுகின்றன. அதில் 4 கேக்குகள் மீதமிருக்கும். கேக்குகளைப் பெட்டிகளில் வைக்கும் இம்முறையைப் பின்வருமாறு புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

34	=	5	×	6	+	4
மொத்தக் கேக்குகளின் எண்ணிக்கை	=	ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் உள்ள கேக்குகளின் எண்ணிக்கை	×	பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	+	மீதமுள்ள கேக்குகளின் எண்ணிக்கை
↓		↓		↓		↓
(வகுபடும் எண்) a	=	(வகுக்கும் எண்) b	×	(ஈவு) q	+	(மீதி) r

2.2 பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் a -யை b -ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

(i) a = – 12, b = 5

(ii) a = 17, b = – 3

(iii) a = – 19, b = – 4.

தீர்வு :

(i) a = – 12, b = 5

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$, இங்கு $0 \le r < |b|$

$-12 = 5 \times (-3) + 3, \ 0 \le r < |5|$

எனவே, ஈவு q = –3, மீதி r = 3

(ii) a = 17, b = – 3

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$, இங்கு $0 \le r < |b|$

$17 = (-3) \times (-5) + 2, \ 0 \le r < |-3|$

எனவே, ஈவு q = – 5, மீதி r = 2

(iii) a = – 19, b = – 4

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$, இங்கு $0 \le r < |b|$

$-19 = (-4) \times (5) + 1, \ 0 \le r < |-4|$

எனவே, ஈவு q = 5. மீதி r = 1

2.3 ஒற்றை முழு எண்களின் வர்க்கமானது 4q + 1, (இங்கு q ஆனது முழு எண்) என்ற வடிவில் அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : x என்பது ஓர் ஒற்றை முழு எண் என்க. எந்தவொரு ஒற்றை முழு எண்ணும் ஏதேனும் ஓர் இரட்டை முழு எண்ணை விட ஒன்று அதிகமாக இருக்கும் என்பதால், $x = 2k + 1$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு.

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k + 1) + 1 \\ &= 4q + 1, \text{ இங்கு } q = k(k + 1) \end{aligned}$$

என்பது ஒரு முழு.

2.4 210 மற்றும் 55 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325$, என்ற வடிவில் எழுதினால் x - யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு : யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட எண்களுக்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

$$\begin{aligned} 210 &= 55 \times 3 + 45 \\ 55 &= 45 \times 1 + 10 \\ 45 &= 10 \times 4 + 5 \\ 10 &= 5 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

மீதி = 0

ஆகவே, கடைசி படிநிலையின் வகுத்தி 5 ஆனது 210 மற்றும் 55 –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும். மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325 = 5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$\begin{aligned} 55x &= 330 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

2.5 445 மற்றும் 572 -ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் வகுக்கும்போது முறையே மீதி 4 மற்றும் 5 -ஐ தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் கண்டறிக.

தீர்வு : 445 மற்றும் 572 -ஐ வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 4 மற்றும் 5 எனில், நமக்குத் தேவையான எண் 445 – 4 = 441, 572 – 5 = 567 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகத்தான் இருக்கும்.

எனவே நாம் 441 மற்றும் 567 ஆகிய எண்களின் மீ.பொ.வ கண்டறிவோம். யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையின்படி நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} 567 &= 441 \times 1 + 126 \\ 441 &= 126 \times 3 + 63 \\ 126 &= 63 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

ஆகவே 441 மற்றும் 567 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 63 ஆகும். எனவே தேவையான எண் 63 ஆகும்.

2.6 **396, 504, 636 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ. காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட மூன்று எண்களின் மீ.பொ.வ காண, நாம் முதலில் முதல் இரு எண்களின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

396 மற்றும் 504 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண, யூக்ளிடின் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$504 = 396 \times 1 + 108$$

இங்கு மீதி $108 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த

$$396 = 108 \times 3 + 72$$

இங்கு மீதி $72 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$108 = 72 \times 1 + 36$$

இங்கு மீதி $36 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழி முறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$72 = 36 \times 2 + 0$$

இங்கு மீதி $= 0$.

எனவே 396 மற்றும் 504 -யின் மீ.பொ.வ 36 ஆகும்.

636 மற்றும் 36 -யின் மீ.பொ.வ காண, யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$636 = 36 \times 17 + 24$$

இங்கு மீதி $24 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$36 = 24 \times 1 + 12$$

இங்கு மீதி $12 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

இங்கு மீதி $= 0$

எனவே, 636 மற்றும் 36 -யின் மீ.பொ.வ $= 12$

எனவே 396, 504 மற்றும் 636 -யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி 12 ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. பின்வரும் முழுக்கள் a, b ஆகியவற்றிற்கு $a = bq + r$ என்பதை நிறைவு செய்யும்படி q மற்றும் r காண்க.

(i) $a = 13, b = 3$ (ii) $a = 18, b = 4$
(iii) $a = 21, b = -4$ (iv) $a = -32, b = -12$
(v) $a = -31, b = 7$

விடை:

(i) $a = 13, b = 3$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$, இங்கு $0 \leq r < |b|$

$13 = 3(4) + 1,\ 0 \leq r < |3|$

எனவே ஈவு $q = 4$

மீதி $r = 1$

(ii) $a = 18, b = 4$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$ இங்கு $0 \leq r < |b|$

$18 = 4 \times 4 + 2,\ 0 \leq r < |4|$

எனவே ஈவு $q = 4$

மீதி $r = 2$

(iii) $a = 21, b = -4$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$ இங்கு $0 \leq r < |b|$

$21 = (-4) \times (-5) + 1,\ 0 \leq r < |-4|$

எனவே ஈவு $q = -5$

மீதி $r = 1$

(iv) $a = -32, b = -12$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$, இங்கு $0 \leq r < |b|$

$-32 = (-12) \times 3 + (4),\ 0 \leq r < |-12|$

எனவே ஈவு $q = 3$

மீதி $r = 4$

(v) $a = -31, b = 7$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$a = bq + r$ இங்கு $0 \leq r < |b|$

$-31 = 7 \times (-5) + 4,\ 0 \leq r < |7|$

எனவே ஈவு $q = -5$

மீதி $r = 4$

2. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையானது மீதி _____ வரும் வரை யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்துவதாகும்.

விடை: பூச்சியம்.

3. k, k என்ற இரு சமமான மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ _____

விடை: k

சிந்தனைக் களம்

1. ஒரு மிகை முழுவை 3 ஆல் வகுக்கும்போது
(i) கிடைக்கும் மீதிகள் எவை?
(ii) அவற்றை எந்த வடிவில் எழுத இயலும்?

விடை:

(i) தேவையான மிகை முழு = a என்க.
யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி
$a = bq + r$, இங்கு $0 \le r < |b|$
ஆகையால், $a = 3q + r$, $0 \le r < |3|$
$a = 3q + r$, $r = 0, 1, 2$
கிடைக்கும் மீதிகள் 0, 1 மற்றும் 2 ஆகும்.

(ii) $a = 3q$; $a = 3q + 1$, $a = 3q + 2$
என்ற வடிவில் அந்த முழுக்களை எழுதலாம்.

பயிற்சி 2.1

1. 3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 2 ஐத் தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களையும் காண்க.

தீர்வு : தேவையான மிகை முழு 'a' என்க. கணக்கின்படி 'a'-ஐ 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 2 ஆகும்.
யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின்படி, a மற்றும் b $(a > b)$ என்பன ஏதேனும் இரு முழுக்கள் எனில் $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$ எவ்வாறு q, r எனும் முழுக்கள் கிடைக்கும்.
அதாவது $a = bq + r$, இங்கு $0 \le r < |b|$
கணக்கின்படி $a = 3q + r$, இங்கு $0 \le r < |3|$
$r = 0, 1, 2.$
$r = 2$ எனில்
$a = 3q + 2$, இங்கு $q \ge 0$
அதாவது, $a = 3q + 2$, $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$a = 3(0) + 2, 3(1) + 2, 3(2) + 2, 3(3) + 2, \ldots$
$a = 2, 5, 8, 11, \ldots$
∴ தேவையான மிகை முழுக்கள் 2,5,8,11,...ஆகும்.

2. ஒரு நபரிடம் 532 பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு 21 பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார். எத்தனை வரிசைகள் முழுமை பெறும் எனவும் மற்றும் எத்தனை பூந்தொட்டிகள் மீதமிருக்கும் எனவும் காண்க.

தீர்வு : மொத்த பூந்தொட்டிகள் = 532
யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின்படி
$a = bq + r$, இங்கு $0 \le r < |b|$
$532 = 21 \times 25 + 7$
இங்கு $0 \le r < |21|$
∴ முழுமை பெற்ற வரிசைகள் = 25
மீதமிருக்கும் பூந்தொட்டிகள் = 7

3. தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 2 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

தீர்வு : n மற்றும் n+1 என்பன இரு தொடர்ச்சியான மிகை முழுக்கள் எனக் கொள்வோம்.
மேலும் $b = 2$.
யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி
$n = bq + r$ இங்கு $0 \le r < |b|$
$n = 2q + r$ இங்கு $0 \le r < |2|$ i.e., $r = 0, 1$
∴ $n = 2q$ அல்லது $n = 2q + 1$

நிலை (i) : $n = 2q$ எனில்,
$n + 1 = 2q + 1$
அவற்றின் பெருக்கற்பலன்
$n(n + 1) = 2q \times (2q + 1)$
$= (2q)(2q) + 2q$
$= 4q^2 + 2q$
$= 2q(2q + 1)$
$= 2m$ இங்கு $m = q(2q + 1)$
மற்றும் m ஒரு மிகை முழு.
∴ $n(n+1)$ இன் பெருக்கல்பலன் 2 ஆல் வகுபடும்.

நிலை (ii) : $n = 2q + 1$ எனில்,
$n + 1 = (2q + 1) + 1$
$= 2q + 2$
$\therefore n(n+1) = (2q + 1)(2q + 2)$
$= 4q^2 + 2q + 4q + 2$
$= 4q^2 + 6q + 2$
$= 2(2q^2 + 3q + 1)$
$= 2p$, இங்கு $p = 2q^2 + 3q + 1$
மற்றும் p ஒரு மிகைமுழு.
∴ $n(n + 1)$ ஆனது 2 ஆல் வகுபடும்.
எனவே தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 2 ஆல் வகுபடும்.

4. a, b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7 10 எனில் a + b + c ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.

தீர்வு : a, b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 9, 7, 10 ஆகும்.
∴ யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின்படி
$a = 13q_1 + 9$
$b = 13q_2 + 7$
$c = 13q_3 + 10$
$a + b + c = 13q_1 + 9 + 13q_2 + 7 + 13q_3 + 10$
$= 13q_1 + 13q_2 + 13q_3 + 26$
$= 13q_1 + 13q_2 + 13q_3 + 13(2)$
$= 13[q_1 + q_2 + q_3 + 2] = 13m$
இங்கு $m = q_1 + q_2 + q_3 + 2$ மற்றும்
m ஒரு மிகை முழு.
∴ 13 m ஆனது 13 ஆல் வகுபடும்
∴ a + b + c ஆனது 13 ஆல் வகுபடும்.

5. எந்த மிகை முழுவின் வர்க்கத்தையும் 4 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 0 அல்லது 1 மட்டுமே கிடைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு : அனைத்து மிகை முழுக்களும் ஒற்றை எண்ணாகவோ அல்லது இரட்டை எண்ணாகவோ இருக்கும்.

இரட்டை எண் எனில்,

$a = 2q$.

ஒற்றை எண் எனில்,

$a = 2q + 1$

நிலை (i) : $a = 2q$ எனில்

$a^2 = (2q)^2$

$a^2 = 4q^2$

$\therefore$ 4 ஆல் வகுக்க மீதி 0 ஆகும்.

நிலை (ii) : $a = 2q + 1$ எனில்

$a^2 = (2q + 1)^2$

$= 4q^2 + 4q + 1$

$= 4q (q + 1) + 1$

$a^2 = 4m + 1$ இங்கு $m = q (q + 1)$ ஒரு முழு.

எனவே a^2 ஆனது $bq + 1$ என்ற வடிவில் உள்ளது. அது 4 ஆல் வகுக்கப்படும்போது 1 மீதி தருகிறது. எனவே மிகை முழுவின் வர்க்கமும் 4 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 0 அல்லது 1 மட்டுமே கிடைக்கும்.

6. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

(i) 340 மற்றும் 412 (ii) 867 மற்றும் 255

(iii) 10224 மற்றும் 9648 (iv) 84, 90 மற்றும் 120

தீர்வு :

(i) 340 மற்றும் 412 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண $412 > 340$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$412 = 340 \times 1 + 72$

இங்கு மீதி $72 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$340 = 72 \times 4 + 52$

இங்கு மீதி $52 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$72 = 52 \times 1 + 20$

இங்கு மீதி $20 \neq 0$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$20 = 12 \times 1 + 8$

இங்கு மீதி $8 \neq 0$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$12 = 8 (1) + 4$

இங்கு மீதி $4 \neq 0$,

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$8 = 4 (2) + 0$

இங்கு மீதி $= 0$

$\therefore$ 340 மற்றும் 412 இன் மீ.பொ.வ = 4 ஆகும்.

(ii) 867 மற்றும் 255 இங்கு $867 > 255$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$867 = 255 (3) + 102$

$255 = 102 (2) + 51$

$102 = 51 (2) + 0$

இங்கு மீதி $= 0$

எனவே 867 மற்றும் 255 இன் மீ.பொ.வ = 51 ஆகும்.

(iii) 10224 மற்றும் 9648 இங்கு $10224 > 9648$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$10224 = 9648 (1) + 576$

$9648 = 576 (16) + 432$

$576 = 432 (1) + 144$

$432 = 144 (3) + 0$

இங்கு மீதி $= 0$

எனவே 10224 மற்றும் 9648 இன் மீ.பொ.வ = 144 ஆகும்.

(iv) 84, 90 மற்றும் 120

முதலில் 90 மற்றும் 84 இன் மீ,பொ.வ காண்போம்.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை, மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$90 = 84 (1) + 6$

$84 = 6 (14) + 0$

இங்கு மீதி $= 0$

$\therefore$ (90, 84) இன் மீ.பொ.வ = 6

மேலும் 120 மற்றும் 6 இன் மீ.பொ.வ காண

$120 = 6 (20) + 0$

இங்கு மீதி $= 0$ $\therefore$ மீ.பொ.வ 6.

84, 90 மற்றும் 120 மீ.பொ.வ 6.

7. 1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 -ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு எண்களையும் வகுக்கும்போது மீதி = 12

∴ தேவையான எண் 1230 – 12 மற்றும் 1926 – 12 இன் மீ.பொ.வ ஆகும்.

அதாவது 1218மற்றும் 1914இன் மீ.பொ.வ ஆகும்.

$1914 = 1218 \times 1 + 696$

$1218 = 696 \times 1 + 522$

$696 = 522 \times 1 + 174$

$522 = 174 \times 3 + 0$

∴ 1218, 1914 இன் மீ.பொ.வ = 174

∴ தேவையான எண் 174.

8. 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d என்க. $d = 32x + 60y$ எனில் x மற்றும் y என்ற முழுக்களைக் காண்க.

தீர்வு : யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை, மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது

$60 = 32 \times 1 + 28$ ... (1)

$32 = 28 \times 1 + 4$ ... (2)

$28 = 4 \times 7 + 0$

இங்கு மீதி = 0.

∴ எனவே 60, 32 இன் மீ.பொ.வ = 4

கணக்கின்படி $d = 32x + 60y$

(2) லிருந்து $4 = 32 - 28 \times 1$ ... (3)

(1) லிருந்து $28 = 60 - 32 \times 1$ ... (4)

(4) ஐ (3) இல் பிரதியிட

$4 = 32 - (60 - 32 \times 1) \times 1$

$4 = 32 - 60 + 32 \times 1$

$4 = 32(2) + 60(-1)$ என்பது $d = 32x + 60y$ என்ற வடிவில் உள்ளது

எனவே $x = 2; y = -1$ ஆகும்.

9. ஒரு மிகை முழுவை 88 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 61 கிடைக்கிறது. அதே மிகை முழுவை 11 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு : தேவையான மிகை முழு எண் 'n' என்க. எனவே

$n = 88(p) + 61$, இங்கு p என்பது ஒரு முழு

$n = 88(p) + (5 \times 11 + 6)$

$n = 8 \times 11 \times p + 5 \times 11 + 6$

$n = 11(8p + 5) + 6$

இருபுறமும் 11 ஆல் வகுக்க

$\frac{n}{11} = (8p + 5) + \frac{6}{11}$

∴ 'n' என்ற அதே எண்ணை 11 ஆல் வகுக்க மீதி 6 கிடைக்கும்.

10. எந்த இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுவும் சார்பகா எண்கள் என நிறுவுக.

தீர்வு : n மற்றும் n + 1 என்பன இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் என்க. இங்கு $n + 1 > n$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறைப்படி

$n + 1 = n \times q + 1$ q ஒரு முழு. மீதி = 1

∴ யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறைப்படி

$n = 1 \times (n) + 0$

இங்கு மீதி = 0

∴ மீ.பொ.வ = 1

∴ n, n + 1 இன் மீ.பொ.வ = 1

இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ = 1

∴ இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் சார்பகா எண்களாகும்.

அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்

நினைவில் கொள்க

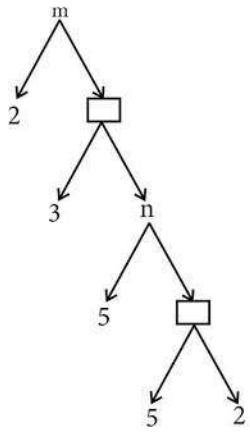
தேற்றம்: (அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்) (நிரூபணம் இல்லாமல்)

"1 ஐ தவிர்த்து மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த முடியும். மேலும் இந்தக் காரணிப்படுத்துதலானது (பகா எண்களை எழுதும் வரிசையைத் தவிர்த்து) ஒரே முறையில் அமையும்".

- பொதுவாக N என்ற பகு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் நாம் N என்ற எண்ணை $N = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \ldots \times p_n^{q_n}$ என்ற ஒரே வழியில் மட்டுமே பிரித்து எழுத முடியும். இங்கு $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ஆகியவை பகா எண்கள் மற்றும் $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ ஆகியவை இயல் எண்கள்.
- ஒவ்வொரு பகு எண்ணும் தனித்த பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்.
- ab -ஐ p என்ற பகா எண் வகுக்கும் எனில், p ஆனது a ஐ வகுக்கும் அல்லது p ஆனது b -ஐ வகுக்கும். அதாவது p ஆனது a,b -ல் ஏதேனும் ஒன்றை வகுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

2.7 **கொடுக்கப்பட்ட காரணி பிரித்தலில் m மற்றும் n என்ற எண்ணைக் காண்க**



தீர்வு :

கீழிருந்து முதல் பெட்டியின் மதிப்பு
$= 5 \times 2 = 10$

n - யின் மதிப்பு
$= 5 \times 10 = 50$

கீழிருந்து இரண்டாம் பெட்டியின் மதிப்பு
$= 3 \times 50 = 150$

m- யின் மதிப்பு
$= 2 \times 150 = 300$

ஆகவே, தேவையான எண்கள்
$m = 300, n = 50$

2.8 **6^n, n ஓர் இயல் எண் என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியுமா? உனது விடைக்குக் காரணம் கூறுக.**

தீர்வு :

$6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n$ என்பதால்
2 என்பது 6^n -யின் ஒரு காரணியாகும்.
எனவே, 6^n ஓர் இரட்டைப்படை எண் ஆகும். ஆனால், கடைசி இலக்கம் 5 -யில் முடியும் எண்கள் அனைத்தும் ஒற்றைப்படை எண்கள் ஆகும். ஆகவே, 6^n -யின் கடைசி இலக்கம் 5 என முடிய வாய்ப்பில்லை.

2.9 **$7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ என்பது ஒரு பகு எண்ணா? உனது விடையை நியாயப்படுத்துக.**

தீர்வு :

ஆம், கொடுக்கப்பட்ட எண் ஒரு பகு எண்ணாகும். ஏனெனில்
$7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3 = 3 \times (7 \times 5 \times 2 + 1) = 3 \times 71$
கொடுக்கப்பட்ட எண்ணானது இரு பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்தப்படுவதால், அது ஒரு பகு எண்ணாகும்.

2.10 **$a^b \times b^a = 800$ என்றவாறு அமையும் இரு மிகை முழுக்கள் 'a' மற்றும் 'b' -ஐ காண்க.**

தீர்வு :

800 என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்தும்போது, நாம் பெறுவது
$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^5 \times 5^2$
ஆகவே, $a^b \times b^a = 2^5 \times 5^2$
இதிலிருந்து நாம் பெறுவது $a = 2$ மற்றும் $b = 5$
(அல்லது)
$a = 5$ மற்றும் $b = 2$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. _____ ஐத் தவிர்த்த மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும் _____ யின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்.
விடை: 1, பகா எண்களின்.

2. ஒரு பகு எண்ணை எத்தனை வழிகளில், பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்?
விடை: ஒரே ஒரு வழியில் மட்டும்.

3. எந்தவொரு பகா எண்ணிற்கும் உள்ள வகுத்திகளின் எண்ணிக்கை _____.
விடை: 2

4. m ஆனது n ஐ வகுக்கும் எனில் m மற்றும் n -யின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம _____ மற்றும் _____ ஆகும்.
விடை: m மற்றும் n

5. 2^m மற்றும் 3^n என்ற வடிவில் அமையும் எண்களின் மீ.பொ.வ _____.
விடை: 1

சிந்தனைக் களம்

1. 1 என்பது பகா எண்ணா?
விடை: 1 என்பது பகா எண் அல்ல. ஏனெனில் ஒவ்வொரு பகா எண்ணும் 2 வகுத்திகளைப் பெற்றிருக்கும். (1 மற்றும் அதே எண்) ஆனால் 1 ஆனது ஒரே ஒரு வகுத்தியைப் பெற்றுள்ளது.

2. $a^b = b^a$ எனுமாறு அமையும் மிகை முழுக்கள் a, b –ஐக் காண இயலுமா?
விடை: $a = 2$ மற்றும் $b = 4$ என்க
$\therefore \quad 2^4 = 4^2$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.2

1. n ஓர் இயல் எண் எனில், எந்த n மதிப்புகளுக்கு 4^n ஆனது 6 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?

தீர்வு : n ஓர் இயல் எண் எனில்,

$$4^n = (2)^{2n}$$

$\therefore$ 2 ஆனது 4^n இன் ஒரு காரணி, மேலும் 2 ஒரு பகா எண்

அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தின்படி இந்த காரணிப்படுத்துதலானது ஒரே முறையில் அமையும். எனவே 4^n இன் மதிப்பு 4 அல்லது 6 என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டே எப்போதும் முடியும்.

அதாவது n ஒற்றை எண் எனில் 4^n ஆனது 4 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும். n இரட்டை எண் எனில் 4^n ஆனது 6 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்.

2. m மற்றும் n இயல் எண்கள் எனில், எந்த m -யின் மதிப்புகளுக்கு $2^n \times 5^m$ என்ற எண் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?

தீர்வு : $2^n \times 5^m$ என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இந்த பெருக்கல் பலனின் ஒரு காரணி 2 ஆகையால் $2^n \times 5^m$ என்பது இரட்டை எண்

[ஏனெனில் m, n இயல் எண்கள்]

ஆனால் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும் எண்கள் ஒற்றை எண்களாகும். இது முரண்பாடாகும். எனவே m -இன் எந்த மதிப்புக்கும் $2^n \times 5^m$ ஆனது 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியாது.

3. 252525 மற்றும் 363636 என்ற எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு :

5	252525
5	50505
3	10101
7	3367
13	481
	37

3	363636
3	121212
2	40404
2	20202
3	10101
7	3367
13	481
	37

$252525 = 3^1 \times 5^2 \times 7^1 \times 13^1 \times 37^1$

$363636 = 2^2 \times 3^3 \times 7^1 \times 13^1 \times 37^1$

மீ.பொ.வ $= 3^1 \times 7^1 \times 13^1 \times 37^1$

$= 3 \times 3367$

$= 10101$

4. $13824 = 2^a \times 3^b$ எனில் a மற்றும் b -யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

2	13824
2	6912
2	3456
2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

எனவே $2^a \times 3^b = 13824 = 2^9 \times 3^3$

$\therefore$ a = 9 மற்றும் b = 3.

5. $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$, இங்கு p_1, p_2, p_3, p_4 என்பன ஏறுவரிசையில் அமைந்த பகா எண்கள் மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன முழுக்கள் எனில், p_1, p_2, p_3, p_4 மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

113400 -ஐ பகாக் காரணிப்படுத்த, நாம் பெறுவது

2	113400
2	56700
2	28350
3	14175
3	4725
3	1575
3	525
5	175
5	35
7	7
	1

எனவே $113400 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$

இதனை

$113400 = p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4}$ உடன் ஒப்பிட

$p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$

$p_1 = 2;\ p_2 = 3;\ p_3 = 5;\ p_4 = 7$ மற்றும்

$x_1 = 3;\ x_2 = 4;\ x_3 = 2;\ x_4 = 1.$

6. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 408 மற்றும் 170 என்ற எண்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு :

அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தின்படி அனைத்து இயல் எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த இயலும்.

2	170
5	85
	17

2	408
2	204
2	102
3	51
	17

எனவே 408 மற்றும் 170 ஐக் காரணிப்படுத்த

$408 = 2^3 \times 3^1 \times 17^1$

$170 = 2^1 \times 5^1 \times 17^1$

408, 170 இன் மீ.பொ.வ

$= 2^1 \times 17^1 = 34$

மேலும் மீ.பொ.வ $\times$ மீ.பொ.ம

= இரு எண்களின் பெருக்கற்பலன்

$34 \times$ மீ.பொ.ம $= 408 \times 170$

$$\text{மீ.பொ.ம.} = \frac{408 \times 170}{34} = 2040$$

$\therefore$ 408, 170 இன் மீ.பொ.வ = 34;

408, 170 இன் மீ.பொ.ம = 2040

7. 24, 15, 36 ஆகிய எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் மிகப்பெரிய ஆறிலக்க எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

3	24, 15, 36
2	8, 5, 12
2	4, 5, 6
	2, 5, 3

மீ.பொ.ம. $= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 360$

மிகப்பெரிய 6 இலக்க எண் 999999

24, 15 மற்றும் 36 இன் மீ.பொ.ம = 360

	2777
360	999999
	720
	2799
	2520
	2799
	2520
	2799
	2520
	279

999999 ஐ 360 ஆல் வகுக்க மீதி = 279.

$\therefore$ 24, 15, 36 ஆல் வகுபடும் மிகப்பெரிய 6 இலக்க எண் = 999999 – 279 = 999720

எனவே தேவையான எண் = 999720

8. 35, 56 மற்றும் 91 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 7 ஐத் தரக்கூடிய மிகச்சிறிய எண் எது?

தீர்வு :

7	35, 56, 91
	5, 8, 13

தேவையான எண் = (35, 56, 91) இன் மீ.பொ.ம + 7

35, 56, 91 இன் மீ.பொ.ம

$= 7 \times 5 \times 8 \times 13$

$= 3640$

தேவையான எண் $= 3640 + 7$

$= 3647$

9. முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் எது?

தீர்வு :

தேவையான எண் முதல் 10 இயல் எண்களின் மீ.பொ.ம ஆகும்.

i.e., (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) ன் மீ.பொ.ம

5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2	1, 2, 3, 4, 1, 6, 7, 8, 9, 2
3	1, 1, 3, 2, 1, 3, 7, 4, 9, 1
2	1, 1, 1, 2, 1, 1, 7, 4, 3, 1
	1, 1, 1, 1, 1, 1, 7, 2, 3, 1

மீ.பொ.ம. $5 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 \times 2 \times 3 = 2520$

$\therefore$ முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் சிறிய எண் 2520 ஆகும்.

மட்டு எண்கணிதம்

நினைவில் கொள்க

மட்டு எண்கணிதம்

- கணிதத்தில் மட்டு எண்கணிதம் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைச் சுற்றி மீண்டும் இடம் பெறும் முழுக்களின் அமைப்பு ஆகும்.
- இயல்பான எண்கணிதம் போன்றில்லாமல் மட்டு எண் கணிதம் சுழற்சி அடிப்படையில் செயல்படுகிறது.
- மட்டு எண்கணிதம் என்ற கருத்தை உருவாக்கியவர் மாபெரும் ஜெர்மானியக் கணித மேதை கார்ல் பிரடெரிக் கவுஸ் ஆவார். இவர் கணித மேதைகளின் இளவரசர் என அழைக்கப்படுகிறார்.

மட்டு ஒருங்கிசைவு

- a மற்றும் b -க்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் n -யின் மடங்கு எனில் மட்டு n -யின் அடிப்படையில் a யும் b யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். அதாவது $b - a = kn \; k \in \mathbb{Z}$, இதை $a \equiv b$ (மட்டு n) எனவும் எழுதலாம்.
- இங்கு n என்பது மட்டு எண் என அழைக்கப்படுகிறது. $a \equiv b$ (மட்டு n) என்பதன் பொருள் $a - b$ ஆனது n ஆல் வகுபடும் எனலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $61 \equiv 5$ (மட்டு 7) ஏனெனில் $61 - 5 = 56$ என்பது 7 ஆல் வகுபடும்.
- ஒரு மிகை முழுவை n ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிக்கான சாத்தியக்கூறுகள் 0, 1, 2....., n – 1 ஆகும்.
- யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் மூலம் பெறப்பட்ட $n = mq + r$ என்ற சமன்பாட்டை $n \equiv r$ (மட்டு m) என்ற மட்டு ஒருங்கிசைவாக எழுதலாம்.
- a மற்றும் b என்ற இரு முழுக்களும் மட்டு m -ஐப் பொறுத்து ஒருங்கிசைவாக அமைய, அதாவது $a \equiv b$ (மட்டு m), என எழுத வேண்டுமானால் அவ்விரு எண்களையும் m -ஆல் வகுக்கும்போது ஒரே மீதியைத் தர வேண்டும்.
- மட்டு ஒருங்கிசைவு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் போது நமக்கு எண்ணற்றத் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

தேற்றம்:

a, b, c மற்றும் d என்பன முழுக்கள் மற்றும் m என்பது ஒரு மிகை முழு. $a \equiv b$ (மட்டு m) மற்றும் $c \equiv d$ (மட்டு m) எனில்,

(i) $(a + c) = (b + d)$ (மட்டு m)

(ii) $(a - c) = (b - d)$ (மட்டு m)

(iii) $(a \times c) = (b \times d)$ (மட்டு m)

தேற்றம்:

$a \equiv b$ (மட்டு m) எனில்,

(i) $ac \equiv bc$ (மட்டு m)

(ii) $a \pm c \equiv b \pm c$ (மட்டு m) இங்கு c என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு

எடுத்துக்காட்டு

2.11 **70004 மற்றும் 778 ஆகிய எண்களை 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.**

தீர்வு :

70000 ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என்பதால்

$70000 \equiv 0$ (மட்டு 7)

$70000 + 4 \equiv 0 + 4$ (மட்டு 7)

$70004 \equiv 4$ (மட்டு 7)

எனவே 70004 ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 4.

777 ஆனது 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 4

$777 \equiv 0$ (மட்டு 7)

$777 + 1 \equiv 0 + 1$ (மட்டு 7)

$778 \equiv 1$ (மட்டு 7)

எனவே, 778 ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 1.

2.12 **$15 \equiv 3$ (மட்டு d) என்றவாறு அமையும் d -யின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்க.**

தீர்வு :

$15 \equiv 3$ (மட்டு d) என்பதன் பொருள் $15 - 3 = kd$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு.

$12 = kd$

$\Rightarrow$ d ஆனது 12 -ஐ வகுக்கும்.

12 -யின் வகுத்திகளாவன 1, 2, 3, 4, 6, 12.

d ஆனது 3 -ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும். ஏனெனில் மீதி 3 வந்துள்ளது. எனவே, d க்கு சாதகமான மதிப்புகள் 4, 6, 12 ஆகும்.

2.13 **பின்வருவனவற்றிற்குப் பொருந்தக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை x ஐக் காண்க.**

(i) $67 + x \equiv 1$ **(மட்டு 4)** **(ii)** $98 \equiv (x + 4)$ (மட்டு 5)

தீர்வு :

(i) $67 + x \equiv 1$ (மட்டு 4)

$\Rightarrow 67 + x - 1 = 4n$, இங்கு n என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு

$66 + x = 4n$

$\Rightarrow$ 66 + x என்பது 4 -யின் மடங்கு

66 -ஐ விட அதிகமான 4 -யின் மடங்கு 68.

எனவே x -யின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 2 ஆகும்.

(ii) $98 \equiv (x + 4)$ (மட்டு 5)

$\Rightarrow 98 - (x + 4) = 5n$, n என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு

$94 - x = 5n$

$\Rightarrow$ 94 – x என்பது 5 -யின் மடங்கு

94 ஐ விடக் குறைவான 5 -யின் மடங்கு 90.

எனவே x -யின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 4 ஆகும்.

2.14 **தீர்க்க $8x \equiv 1$ (மட்டு 11)**

தீர்வு :

$8x \equiv 1$ (மட்டு 11) என்பதை $8x - 1 = 11k$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என எழுதலாம்.

$$x = \frac{11k + 1}{8}$$

$k = 5, 13, 21, 29, \ldots$ என பிரதியிடும் போது $11k + 1$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடுகிறது.

$$x = \frac{11 \times 5 + 1}{8} = 7$$

$$x = \frac{11 \times 13 + 1}{8} = 18$$

எனவே, 7, 18, 29, 40, ... என்பது தீர்வாகும்.

2.15 **$10^4 \equiv x$ (மட்டு 19) என்றவாறு அமையும் x மதிப்பைக் கணக்கிடுக.**

தீர்வு :

$10^2 = 100 \equiv 5$ (மட்டு 19)

$10^4 = (10^2)^2 \equiv 5^2$ (மட்டு 19)

$10^4 \equiv 25$ (மட்டு 19)

$10^4 \equiv 6$ (மட்டு 19)

(ஏனெனில் $25 \equiv 6$ (மட்டு 19))

எனவே, $x = 6$

2.16 **$3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை முழு எண் தீர்வுகள் உள்ளன எனக் காண்க.**

தீர்வு : $3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்பதை

$3x - 1 = 15k$, k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என எழுதலாம்.

$$3x = 15k + 1$$

$$x = \frac{15k + 1}{3}$$

$$x = 5k + \frac{1}{3}$$

5k என்பது ஒரு முழு எண் என்பதால்,

$5k + \frac{1}{3}$ என்பது ஒரு முழு எண் அல்ல. எனவே இச்சமன்பாட்டிற்கு முழு எண் தீர்வே இல்லை.

2.17 **ஒருவர் சென்னையிலிருந்து டெல்லிக்குச் செல்ல இரயிலில் புறப்படுகிறார். அவர் தனது பயணத்தைப் புதன்கிழமை 22.30 மணிக்குத் தொடங்குகிறார். எந்தவிதத் தாமதமுமின்றி இரயில் செல்வதாகக் கொண்டால் மொத்தப் பயண நேரம் 32 மணி நேரம் ஆகும். அவர் எப்பொழுது டெல்லியைச் சென்றடைவார்?**

தீர்வு :

பயணம் தொடங்கும் நேரம் 22.30. பயண நேரம் 32 மணிநேரம் இங்கு நாம் மட்டு 24 ஐ பயன்படுத்த உள்ளோம்.

சென்று சேரும் நேரம்

$22.30 + 32$ (மட்டு 24) $\equiv$ 54.30 (மட்டு 24)
$\equiv$ 6.30 (மட்டு 24)
[32 = (1 × 24) + 8(வியாழன், வெள்ளி)]
ஆகவே அவர் வெள்ளிக்கிழமை காலை 6.30 மணிக்கு டெல்லி சென்றடைவார்.

2.18 கலா மற்றும் வாணி இருவரும் நண்பர்கள். "இன்று எனது பிறந்த நாள்" எனக் கலா கூறினாள். வாணியிடம், "உனது பிறந்தநாளை எப்போது நீ கொண்டாடினாய்?'' எனக் கேட்டாள். அதற்கு வாணி "இன்று திங்கள் கிழமை, நான் என்னுடைய பிறந்த நாளை 75 நாட்களுக்கு முன் கொண்டாடினேன்" எனப் பதிலளித்தாள். வாணியின் பிறந்தநாள் எந்தக் கிழமையில் வந்திருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

நாம் இங்கு ஒவ்வொரு வார நாளுக்கும் ஓர் எண்ணைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்பன முறையே ஞாயிறு முதல் சனி வரை உள்ள கிழமைகளைக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.
வாணி இன்று திங்கள் கிழமை என்று கூறியதால், அதற்கான எண் 1. வாணியின் பிறந்தநாள் 75 நாட்களுக்கு முன் வருவதால் நாம் 1 -லிருந்து 75 ஐக் கழித்து மட்டு 7 காண வேண்டும், ஏனெனில் 1 வாரத்திற்கு 7 நாட்கள்.
-74 (மட்டு 7) $\equiv -4$ (மட்டு 7) $\equiv 7-4$ (மட்டு 7) $\equiv 3$ (மட்டு 7)
(ஏனெனில், $-74-3=-77$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்)
எனவே, $1-75 \equiv 3$ (மட்டு 7)
3 என்ற எண் புதன் கிழமையைக் குறிக்கும்.
எனவே, வாணி தனது பிறந்த நாளைப் புதன்கிழமை கொண்டாடியிருப்பாள்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. _____ எனில் மட்டு n அடிப்படையில் a -யும் b -யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும்.
விடை: $b - a = kn,\ k \in z$

2. 7 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 5 தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களின் கணம் _____
விடை: $n \equiv 5$ (மட்டு 7)

3. $(k - 3) \equiv 5$ (மட்டு 11) என்றவாறு அமையும் k என்ற மிகை எண்கள்_____
விடை: 19, 30, 41, 52, ...

4. $59 \equiv 3$ (மட்டு 7), $46 \equiv 4$ (மட்டு 7)எனில், $105 \equiv$ _____ (மட்டு7), $13 \equiv$ _____ (மட்டு 7), $413 \equiv$ _____ (மட்டு 7), $368 \equiv$ _____ (மட்டு 7)
விடை: 7, –1, 0, 4

5. $7 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$ என்ற எண்ணை 6 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி _____
விடை: 1

சிந்தனைக் களம்

1. 3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 2 கிடைக்கக்கூடிய வகையில் எத்தனை முழுக்கள் இருக்கும்?
விடை: எண்ணற்ற முழுக்கள் இருக்கும்.

பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை முழு x –ன் மதிப்பைக் காண்க.
(i) $71 \equiv x$ (மட்டு 8) (ii) $78 + x \equiv 3$ (மட்டு 5)
(iii) $89 \equiv (x + 3)$ (மட்டு 4)
(iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$ (மட்டு 5) (v) $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

தீர்வு :

(i) $71 \equiv x$ (மட்டு 8) என்பதை
$71 - x = 8n$
அதாவது $71 - x$ என்பது 8 இன் மடங்கு. $x = 1$ எனில், $71 - x = 70$, 8 இன் மடங்கு அல்ல.
8 இன் மடங்காக அமையும் 71 க்கு அருகில் உள்ள எண் 64 .
71 லிருந்து 64 ஐப் பெற 7 ஐக் கழிக்க வேண்டும்.
$\therefore x = 7$
தேவையான எண் $x = 7$

(ii) $78 + x = 3$ (மட்டு 5)
$78 + x - 3 = 5n$
$75 + x = 5n$
$x = 5$ எனில் $75 + 5 = 80$ என்பது 5 இன் மடங்கு
$\therefore$ தேவையான எண் $x = 5$

(iii) $89 \equiv (x + 3)$ (மட்டு 4)
$89 - (x + 3) = 4n$
$89 - x - 3 = 4n$
$86 - x = 4n$
$x = 2$ எனில் $86 - 2 = 84$ என்பது 4 இன் மடங்கு.
$\therefore$ தேவையான எண் $x = 2$

(iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$ (மட்டு 5)

$$\left(96 - \frac{x}{7}\right) = 5n$$

$$\frac{672 - x}{7} = 5n$$

$\therefore x = 7$ எனில் $\frac{672 - 7}{7} = \frac{665}{7}$
$= 95$ என்பது 5 இன் மடங்கு

$\therefore$ தேவையான எண் $x = 7$

(v) $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

$5x - 4 = 6n$

$x = 2$ எனில் $5(2) - 4 = 10 - 4$

$= 6$ என்பது 6 இன் மடங்கு

$\therefore x = 2$.

தேவையான எண் $x = 2$

2. x ஆனது மட்டு 17 –யின் கீழ் 13 உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது எனில், 7x – 3 ஆனது எந்த எண்ணுடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்?

தீர்வு :

$x \equiv 13$ (மட்டு 17)

$7x \equiv 13 \times 7$ (மட்டு 17)

$7x - 3 \equiv (91 - 3)$ (மட்டு17)

$7x - 3 \equiv 88$ (மட்டு17)

$7x - 3 \equiv 3$ (மட்டு 17)

7x – 3 ஆனது மட்டு 17 இன் கீழ் 3 உடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்.

3. தீர்க்க $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

தீர்வு :

$5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

$5x - 4 = 6k$, k என்பது ஒரு முழு.

$$x = \frac{6k + 4}{5}$$

k = 1, 6, 11, 16... என பிரதியிட

6k + 4 ஆனது 5 ஆல் வகுபடும்

$$\therefore \quad x = \frac{6(1) + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$x = \frac{6(6) + 4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$x = \frac{6(11) + 4}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$x = \frac{6(16) + 4}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

எனவே 2, 8, 14, 20,... என்பது தீர்வு ஆகும்.

4. தீர்க்க $3x - 2 \equiv 0$ **(மட்டு 11)**

தீர்வு :

$3x - 2 \equiv 0$ (மட்டு 11)

$3x - 2 = 11k$, இங்கு k ஒரு முழு

$3x = 11k + 2$

$$x = \frac{11k + 2}{3}$$

k = 2, 5, 8, 11,..., என நாம் பிரதியிட

11k + 2 ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

$$\therefore \quad x = \frac{11(2) + 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

$$x = \frac{11(5) + 2}{3} = \frac{57}{3} = 19$$

$$x = \frac{11(8) + 2}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

$$x = \frac{11(11) + 2}{3} = \frac{123}{3} = 41$$

$\therefore$ 8, 19, 30, 41,..... என்பது தீர்வு ஆகும்.

5. முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு நேரம் என்ன?

தீர்வு : 7 மணியிலிருந்து 100 மணி நேரத்திற்குப் பின்வரும் நேரம் காண மட்டு 24 ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

முற்பகல் 7 மணி + 100 (மட்டு 24) = முற்பகல் 7 மணி + 4 மணி = முற்பகல் 11 மணி

$\therefore$ முற்பகல் 7 மணியிலிருந்து 100 மணி நேரத்திற்கு பின் வருவது முற்பகல் 11 மணி ஆகும்.

6. பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன்பு நேரம் என்ன?

தீர்வு : பிற்பகல் 11 மணி என்பது 12 + 11 மணி = 23 மணி.

பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன் உள்ள நேரம் $\equiv 23 - 15$ (மட்டு 24)

$\equiv 8$ (மட்டு 24)

$\equiv$ முற்பகல் 8 மணி

$\therefore$ பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன் முற்பகல் 8 மணி ஆகும்.

7. இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவதாகக் கூறியுள்ளார். என்னுடைய மாமா எந்தக் கிழமையில் வருவார்?

தீர்வு :

இன்று செவ்வாய்க் கிழமை, அதற்கான எண் 2. மாமா 45 நாட்களுக்கு பின் வருவதால் 2 –உடன் 45 ஐக் கூட்டி மட்டு 7 காண வேண்டும்.

ஏனெனில் 1 வாரம் = 7 நாட்கள்

$2 + 45$ (மட்டு 7) $\equiv 47$ (மட்டு 7)

$\equiv 5$ (மட்டு 7)

5 என்பது வெள்ளிக் கிழமையைக் குறிக்கும்.

எனவே மாமா வெள்ளிக் கிழமையில் வருவார்.

8. எந்த ஒரு மிகை முழு எண் n -ற்கும் $2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

7 ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்

$\therefore 7 \equiv 0$ (மட்டு 7)

$7 + 2 \equiv 0 + 2$ (மட்டு 7)

[∵ இருபுறமும் 2 கூட்ட]

$9 \equiv 2$ (மட்டு 7)

$9^n \equiv 2^n$ மட்டு7)

$6 \times 9^n \equiv 6 \times 2^n$ (மட்டு 7)

[∵ இருபுறமும் 6 ஆல் பெருக்க]

$2^n + 6 \times 9^n \equiv 2^n + 6 \times 2^n$ (மட்டு 7)

[∵ இருபுறமும் 2^n ஐ கூட்ட]

$\equiv 2^n (1 + 6)$ (மட்டு 7)

$\equiv 2^n \times 7$ (மட்டு 7)

$\equiv 2^n \times 0$ (மட்டு 7)

$\equiv 0$ (மட்டு 7)

$\therefore$ n ஒரு மிகை முழு எனில் $2^n + 6 \times 9^n$ ஐ 7 ஆல் வகுக்க மீதி 0 கிடைக்கிறது.

எனவே n ஒரு மிகை முழு எனில் $2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்.

9. 2^{81} ஐ 17 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி காண்க.

தீர்வு :

$2^5 \equiv 15$ (மட்டு 17) எனக் கொள்வோம்.

$(2^5)^2 \equiv 15^2$ (மட்டு 17)

$\equiv 4$ (மட்டு 17)

$2^{10} \equiv 4$ (மட்டு 17)

$(2^{10})^4 \equiv 4^4$ (மட்டு 17)

$2^{40} \equiv 1$ மட்டு 17

$(2^{40})^2 \equiv 1^2$ (மட்டு 17)

$2.2^{80} \equiv 2 \times 1$ (மட்டு 17)

$2^{81} \equiv 2$ (மட்டு 17)

2^{81} ஐ 17 ஆல் வகுத்தால் மீதி 2 ஆகும்.

10. பிரிட்டிஷ் ஏர்லைன்ஸ் விமானத்தில் சென்னையிலிருந்து லண்டன் செல்லப் பயணநேரம் தோராயமாக 11 மணி நேரம். விமானம் தனது பயணத்தை ஞாயிற்றுக் கிழமை 23:30 மணிக்குத் தொடங்கியது. சென்னையின் திட்ட நேரமானது லண்டனின் திட்ட நேரத்தைவிட 4:30 மணி நேரம் முன்னதாக இருக்குமெனில், விமானம் லண்டனில் தரையிறங்கும் நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

விமானம் சென்னையிலிருந்து புறப்பட்ட நேரம் = 23.30 ஞாயிற்றுக் கிழமை

இலண்டன் செல்ல பயண நேரம் = 11 மணி

இங்கு நாம் மட்டு 24 ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

$\therefore$ இலண்டன் சேரும் நேரம்

$\equiv 23.30 + 11$ (மட்டு24)

$\equiv 34.30$ (மட்டு 24)

$\equiv 10.30$ (மட்டு 24)

$10.30 = 0 \times 24 + 10.30$

↓ ↓

ஞாயிறு திங்கள்

விமானம் திங்கட்கிழமை 10.30 மணிக்கு இலண்டன் சென்றடையும்.

சென்னையின் திட்ட நேரம் = 4.30 மணி + இலண்டன் திட்ட நேரம்

இலண்டன் திட்ட நேரம் = சென்னை திட்ட நேரம் – 4.30 மணி

= 10.30 – 4.30 = 6 மணி

$\therefore$ விமானம் இலண்டன் விமான நிலையத்தில் திங்கட்கிழமை 6 மணிக்குத் தரையிறங்கும்.

தொடர் வரிசைகள்

நினைவில் கொள்க

வரையறை

- மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்பது இயல் எண்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட, மெய்யெண் மதிப்புகளைப் பெறும் சார்பாகும்.
- தொடர் வரிசையின் ஒவ்வொரு நிலையில் வரும் எண்ணும், தொடர்வரிசையின் ஓர் உறுப்பு எனப்படும்.
- முதலில் வரும் உறுப்பு முதல் உறுப்பு எனவும் இரண்டாவதாக வரும் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

- தொடர்வரிசையை $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$என எழுதலாம்.
- ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அது முடிவுறு தொடர்வரிசை எனப்படும்.
- ஒரு தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின் அது முடிவுறாத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.
- தொடர்வரிசையானது இயல் எண்களின் N மீது வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு சார்பாகும்.
- தொடர்வரிசை ஆனது $f : N \to R$, இங்கு R என்பது மெய்யெண்களின் கணம் என வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும்.
- எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளே; ஆனால் எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசை ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு

2.19 பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots$ **(ii) 5, 2, –1, –4,....**

(iii) 1, 0.1, 0.01,....

தீர்வு :

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots$

$+4 \quad +4 \quad +4$

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையில் தொகுதி ஒரே எண்ணாக உள்ளது மற்றும் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் பகுதியானது 4 அதிகரிக்கிறது.

$$a_5 = \frac{1}{14+4} = \frac{1}{18}$$

$$a_6 = \frac{1}{18+4} = \frac{1}{22}$$

$$a_7 = \frac{1}{22+4} = \frac{1}{26}$$

(ii) $5, \underset{-3}{\rightarrow} 2, \underset{-3}{\rightarrow} -1 \underset{-3}{\rightarrow} -4, \ldots$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பைவிட 3 குறைவாக உள்ளது. எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் – 7, – 10, – 13.

(iii) $1, \underset{\div 10}{\rightarrow} 0.1, \underset{\div 10}{\rightarrow} 0.01, \ldots$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை 10 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கிறது. எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$$a_4 = \frac{0.01}{10} = 0.001$$

$$a_5 = \frac{0.001}{10} = 0.0001$$

$$a_6 = \frac{0.0001}{10} = 0.00001$$

2.20 பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் பொது உறுப்பு காண்க.

(i) 3, 6, 9, ... **(ii)** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

(iii) $5, -25, 125, \ldots$

தீர்வு :

(i) 3, 6, 9,...

இங்குள்ள உறுப்புகள் 3 –யின் மடங்குகளாக உள்ளன. எனவே

$a_n = 3n, \; n \in N$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \; a_2 = \frac{2}{3}; \; a_3 = \frac{3}{4}$$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் தொகுதியானது வரிசை இயல் எண்களாகவும், பகுதியானது தொகுதியை விட ஒன்று கூடுதலாகவும் உள்ளது. எனவே, பொது உறுப்பு

$$a_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$$

(iii) 5, – 25, 125,...

இங்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளில் + மற்றும் – எனக் குறிகள் மாறி மாறி வந்துள்ளன. மேலும் உறுப்புகள் 5 –யின் அடுக்குகளாகவும் அமைந்துள்ளன. எனவே பொது உறுப்பு

$$a_n = (-1)^{n+1} 5^n, n \in N$$

2.21 ஒரு தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3); n \in N \text{ ஓர் ஒற்றை எண்} \\ n^2+1; n \in N \text{ ஓர் இரட்டை எண்} \end{cases}$$

11 –வது உறுப்பு மற்றும் 18 –வது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு :

n = 11 என்பது ஒற்றை எண் என்பதால்,

a_{11} –யின் மதிப்புக் காண n = 11 என

$a_n = n(n+3)$ –யில் பிரதியிட,

11 –வது உறுப்பு $a_{11} = 11(11+3) = 154$.

n = 18 என்பது இரட்டை எண் என்பதால்,

a_{18} –யின் மதிப்புக் காண n = 18 என,

$a_n = n^2 + 1$ –யில் பிரதியிட,

18 –வது உறுப்பு $a_{18} = 18^2 + 1 = 325$

2.22 பின்வரும் தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளைக் காண்க.

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+3}; n \geq 3, n \in N$$

தீர்வு : $a_1 = 1, a_2 = 1$ எனத் தொடர்வரிசையின் முதல் இரண்டு உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மூன்றாவது உறுப்பானது முதல் இரண்டு உறுப்புகளைச் சார்ந்தே உள்ளது.

$$a_3 = \frac{a_{3-1}}{a_{3-2}+3} = \frac{a_2}{a_1+3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

இதைப் போலவே நான்காம் உறுப்பு a_4 ஆனது a_2 மற்றும் a_3 ஆகியவற்றைச் சார்ந்தே உள்ளது.

$$a_4 = \frac{a_{4-1}}{a_{4-2}+3} = \frac{a_3}{a_2+3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

இதே வழிமுறையில் ஐந்தாம் உறுப்பு a_5 கணக்கிடப்படுகிறது.

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{a_{5-2}+3} = \frac{a_4}{a_3+3} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+3} = \frac{1}{16} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{52}$$

எனவே, தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் 1, 1, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ மற்றும் $\frac{1}{52}$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.
   (i) 7, 13, 19, _____,...
   (ii) 2, _____, 10, 17, 26, ...
   (iii) 1000, 100, 10, 1, _____,...

   விடை: (i) 25 (ii) 5 (iii) 1/10

2. தொடர்வரிசையானது _____ கணத்தில் வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும்.

   விடை: இயல் எண்கள்.

3. 0, 2, 6, 12, 20, ... என்ற தொடர்வரிசையின் n-வது உறுப்பு _____

   விடை: $a_n = n(n-1)$

4. சரியா, தவறா எனக் கூறுக.
   (i) எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளாகும்.

   விடை: சரி.

   (ii) எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசைகளாகும்.

   விடை: தவறு.

பயிற்சி 2.4

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.
   (i) 8, 24, 72, ... (ii) 5, 1, – 3
   (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

தீர்வு :

(i) 8, 24, 72, ...

8 → 24 → 72 → 216 → 648 → 1944

×3 ×3 ×3 ×3 ×3

ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3 ஆல் பெருக்க அடுத்த உறுப்பு கிடைக்கிறது.

∴ தொடர்வரிசையின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் 216, 648, 1944.

(ii) 5, 1, –3

5 → 1, → –3 ,...

–4 –4

ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் 4 ஐக் கழிக்க அடுத்த உறுப்பு கிடைக்கிறது.

∴ அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $a_4 = -3 - 4 = -7$

$a_5 = -7 - 4 = -11$

$a_6 = -11 - 4 = -15$

(iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

+1 +1

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{3}{16}$

↑ ↑ ↑

2^2 3^2 4^2

இத்தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம்

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$$

தொகுதியின் மதிப்பு ஒன்று ஒன்றாக அதிகரிக்கிறது.

பகுதியானது $2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

$$\therefore a_4 = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$$a_5 = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

$$a_6 = \frac{6}{7^2} = \frac{6}{49}$$

$\therefore$ அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $\frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \frac{6}{49}$

2. பின்வரும் n வது உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = n^3 - 2$

(ii) $a_n = (-1)^{n+1} n (n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

தீர்வு :

(i) $a_n = n^3 - 2$

$\therefore$ முதல் உறுப்பு

$a_1 = 1^3 - 2 = 1 - 2 = -1$

இரண்டாவது உறுப்பு

$a_2 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$

மூன்றாவது உறுப்பு

$a_3 = 3^3 - 2 = 27 - 2 = 25$

நான்காவது உறுப்பு

$a_4 = 4^3 - 2 = 64 - 2 = 62$

$\therefore$ முதல் நான்கு உறுப்பு $-1, 6, 25, 62$.

(ii) $a_n = (-1)^{n+1} n (n+1)$

n –ஆவது உறுப்பு

$a_n = (-1)^{n+1} n (n+1)$

முதல் உறுப்பு

$a_1 = (-1)^{1+1} 1(1+1) = 2$

இரண்டாவது உறுப்பு

$a_2 = (-1)^{2+1} 2(2+1) = -6$

மூன்றாவது உறுப்பு

$a_3 = (-1)^{3+1} 3(3+1) = 12$

நான்காவது உறுப்பு

$a_4 = (-1)^{4+1} 4(4+1) = -20$

முதல் நான்கு உறுப்புகள் $2, -6, 12, -20$.

(iii) $a_n = 2n^2 - 6$

n –ஆவது உறுப்பு

$a_n = 2n^2 - 6$

$\therefore$ முதல் உறுப்பு

$a_1 = 2(1)^2 - 6 = -4$

இரண்டாவது உறுப்பு

$a_2 = 2(2)^2 - 6 = 2$

மூன்றாவது உறுப்பு

$a_3 = 2(3)^2 - 6 = 12$

நான்காவது உறுப்பு

$a_4 = 2(4)^2 - 6 = 26$

$\therefore$ முதல் நான்கு உறுப்புகள் $-4, 2, 12, 26$.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசைகளின் n –வது உறுப்பைக் காண்க.

(i) 2, 5, 10, 17,... (ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

(iii) 3, 8, 13, 18,...

தீர்வு :

(i) 2, 5, 10, 17, ...

$\Rightarrow 1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, 4^2 + 1, \ldots$

இங்கு ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் வர்க்கத்துடன் 1 ஐக் கூட்டுவதால் பெறப்படுகிறது.

$\therefore$ n வது உறுப்பு $a_n = n^2 + 1$

(ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$

இங்கு தொகுதியில் n ஆவது உறுப்பு $n - 1$ ஆகும். பகுதியில் n ஆவது உறுப்பு n ஆகும்.

$\therefore a_n = \frac{n-1}{n}$

(iii) 3, 8, 13, 18, ...

$a_1 = 3;\ a_2 = 8;\ a_3 = 13;\ a_4 = 18, \ldots$

$a_1 = 3;\ a_2 = 3 + 5;\ a_3 = 8 + 5;\ a_4 = 13 + 5, \ldots$

ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதன் முந்தைய உறுப்புடன் 5 ஐக் கூட்ட கிடைக்கிறது.

$\therefore a_n = a_{n-1} + 5$

மாற்றுமுறை

$a_1 = 3;\ a_2 = 8;\ a_3 = 13;\ a_4 = 18, \ldots$

$a_1 = 5 - 2;\ a_2 = 2(5) - 2;\ a_3 = 3(5) - 2;\ a_4 = 4(5) - 2, \ldots$

$a_n = 5n - 2$

4. கீழ்க்கண்ட தொடர் வரிசைகள் ஒவ்வொன்றிலும் n -வது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 மற்றும் a_{13}

(ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 மற்றும் a_{11}

தீர்வு :

(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 மற்றும் a_{13}

இங்கு $a_n = \frac{5n}{n+2}$

$n = 6$ எனில்,

$$a_6 = \frac{5\times 6}{6+2} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

$n = 13$ எனில்,

$$a_{13} = \frac{5\times 13}{13+2} = \frac{65}{15} = \frac{13}{3}$$

$\therefore a_6 = \frac{15}{4}$ மற்றும் $a_{13} = \frac{13}{3}$

(ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 மற்றும் a_{11}

இங்கு $a_n = -(n^2 - 4)$

$n = 4$ எனில்

$a_4 = -(4^2 - 4) = -(16 - 4) = -12$

$n = 11$ எனில்

$a_{11} = -(11^2 - 4) = -(121 - 4) = -117$

$\therefore a_4 = -12$; $a_{11} = -117$

5. $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3}; \text{ஓர் இரட்டை எண்}, n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1}; \text{ஓர் ஒற்றை எண்}, n \in N \end{cases}$ **என்பது**

n -வது உறுப்பு எனில், a_8 மற்றும் a_{15} காண்க.

தீர்வு : a_8 -ஐ காண, 8 ஓர் இரட்டை எண் என்பதால் $n = 8$ என,

$$a_n = \frac{n^2-1}{n+3} \text{ இல் பிரதியிட}$$

$$a_8 = \frac{8^2-1}{8+3} = \frac{64-1}{11} = \frac{63}{11}$$

a_{15} ஐக் காண 15 ஓர் ஒற்றை எண் என்பதால்

$n = 15$ என, $a_n = \frac{n^2}{2n+1}$ இல் பிரதியிட

$$a_{15} = \frac{15^2}{2(15)+1} = \frac{225}{30+1} = \frac{225}{31}$$

$\therefore a_8 = \frac{63}{11}$ மற்றும் $a_{15} = \frac{225}{31}$

6. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, $n \in N$. எனில், தொடர்வரிசையின் முதல் ஆறு உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_1 = 1$ மற்றும் $a_2 = 1$ என தரப்பட்டுள்ளன.

$n \geq 3$ எனில், $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

$n = 3$, $a_3 = 2a_{3-1} + a_{3-2} = 2a_2 + a_1$

$a_3 = 2 + 1 = 3$

$n = 4$, $a_4 = 2a_{4-1} + a_{4-2} = 2a_3 + a_2$

$a_4 = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$

$n = 5$, $a_5 = 2a_{5-1} + a_{5-2} = 2a_4 + a_3$

$a_5 = 2 \times 7 + 3 = 14 + 3 = 17$

$n = 6$, $a_6 = 2a_{6-1} + a_{6-2} = 2a_5 + a_4$

$a_6 = 2(17) + 7 = 34 + 7 = 41$

$\therefore$ தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகள்

1, 1, 3, 7, 17, 41

கூட்டுத் தொடர் வரிசை

நினைவில் கொள்க

a மற்றும் d என்பன மெய்யெண்கள் எனில், a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, ... என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கும். கூட்டுத் தொடர்வரிசையைச் சுருக்கமாக A. P. Arithmetic Progression எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு 'a' என்ற எண்ணை முதல் உறுப்பு (first term) என்றும் 'd' என்ற எண்ணை பொது வித்தியாசம் (common difference) என்றும் அழைக்கிறோம்.

- கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்பது அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் ஒரு மாறிலி அளவில் வேறுபடும் தொடர்வரிசையாகும். உதாரணமாக இரட்டை முழு எண்களின் தொகுப்பு: 2, 4, 6, 8, 10, 12...

- கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எந்த இரு தொடர்ச்சியான உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாத எண்ணாக இருக்கும். இந்த மாறாத எண் "பொது வித்தியாசம்" என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறா கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகள் மற்றும் பொது வித்தியாசம்.

- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n வது உறுப்பு t_n எனில் $t_n = a + (n-1)\,d$. இங்கு a என்பது முதல் உறுப்பு, d என்பது பொது வித்தியாசம்.
- பொதுவாக ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் காண நாம் இரண்டாம் உறுப்பிலிருந்து முதல் உறுப்பைக் கழிக்க வேண்டும்.

  $\therefore\ d = t_n - t_{n-1}$, n = 2, 3, 4....
- பொது வித்தியாசமானது மிகை எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ அமையலாம்.
- பொது வித்தியாசம் பூச்சியமாக கிடைக்கும் கூட்டுத் தொடர்வரிசை மாறிலிக் கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும். எ.கா: – 1, – 1, – 1,.....
- ஒரு முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள முதல் உறுப்பு a, கடைசி உறுப்பு l எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = \frac{l-a}{d} + 1$ ஏனெனில், $l = a + (n-1)\,d$
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில், ஒவ்வோர் உறுப்புடன் ஒரு மாறாத எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும்.
- ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் a – d, a மற்றும் a + d என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் d ஆகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் a – 3d, a – d, a + d மற்றும் a + 3d என எடுத்துக் கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் 2d ஆகும்.
- மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் a, b, c என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே 2b = a + c

சூத்திரங்கள்:

- கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$
- கடைசி உறுப்பு l தரப்பட்டால் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$
- முதல் 'n' ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் = n^2
- முதல் 'n' இரட்டை இயல் எண்களின் கூடுதல் = n (n + 1)

எடுத்துக்காட்டு

2.23 பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையா, இல்லையா எனச் சோதிக்க.

(i) $x + 2, 2x + 3, 3x + 4,...$

(ii) $2, 4, 8, 16,...$

(iii) $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, ...$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையானது கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க வேண்டுமானால், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளனவா என சோதித்தால் போதுமானது.

(i) $t_2 - t_1 = (2x + 3) - (x + 2) = x + 1$

$t_3 - t_2 = (3x + 4) - (2x + 3) = x + 1$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது. எனவே,

$x + 2, 2x + 3, 3x + 4,...$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

(ii) $t_2 - t_1 = 4 - 2 = 2$

$t_3 - t_2 = 8 - 4 = 4$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக இல்லை. எனவே $2, 4, 8, 16,...$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்ல.

(iii) $t_2 - t_1 = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_3 - t_2 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_4 - t_3 = 9\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது. எனவே, $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2},...$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

2.24 முதல் உறுப்பு 20 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் 8 ஆகவும் கொண்ட கூட்டுத் தொடர்வரிசையை எழுதவும்.

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு $a = 20$; பொது வித்தியாசம் $d = 8$

கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம்

$a, a + d, a + 2d, a + 3d,...$

இந்த நிகழ்வில் நாம் பெறுவது

$20, 20 + 8, 20 + 2(8), 20 + 3(8),...$

எனவே, தேவையான கூட்டுத் தொடர்வரிசை

$20, 28, 36, 44,...$

2.25 $3, 15, 27, 39,...$ என்ற தொடர்வரிசையின் 15-வது, 24-வது மற்றும் n-வது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு $a = 3$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 15 - 3 = 12$.

முதல் உறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d ஆக உள்ள கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு $t_n = a + (n - 1) d$ என நாம் அறிவோம்.

$t_{15} = a + (15 - 1) d = a + 14d = 3 + 14 (12) = 171$

(இங்கு $a = 3$ மற்றும் $d = 12$)

$t_{24} = a + (24 - 1) d = a + 23d = 3 + 23 (12) = 279$

n –வது உறுப்பு (பொது உறுப்பு)

$t_n = a + (n - 1) d$

$t_n = 3 + (n - 1) 12$

$t_n = 12n - 9$

2.26 $3, 6, 9, 12,..., 111$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு : முதல் உறுப்பு $a = 3$; $d = 6 - 3 = 3$;

கடைசி உறுப்பு $l = 111$.

$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ என அறிவோம்.

$n = \left(\frac{111-3}{3}\right) + 1 = 37$

எனவே, இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 37 உறுப்புகள் உள்ளன.

2.27 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 7 –வது உறுப்பு – 1 மற்றும் 16 –வது உறுப்பு 17 எனில், அதன் பொது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$t_1, t_2, t_3, t_4,.....$ என்பது தேவையான கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்க.

$t_7 = -1$ மற்றும் $t_{16} = 17$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$a + (7 - 1) d = -1$ மற்றும்

$a + (16 - 1) d = 17$

$a + 6d = -1$ ...(1)

$a + 15d = 17$ ...(2)

சமன்பாடு (2) லிருந்து சமன்பாடு (1) ஐக் கழிக்க, நாம் பெறுவது $9d = 18$ -லிருந்து $d = 2$

$d = 2$ எனச் சமன்பாடு (1) –யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது $a + 12 = -1$ எனவே, $a = -13$

ஆகவே, பொது உறுப்பு $t_n = a + (n - 1) d$

$= -13 + (n - 1) \times 2 = 2n - 15$

2.28 ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையின் l, m மற்றும் n –வது உறுப்புகள் முறையே x, y மற்றும் z எனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)=0$

(ii) $(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m=0$

தீர்வு :

(i) முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d என்க.

$t_1 = x, t_m = y, t_n = z$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

பொது உறுப்பு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$a+(l-1)d = x$ ...(1)

$a+(m-1)d = y$ ...(2)

$a+(n-1)d = z$ ...(3)

$$x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)$$
$$= a[(m-n)+(n-l)+(l-m)]+d[(m-n)(l-1)+(n-l)(m-1)+(l-m)(n-1)]$$
$$= a[0]+d[lm-ln-m+n+mn-lm-n+l+ln-mn-l+m]$$
$$= a(0)+d(0)=0$$

(ii) சமன்பாடு (1) –லிருந்து (2), (2) –லிருந்து (3), (3) –லிருந்து (1) ஐக் கழித்தால் நாம் பெறுவது,

$x-y = (l-m)d$

$y-z = (m-n)d$

$z-x = (n-l)d$

$$(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m=[(l-m)n+(m-n)l+(n-l)m]d$$
$$=[ln-mn+lm-nl+nm-lm]d=0$$

2.29 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 மற்றும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276. அந்த நான்கு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு : கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த நான்கு எண்களை (a – 3d), (a – d), (a + d) மற்றும் (a + 3d) என எடுத்துக்கொள்வோம்.

நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 என்பதால்,

$a-3d+a-d+a+d+a+3d=28$

$4a = 28$ –லிருந்து $a = 7$

இது போலவே, அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276 என்பதால்,

$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=276$

$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2=276$

$4a^2+20d^2=276$ -லிருந்து $4(7)^2+20d^2=276$.

$d^2 = 4$ -லிருந்து $d = \pm 2$

$a = 7, d = 2$ எனில், தேவையான நான்கு எண்கள் 7 – 3(2), 7 – 2, 7 + 2, மற்றும் 7 + 3(2) அதாவது 1, 5, 9 மற்றும் 13.

$a = 7, d = -2$ எனில், தேவையான நான்கு எண்கள் 13, 9, 5 மற்றும் 1.

எனவே, கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த நான்கு எண்கள் 1, 5, 9 மற்றும் 13.

2.30 ஒரு தாய் தன்னிடம் உள்ள ₹ 207 ஐ கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் மூன்று பாகங்களாகப் பிரித்துத் தனது மூன்று குழந்தைகளுக்கும் கொடுக்க விரும்பினார். அவற்றில் இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் ₹ 4623 ஆகும். ஒவ்வொரு குழந்தையும் பெறும் தொகையினைக் காண்க.

தீர்வு :

மூன்று குழந்தைகள் பெறும் தொகை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைவதால் அவற்றை, a – d, a, a + d என்க. தொகையின் கூடுதல் ₹ 207 என்பதால்

$(a-d)+a+(a+d) = 207$

$3a = 207$ -லிருந்து $a = 69$

இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் 4623 என்பதால்

$(a-d)a = 4623$

$(69-d)69 = 4623$

$d = 2$

எனவே மூன்று குழந்தைகளுக்கும் தாய் பிரித்துக் கொடுத்த தொகை ₹ (69 – 2), ₹ 69, ₹ (69 + 2). அதாவது, ₹ 67, ₹ 69 மற்றும் ₹ 71.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான இரு உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் _____

விடை: மாறாத எண்ணாக இருக்கும்.

2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d எனில் அதன் 8 –வது உறுப்பு _____

விடை: $t_8 = a + 7d$

3. t_n என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு எனில், $t_{2n} - t_n$ –யின் மதிப்பு ___

விடை: nd

4. மாறிலிக் கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் ___

விடை: பூச்சியம்.

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு a, கடைசி உறுப்பு l எனில் அத்தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை _____.

விடை: $n=\frac{l-a}{d}+1$

6. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3 ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசம் _____

விடை: 3 × பழைய கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம்

7. a, b, c என்ற மூன்று எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே _____

விடை: $2b = a + c$

சிந்தனைக் களம்

1. t_n என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n வது உறுப்பு எனில் $t_{n+1} - t_{n-1}$ யின் மதிப்பு _____

விடை:

$$t_{n+1} - t_{n-1} = [a + ((n+1) - 1)\,d] - [a + ((n-1) - 1)d]$$
$$= [a + d(n+1) - d] - [a + d(n-1) - d]$$
$$= [a + nd + d - d] - [a + nd - d - d]$$
$$= a + nd - a - nd + 2d$$
$$= 2d$$

பயிற்சி 2.5

1. பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையா எனச் சோதிக்கவும்.

(i) $a-3, a-5, a-7, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

(iii) 9, 13, 17, 21, 25,...

(iv) $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$

(v) 1, –1, 1, –1, 1, –1,....

தீர்வு :

(i) $a-3, a-5, a-7, \ldots$

$$t_2 - t_1 = a - 5 - [a - 3]$$
$$= a - 5 - a + 3$$
$$= -2$$
$$t_3 - t_2 = a - 7 - (a - 5)$$
$$= a - 7 - a + 5$$
$$= -2$$
$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$$

∴ அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது.

∴ $a-3, a-5, a-7, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும்.

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$$
$$t_3 - t_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3-4}{12} = \frac{-1}{12}$$
$$t_4 - t_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{4-5}{20} = \frac{-1}{20}$$

$\therefore t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2 \neq t_4 - t_3$

∴ இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக இல்லை.

∴ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை இல்லை.

(iii) 9, 13, 17, 21, 25,...

$$t_2 - t_1 = 13 - 9 = 4$$
$$t_3 - t_2 = 17 - 13 = 4$$
$$t_4 - t_3 = 21 - 17 = 4$$
$$t_5 - t_4 = 25 - 21 = 4$$
$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = t_5 - t_4 = 4.$$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது.

∴ 9, 13, 17, 21, 25, ... என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும்.

(iv) $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$

$$t_2 - t_1 = 0 - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$
$$t_3 - t_2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$
$$t_4 - t_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \frac{1}{3}$$

∴ அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது.

∴ $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும்.

(v) 1, –1, 1, –1, 1, –1,...

$$t_2 - t_1 = (-1) - 1 = -2$$
$$t_3 - t_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$
$$t_4 - t_3 = -1 - 1 = -2$$
$$t_5 - t_4 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$
$$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$$

∴ இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக இல்லை.

∴ 1, –1, 1, –1, 1, –1,... என்பது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை இல்லை.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்ததியாசம் d க்குக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.

(i) a = 5, d = 6, (ii) a = 7, d = – 5

(iii) $a=\frac{3}{4}, d=\frac{1}{2}$

தீர்வு :

(i) a = 5, d = 6

முதல் உறுப்பு a = 5; பொது வித்தியாசம் d = 6.

கூட்டுத்தொடர் வரிசை

a, a + d, a + 2d, a+ 3d,...

இங்கு 5, 5 + 6, 5 + 2(6), 5 + 3 (6),...

⇒ 5, 11, 17, 23,...

தேவையான கூட்டுத்தொடர் வரிசை 5,11,17,23,....

(ii) a = 7; d = – 5

கூட்டுத்தொடர் வரிசை

a, a + d, a + 2d, a + 3d,...

இங்கு 7, 7 + (– 5), 7 + 2(– 5), 7 + 3 (– 5),...

⇒ 7, 2, – 3, – 8,...

தேவையான கூட்டுத்தொடர் வரிசை

7, 2, –3, – 8,...

(iii) $a=\frac{3}{4}, d=\frac{1}{2}$

கூட்டுத்தொடர் வரிசை

a, a + d, a + 2d, a + 3d,...

இங்கு $\frac{3}{4}, \frac{3}{4}+\frac{1}{2}, \frac{3}{4}+2\left(\frac{1}{2}\right), \frac{3}{4}+3\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$

$\Rightarrow \frac{3}{4}, \frac{3+2}{4}, \frac{3+4}{4}, \frac{3+6}{4}, \ldots$

$\Rightarrow \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \ldots$

தேவையான கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \ldots$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொது உறுப்புகளையுடைய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் காண்க.

(i) $t_n = – 3 + 2n$ (ii) $t_n = 4 – 7n$

தீர்வு :

(i) $t_n = – 3 + 2n$

கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n –வது உறுப்பு $t_n = – 3 + 2n$

$n = 1 \Rightarrow t_1 = – 3 + 2(1) = – 3 + 2$

$a = t_1 = – 1$

$n = 2 \Rightarrow t_2 = – 3 + 2 (2) = – 3 + 4$

$t_2 = 1$

பொது வித்தியாசம் $d = t_2 – t_1 = 1 – (– 1)$

$= 1 + 1 = 2$

∴ முதல் உறுப்பு a = – 1; பொது வித்தியாசம் d = 2

(ii) $t_n = 4 – 7n$

கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n –வது உறுப்பு $t_n = 4 – 7n$

$n = 1 \Rightarrow t_1 = 4 – 7 (1) = 4 – 7 = – 3$

$a = t_1 = – 3$

$n = 2 \Rightarrow t_2 = 4 – 7(2) = 4 – 14 = – 10$

பொது வித்தியாசம் $d = t_2 – t_1 = – 10 – (– 3)$

$= – 10 + 3 = – 7$

முதல் உறுப்பு a = – 3; பொது வித்தியாசம் d = – 7

4. –11, –15, –19, ... என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 19 –வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு : 11, – 15, – 19,.... என்பது தரப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசை

இங்கு முதல் உறுப்பு a = – 11

பொது வித்தியாசம் $d = t_2 – t_1 = – 15 – (– 11)$

$= – 15 + 11$

$d = – 4$

∴ n- ஆவது உறுப்பு $t_n = a + (n – 1) d$

∴ 19- ஆவது உறுப்பு $(t_{19}) = – 11 + (19 – 1) (– 4)$

$= – 11 + 18 (– 4)$

$= – 11 + (– 72) = – 83$

∴ –11, – 15, – 19,...-இன் 19 ஆவது உறுப்பு – 83.

5. 16, 11, 6, 1,... என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் –54 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?

தீர்வு : 16, 11, 6, 1, ...என்பது தரப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசை

இங்கு a = 16, d = 11 – 16 = – 5

கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 'n' வது உறுப்பு

$t_n = a + (n – 1) d$

$t_n = – 54$ எனில்

$– 54 = 16 + (n – 1) (–5)$

$– 54 – 16 = (n – 1) (–5)$

$\frac{– 70}{– 5} = n – 1$

$14 = n – 1$

$14 + 1 = n$

$n = 15$

∴ 16, 11, 6, 1,... இன் 15 ஆவது உறுப்பு – 54.

6. 9, 15, 21, 27,..., 183 என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் நடு உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : 9, 15, 21, 27,... 183 என்பது தரப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$a = 9, d = 15 - 9 = 6$

கடைசி உறுப்பு $l = 183$

$$\begin{aligned} l &= a + (n-1)\,d \\ 183 &= 9 + (n-1)\,(6) \\ 183 - 9 &= (n-1)\,6 \\ 174 &= (n-1)\,6 \\ \frac{174}{6} &= n - 1 \\ 29 &= n - 1 \\ n &= 29 + 1 = 30 \end{aligned}$$

∴ கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 30 ஆகும்.

30 ஓர் இரட்டை எண்

∴ $\left(\frac{30}{2}\right)^{\text{வது}}, \left(\frac{30}{2}+1\right)^{\text{வது}}$ உறுப்புகள் நடு உறுப்புகளாகும்.

அதாவது, 15வது, 16வது உறுப்புகள் நடு உறுப்புகளாகும்.

$$\begin{aligned} t_{15} &= 9 + (15-1)\,(6) \\ &= 9 + 14\,(6) = 9 + 84 \\ t_{15} &= 93 \\ t_{16} &= 9 + (16-1)\,(6) \\ &= 9 + 15\,(6) = 9 + 90 \\ t_{16} &= 99 \end{aligned}$$

நடு உறுப்புகள் $t_{15} = 93$ மற்றும் $t_{16} = 99$

7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒன்பதாவது உறுப்பின் ஒன்பது மடங்கும், பதினைந்தாவது உறுப்பின் பதினைந்து மடங்கும் சமம் எனில் இருபத்து நான்காவது உறுப்பின் ஆறு மடங்கானது பூச்சியம் என நிறுவுக.

தீர்வு : கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு $t_n = a + (n-1)d$ கணக்கின்படி

9 வது உறுப்பின் 9 மடங்கு = 15 வது உறுப்பின் 15 மடங்கு

$$\begin{aligned} 9 \times t_9 &= 15 \times t_{15} \\ 9\,[a + (9-1)d] &= 15\,[a + (15-1)d] \\ 9\,(a + 8d) &= 15\,(a + 14\,d) \\ 9a + 72\,d &= 15\,a + 210\,d \\ 15\,a + 210\,d - 9a - 72\,d &= 0 \\ 6a + 138\,d &= 0 \\ 6\,(a + 23\,d) &= 0 \\ 6\,[a + (24-1)d] &= 0 \\ 6 \times t_{24} &= 0 \end{aligned}$$

∴ 24 ஆவது உறுப்பின் 6 மடங்கு = 0

8. $3 + k, 18 - k, 5k + 1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், k –யின் மதிப்புக் காண்க

தீர்வு :

$3 + k, 18 - k, 5k + 1$ என்பன கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

$t_1 = 3 + k, t_2 = 18 - k, t_3 = 5k + 1$

∴ அடுத்தடுத்த இரு உறுப்புகளின் வித்தியாசம் சமமாகும்.

$$\begin{aligned} \text{i.e., } t_2 - t_1 &= t_3 - t_2 \\ (18 - k) - (3 + k) &= (5k + 1) - (18 - k) \\ 18 - k - 3 - k &= 5k + 1 - 18 + k \\ 15 - 2k &= 6k - 17 \\ 15 + 17 &= 6k + 2k \\ 32 &= 8k \\ k &= \frac{32}{8} = 4 \end{aligned}$$

9. x, 10, y, 24, z என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், x, y z ஆகியவற்றின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

$t_1 = x,\ t_2 = 10,\ t_3 = y, t_4 = 24, t_5 = z$ என்க.

x, 10, y, 24, z என்பன கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

∴ அடுத்தடுத்த இரு உறுப்புகளின் வேறுபாடு சமமாகும்.

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= t_3 - t_2 = t_4 - t_3 \\ 10 - x &= 24 - y = d \qquad (1) \end{aligned}$$

மேலும் $t_4 - t_2 = 2d$

$$\begin{aligned} 24 - 10 &= 2d \\ 14 &= 2d \\ d &= \frac{14}{2} = 7 \end{aligned}$$

$10 - x = 24 - y = 7$

$10 - x = 7$ எனில், $x = 10 - 7 = 3$

$24 - y = 7$ எனில், $y = 24 - 7 = 17$

மேலும் $z - 24 = 7$ எனில், $z = 24 + 7 = 31$

∴ $x = 3; y = 17; z = 31.$

10. ஒரு சினிமா அரங்கின் முதல் வரிசையில் 20 இருக்கைகளும் மொத்தம் 30 வரிசைகளும் உள்ளன. அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு வரிசையிலும் அதற்கு முந்தைய வரிசையைவிட இரண்டு இருக்கைகள் கூடுதலாக உள்ளன. கடைசி வரிசையில் எத்தனை இருக்கைகள் இருக்கும்?

தீர்வு :

முதல் வரிசையில் உள்ள இருக்கைகள்

$t_1 = 20$

இரண்டாவது வரிசையில் உள்ள இருக்கைகள்

$t_2 = 20 + 2 = 22$

∴ 30 வது வரிசையில் உள்ள இருக்கைகள் t_{30} என்க. ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த வரிசையிலும் 2 இருக்கைகள் கூடுதலாக உள்ளன. எனவே $t_1, t_2, \ldots t_{30}$ ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை அமைக்கும். அதாவது

20, 22, 24,... 30 உறுப்புகள் வரை

இங்கு $a = 20; d = 2$

$t_n = a + (n - 1) d$

$t_{30} = 20 + (30 - 1)(2) = 20 + 29 \times 2$

$= 20 + 58 = 78$

∴ கடைசி வரிசையில் 78 இருக்கைகள் இருக்கும்.

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 27 மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 288 எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் $a - d, a, a + d$ என்க.

அவற்றின் கூடுதல் = 27

$(a - d) + a + (a + d) = 27$

$a - d + a + a + d = 27$

$3a = 27$

$a = \frac{27}{3} = 9$

பெருக்கற்பலன் = 288

$(a - d)\, a\, (a + d) = 288$

$a(a^2 - d^2) = 288$

$9(9^2 - d^2) = 288$

$81 - d^2 = \frac{288}{9}$

$81 - d^2 = 32$

$d^2 = 81 - 32 = 49$

$d \times d = 7 \times 7$

$d = 7$

$a = 9$ மற்றும் $d = 7$

∴ தேவையான உறுப்புகள் $a - d, a, a + d$

$\Rightarrow 9 - 7, 9, 9 + 7 \Rightarrow 2, 9, 16$

∴ தேவையான உறுப்புகள் 2, 9, 16

12. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6வது மற்றும் 8 வது உறுப்புகளின் விகிதம் 7 : 9 எனில், 9வது மற்றும் 13 வது உறுப்புகளின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் 6 வது உறுப்பு : 8 வது உறுப்பு = 7 : 9

$a + (6 - 1) d : a + (8 - 1) d = 7 : 9$

$a + 5d : a + 7d = 7 : 9$

கோடி உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் = நடு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்

$9(a + 5d) = 7(a + 7d)$

$9a + 45d = 7a + 49d$

$9a - 7a = 49d - 45d$

$2a = 4d$

$a = 2d$

9 வது உறுப்பு : 13 வது உறுப்பு

$a + (9 - 1) d : a + (13 - 1) d = a + 8d : a + 12 d$

$= 2d + 8d : 2d + 12 d$

$= 10 d : 14 d$

$= 5 : 7.$

9 வது உறுப்புக்கும் 13 வது உறுப்புக்கும் உள்ள விகிதம் 5 : 7.

13. ஒரு குளிர்காலத்தில் திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை ஊட்டியின் வெப்பநிலை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன. திங்கள் கிழமை முதல் புதன் கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் 0°C மற்றும் புதன்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் 18°C எனில், ஐந்து நாட்களின் வெப்பநிலைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

வெப்பநிலை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளது. திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன் மற்றும் வெள்ளியின் வெப்பநிலை t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 என்க.

கணக்கின்படி $t_1 + t_2 + t_3 = 0\ ^\circ C$

$a + a + d + a + 2d = 0\ ^\circ C$

$3a + 3d = 0 \quad \ldots(1)$

மேலும் $t_3 + t_4 + t_5 = 18\ ^\circ C$

$a + 2d + a + 3d + a + 4d = 18\ ^\circ C$

$3a + 9d = 18\ ^\circ C \quad \ldots(2)$

$3a + 3d = 0$ [(1) இலிருந்து] $\quad \ldots(3)$

$(2) - (3) \Rightarrow 6d = 18\ ^\circ C$

$$d = \frac{18}{6}$$

$$d = 3\ ^{\circ}C$$

$d = 3\ ^{\circ}C$ என (1) இல் பிரதியிட,

$$3a + 3 \times 3 = 0$$

$$3a = -9$$

$$a = \frac{-9}{3} = -3\ ^{\circ}C$$

$\therefore \quad t_1 = -3\ ^{\circ}C,\ t_2 = (-3) + 3 = 0\ ^{\circ}C,$

$t_3 = -3 + 2(3) = 3\ ^{\circ}C,$

$t_4 = -3 + 3(3) = 6\ ^{\circ}C,$

$t_5 = -3 + 4(3) = 9\ ^{\circ}C.$

$\therefore$ $-3\ ^{\circ}C, 0\ ^{\circ}C, 3\ ^{\circ}C, 6\ ^{\circ}C, 9\ ^{\circ}C$ என்பன 5 நாட்களின் வெப்பநிலைகள் ஆகும்.

14. பிரியா தனது மாத வருமானமாக ₹ 15,000 ஈட்டுகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அவரது மாத வருமானம் ₹ 1500 உயர்கிறது. அவளுடைய முதல் மாத செலவு ₹ 13,000 மற்றும் அவளது மாதாந்திரச் செலவு ஒவ்வோர் ஆண்டும் ₹ 900 உயர்கிறது. பிரியாவின் மாதாந்திரச் சேமிப்பு ₹ 20,000 அடைய எவ்வளவு காலம் ஆகும்?

தீர்வு :

முதல் மாத வருமானம் $t_1 = ₹\ 15,000$

ஒவ்வொரு ஆண்டும் உயரும் வருமானம்

$d = ₹\ 1,500$

முதல் மாதச் செலவு = ₹ 13,000

ஒவ்வொரு ஆண்டும் உயரும் செலவு

= ₹ 900

எனவே

$(15000 - 13000), (16500 - 13900), (18000 - 14800), \ldots$

அதாவது 2000, 2600, 3200, ...என்பது வருட சேமிப்பு ஆகும்.

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$, எனவே இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை அமைக்கும்.

$a = 2000, \quad d = 2600 - 2000 = 600$

n ஆவது ஆண்டு வருமானம் ₹ 20,000 எனில்

$a + (n - 1)\, d = t_n$

$$2000 + (n - 1)(600) = 20,000$$

$$(n - 1)\ 600 = 20,000 - 2000$$

$$(n - 1)\ 600 = 18000$$

$$n - 1 = \frac{18000}{600} = 30$$

$$n = 30 + 1 = 31$$

$\therefore$ 20000 மாதம் சேமிக்க 31 ஆண்டுகள் ஆகும்.

தொடர்கள்

நினைவில் கொள்க

- ஒரு தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளின் கூடுதல் தொடர் எனப்படும்.
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ என்பது ஒரு மெய்யெண் தொடர்வரிசை என்க. இங்கு $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$என்பது மெய்யெண் தொடர் ஆகும்.
- ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறு தொடர் எனப்படும்.
- ஒரு தொடரில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறாத் தொடர் எனப்படும்.

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல் (sum to n terms of an A.P)

- கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $a + (a + d) + (a + 2d=) + \ldots\ldots$;

  $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\, d]$

- 'l' கடைசி உறுப்பு எனில் $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையுமானால் அத்தொடர் கூட்டுத் தொடர் எனப்படும்.

a, a + d, a + 2d, a + 3d,.... என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில்.

முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + [a + (n - 1) d]$ ...(1)

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையைக் கடைசியிலிருந்து முதலாவது உறுப்புவரை மாற்றி எழுத நாம் பெறுவது,

$S_n = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2)d] + ...+ (a + d) + a$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$2S_n = [a + a + (n - 1)d] + [a + d + a + (n - 2) d] + ... + [a+ (n - 2) d + (a + d)] + [a + (n - 1) d + a]$

$= [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1) d] + ... + [2a + (n - 1)d]$ (n உறுப்புகள்)

$2S_n = n \times [2a + (n - 1)d]$ $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

குறிப்பு

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு a, மற்றும் கடைசி உறுப்பு l (n –வது உறுப்பு) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$. [ஏனெனில், $l = a + (n - 1) d$]

எடுத்துக்காட்டு

2.31 $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}$, ... என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் 15 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : இங்கு முதல் உறுப்பு a = 8, பொது வித்தியாசம் $d = 7\frac{1}{4} - 8 = -\frac{3}{4}$,

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2 \times 8 + (15-1)\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[16 - \frac{21}{2}\right] = \frac{165}{4}$$

2.32 0.40 + 0.43 + 0.46 + .. + 1 என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு: இங்கு n–ன் மதிப்பு கொடுக்கப்படவில்லை. ஆனால் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து நாம் முதலில் n –ன் மதிப்பைக் கண்டறியலாம்.

a = 0.40 மற்றும் l = 1, d = 0.43 – 0.40 = 0.03

ஆகவே, $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$

$$= \left(\frac{1 - 0.40}{0.03}\right) + 1 = 21$$

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்,

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

இங்கு, n = 21. எனவே,

$$S_{21} = \frac{21}{2}[0.40 + 1] = 14.7$$

ஆகவே, கூட்டுத் தொடரின் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் 14.7 ஆகும்.

2.33 1 + 5 + 9 + ... என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 190 கிடைக்கும்?

தீர்வு : இங்கு நாம் S_n = 190 எனில், n –யின் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

முதல் உறுப்பு a = 1,

பொது வித்தியாசம் d = 5 – 1 = 4.

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n – உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 190$$

$$\frac{n}{2}[2\times 1 + (n-1)\times 4] = 190$$

$$n[4n - 2] = 380$$

$$2n^2 - n - 190 = 0$$

$$(n - 10)(2n + 19) = 0$$

ஆனால் n = 10 ஏனெனில் $n = -\frac{19}{2}$ என்பது பொருந்தாது. எனவே, n = 10.

2.34 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 13–வது உறுப்பு 3 மற்றும் முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் 234 எனில், கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசம் மற்றும் முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

13 –வது உறுப்பு = 3 என்பதால், $t_{13} = a + 12d = 3$ ...(1)

முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் = 234 என்பதால்

$$S_{13} = \frac{13}{2}[2a + 12d] = 234$$

$$2a + 12d = 36 \quad ...(2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஐத் தீர்க்க நாம் பெறுவது,

$$a = 33,\ d = \frac{-5}{2}$$

எனவே, பொது வித்தியாசம் $\frac{-5}{2}$

முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_{21} = \frac{21}{2}\left[2\times 33 + (21-1)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{21}{2}[66 - 50) = 168$$

2.35 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{5n^2}{2} + \frac{3n}{2}$ எனில், 17 வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் 17 உறுப்புகளின் கூடுதலிலிருந்து முதல் 16 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கழித்தால் 17 வது உறுப்பைக் காணலாம்.

$$S_{17} = \frac{5\times(17)^2}{2} + \frac{3\times 17}{2} = \frac{1445}{2} + \frac{51}{2} = 748$$

$$S_{16} = \frac{5\times(16)^2}{2} + \frac{3\times 16}{2} = \frac{1280}{2} + \frac{48}{2} = 664$$

$$t_{17} = S_{17} - S_{16} = 748 - 664 = 84$$

2.36 300 க்கும் 600 க்கும் இடையே 7 –ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : 300 –க்கும் 600 –க்கும் இடையே 7 –ஆல் வகுபடும் இயல் எண்கள் 301, 308, 315, ...595.

300 –க்கும் 600 –க்கும் இடையே 7 –ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல் 301+ 308 + 315 + ... + 595.

மேற்கண்ட தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளன. முதல் உறுப்பு a = 301; பொது வித்தியாசம் d = 7;

கடைசி உறுப்பு $l = 595$.

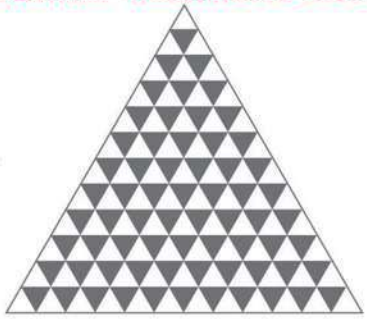
$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$$

$$= \left(\frac{595 - 301}{7}\right) + 1 = 43$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$, என்பதால்

$$S_{43} = \frac{43}{2}[301 + 595] = 19264$$

2.37 சிறிய தரையோடுகளைக் கொண்டு 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோண தரையோடுகள் அமைக்கப்படுகிறது. அவற்றில் உள்ள ஒவ்வொரு தரையோடும் 12 அங்குல அளவிலான சமபக்க முக்கோண வடிவில் உள்ளது. சிறிய தரையோடுகளின் வண்ணங்கள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போல மாறி மாறி உள்ளன. ஒவ்வொரு வண்ணத்திலும் உள்ள தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பில் உள்ள மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை காண்க.



தீர்வு :

தரையோடுகள் ஆனது 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணமாகவும் மற்றும் ஒவ்வொரு சிறிய தரையோடும் 12 அங்குல (1 அடி) பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணமாகவும் இருப்பதால், இந்த அமைப்பில் 12 வரிசைகளில் சிறிய தரையோடுகள் அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

படத்திலிருந்து ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள வெள்ளைநிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை 1, 2, 3, 4,...,12 என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசை என அறியலாம்.

இது போல ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள நீல நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, ..., 11. இதுவும் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாகும்.

வெள்ளை நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + 12$$
$$= \frac{12}{2}[1 + 12] = 78$$

நீல நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை

$$= 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 11$$
$$= \frac{12}{2}[0 + 11] = 66$$

மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை

$$= 78 + 66 = 144$$

2.38 ஒரு தெருவிலுள்ள வீடுகளுக்கு 1 முதல் 49 வரை தொடர்ச்சியாகக் கதவிலக்கம் வழங்கப்பட்டுள்ளது. செந்திலின் வீட்டிற்கு முன்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது செந்திலின் வீட்டிற்குப் பின்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம் எனில், செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கம் x என்க.

கணக்கின்படி $1 + 2 + 3 + \ldots + (x - 1)$

$$= (x + 1) + (x + 2) + \ldots + 49$$

$$1 + 2 + 3 \ldots + (x - 1) = [1 + 2 + 3 + \ldots + 49] - [1 + 2 + 3 + \ldots + x]$$

$$\frac{x-1}{2}[1 + (x - 1)] = \frac{49}{2}[1 + 49] - \frac{x}{2}[1 + x]$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{49 \times 50}{2} - \frac{x(x+1)}{2}$$

$$x^2 - x = 2450 - x^2 - x \text{ லிருந்து}$$

$$2x^2 = 2450$$

$$x^2 = 1225 \text{ லிருந்து } x = 35$$

எனவே, செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கம் 35 ஆகும்.

2.39 S_1, S_2, S_3 என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n, 2n, 3n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும், $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

S_1, S_2, S_3 என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n, 2n, 3n உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில்

$$S_1 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

$$S_2 = \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)d], \qquad S_3 = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d]$$

தற்போது

$$S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)d] - \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}\left[[4a + 2(2n-1)d] - [2a + (n-1)d]\right]$$
$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2} \times [2a + (3n-1)d]$$
$$3(S_2 - S_1) = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d]$$
$$3(S_2 - S_1) = S_3$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல் _____.

விடை: தொடர்

2. ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது _____ எனப்படும்.

விடை: முடிவுறு தொடர்.

3. ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் _____ யில் அமைந்தால் அத்தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனப்படும்.

விடை: கூட்டுத் தொடர் வரிசையில்.

4. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு மற்றும் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டால் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _____.

விடை: $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

5. சரியா, தவறா எனக் கூறுக.

(i) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பானது pn + q என்ற வடிவில் அமையும், இங்கு p மற்றும் q ஆனது மாறிலிகள்.

விடை: சரி

(ii) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது $pn^2 + qn + r$ என்ற வடிவில் அமையும். இங்கு p, q, r என்பன மாறிலிகள்.

விடை: தவறு

சிந்தனைக் களம்

1. n –யின் மதிப்பு மிகை முழுவாக மட்டுமே இருக்கவேண்டும். ஏன்?

விடை: n என்பது கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

∴ ஒரு மிகை முழுவாக மட்டுமே இருக்கும்.

2. முதல் 'n' ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் என்ன?

விடை: முதல் n ஒற்றை இயல் எண்கள்

1, 3, 5, 7,... n உறுப்புகள் வரை

$a = 1,\ d = 3 - 1 = 2;$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை

$$= \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)(2)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$

$$= \frac{n}{2}[2n] = n^2$$

∴ முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $= n^2$

3. முதல் 'n' இரட்டை இயல் எண்களின் கூடுதல் என்ன?

விடை: n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

முதல் n இரட்டை இயல் எண்கள்

2, 4, 6, 8, ... n உறுப்புகள் வரை.

$a = 2;\ d = 4 - 2 = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}[2(2) + (n-1)(2)]$$

$$= \frac{n}{2}[4 + 2n - 2] = \frac{n}{2}[2n + 2]$$

$$= \frac{n}{2} \times 2(n+1) = n(n+1)$$

∴ முதல் n இரட்டை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$= n(n + 1)$

பயிற்சி 2.6

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.

(i) 3, 7, 11,... 40 உறுப்புகள் வரை

(ii) 102, 97, 92, ... 27 உறுப்புகள் வரை

(iii) 6 + 13 + 20 + ...+ 97

தீர்வு :

(i) 3, 7, 11, ... 40 உறுப்புகள் வரை

கூட்டுத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$$

இங்கு $d = 7 - 3 = 11 - 7 = 4$

∴ $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ எனவே இது கூட்டுத் தொடராகும்.

இங்கு $a = 3, d = 4$

$$\therefore S_{40} = \frac{40}{2}[2(3) + (40-1)(4)]$$

$$= 20[6 + (39 \times 4)] = 20[6 + 156]$$

$$= 20[162] = 3240$$

முதல் 40 உறுப்புகளின் கூடுதல் $= 3240$

(ii) 102, 97, 92, ...27 உறுப்புகள் வரை

இங்கு $t_2 - t_1 = 97 - 102 = -5$

$t_3 - t_2 = 92 - 97 = -5$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

எனவே இது ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

இங்கு $a = 102,\quad d = -5$

முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}[2(102) + (27-1)(-5)]$$

$$= \frac{27}{2}[204 + 26(-5)]$$

$$= \frac{27}{2}[204 - 130]$$

$$= \frac{27}{2} \times 74$$

$$= 27 \times 37$$

முதல் 27 உறுப்புகளின் கூடுதல் $= 999$

(iii) $6 + 13 + 20 + \ldots + 97$

இங்கு $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$\Rightarrow 13 - 6 = 20 - 13 = 7$

∴ இது ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

∴ கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$a = 6; l = 97$

$a + (n-1)d = 97$

$6 + (n-1)(7) = 97$

$(n-1)7 = 97 - 6$

$(n-1)7 = 91$

$$n - 1 = \frac{91}{7} = 13$$

$$n = 13 + 1 = 14$$

எனவே $S_n = \frac{14}{2}(6 + 97) = 7 \times 103$

$$6 + 13 + 20 + ... + 97 = 721$$

2. 5 –லிருந்து தொடங்கி எத்தனை தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்களைக் கூட்டினால் கூடுதல் 480 கிடைக்கும்?

தீர்வு :

5 இல் தொடங்கிய தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்கள் 5, 7, 9, 11,.... என்க.

இங்கு a = 5, d = 2

கூட்டுத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$480 = \frac{n}{2}[2(5) + (n-1)(2)]$$

$$480 = \frac{2n}{2}[5 + n - 1]$$

$$480 = n(n + 4)$$

$$n^2 + 4n - 480 = 0$$

$$(n - 20)(n + 24) = 0$$

$$n = 20 \text{ (or) } -24$$

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை குறை முழுவாக இருக்க இயலாது.

$\therefore n = 20$

தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 20.

3. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு 4n – 3 எனில், அதன் முதல் 28 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : கணக்கின்படி

$n = 28$

$t_n = 4n - 3$

$t_1 = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1 = a$

$t_2 = 4(2) - 3 = 8 - 3 = 5$

$\therefore d = t_2 - t_1 = 5 - 1 = 4$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{28}{2}[2(1) + (28 - 1)(4)]$

$= 14[2 + 27(4)] = 14[2 + 108]$

$= 14 \times 110 = 1540$

கூட்டுத் தொடரின் முதல் 28 உறுப்புகளின் கூடுதல் = 1540

4. ஒரு குறிப்பிட்ட தொடரின் முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல் $2n^2 - 3n$ எனில், அது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$S_n = 2n^2 - 3n$

$\therefore$ முதல் உறுப்பு $S_1 = 2(1)^2 - 3(1) = 2 - 3$

$= -1 = t_1$

முதல் இரு உறுப்புகளின் கூடுதல்

$S_2 = 2(2)^2 - 3(2)$

$= 8 - 6 = 2$

$\therefore t_2 = S_2 - S_1$

$= 2 - (-1) = 2 + 1$

$t_2 = 3$

முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல்

$S_3 = 2(3)^2 - 3(3)$

$= 18 - 9 = 9$

$\therefore t_3 = S_3 - S_2 = 9 - 2$

$t_3 = 7$

இங்கு $t_2 - t_1 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$

$t_3 - t_2 = 7 - 3 = 4$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$\therefore$ இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசை ஆகும்.

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 104 வது உறுப்பு மற்றும் 4 வது உறுப்புகள் முறையே 125 மற்றும் 0. அத்தொடர்வரிசையின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

104 வது உறுப்பு = 125

$t_{104} = 125$

$a + (104 - 1)d = 125$

$a + 103d = 125$ ...(1)

4 வது உறுப்பு 0 ஆகும்.

அதாவது,

$a + (4 - 1)d = 0$

$a + 3d = 0$ ...(2)

(1) – (2) $\Rightarrow 100d = 125$

$d = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

$d = \frac{5}{4}$ என (2) இல் பிரதியிட

$a + 3d = 0$

$a + 3\left(\frac{5}{4}\right) = 0$

$a + \frac{15}{4} = 0$

$$a = \frac{-15}{4}$$

∴ முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_{35} = \frac{35}{2}\left[2\left(\frac{-15}{4}\right) + (35-1)\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{35}{2}\left[\frac{-15}{2} + 34\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{35}{2}\left[\frac{-15}{2} + 17\,\frac{(5)}{2}\right]$$

$$= \frac{35}{2}\left[\frac{-15}{2} + \frac{85}{2}\right]$$

$$= \frac{35}{2}\left[\frac{70}{2}\right] = \frac{2450}{4} = \frac{1225}{2}$$

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடரின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் = 612.5

6. 450 –க்குக் குறைவாக உள்ள அனைத்து ஒற்றை மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

450 க்குக் குறைவான ஒற்றை மிகை முழுக்களின் கூடுதல்

= 1+ 3 + 5 + 7 + ... + 449

இங்கு a = 1; d = 2; l = 449.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$$

$$n = \frac{449-1}{2} + 1 = \frac{448}{2} + 1 = 224 + 1 = 225$$

முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் = n^2

∴ முதல் 225 ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$= 225^2 = 225 \times 225$

1 + 3 + 5 + ... + 449 = 50625

7. 602 –க்கும் 902 –க்கும் இடையே 4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

602 க்கும் 902 க்கும் இடையில் உள்ள 4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் =

602 க்கும் 902 க்கும் இடையில் உள்ள எல்லா இயல் எண்களின் கூடுதல் – 602 க்கும் 902 க்கும் இடையில் உள்ள 4 ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

∴ 'முதல் n' இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

603 + 604 + ... + 901 = (1 + 2 + ... + 901) – (1+ 2 + 3 + ... +602)

$$= \frac{901 \times (901+1)}{2} - \frac{602 \times (602+1)}{2}$$

$$= \frac{901 \times 902}{2} - \frac{602 \times 603}{2}$$

= 4, 06, 351 – 1, 81, 503

= 2, 24, 848

602 க்கும் 902 க்கும் இடைப்பட்ட 4 ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல்

604 + 608 + ... + 900

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$$

$$= \left(\frac{900 - 604}{4}\right) + 1$$

$$= \left(\frac{296}{4}\right) + 1 = 74 + 1 = 75$$

$$S_n = \frac{75}{2}[2(604) + (75-1)(4)]$$

$$= \frac{75}{2} \times 2[604 + (74 \times 2)]$$

$$= 75 \times 752$$

$$= 56400$$

தேவையான கூடுதல்

= 224848 – 56400

= 1, 68, 448

8. இரகு ஒரு மடிக்கணினி வாங்க விரும்புகிறார். அவர் அதற்கான தொகையான ₹ 40,000 –ஐ உடனடியாக பணமாகவும் செலுத்தலாம் அல்லது 10 மாதத் தவணைகளில் முதல் தவணை ₹ 4800, இரண்டாம் தவணை ₹ 4750, மூன்றாம் தவணை ₹ 4700 என்ற அடிப்படையிலும் செலுத்தலாம். அவர் இந்த வகையில் பணம் செலுத்துகிறார் எனில்,

(i) 10 மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை

(ii) மாதத் தவணை அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும்போது அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) உடனடி பணமாகச் செலுத்தினால் மடிக்கணினியின் விலை = ₹ 40000

தவணை அடிப்படையில் பணம் செலுத்தினால் மடிக்கணினியின் விலை

₹ 4800 + ₹ 4750 + ₹ 4700 + ...10 மாதங்கள்.

∴ இது ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கும்.

இங்கு $a = ₹ 4800$

$d = 4750 - 4800 = -50$

$n = 10$

$$S_n = \frac{10}{2}[2(4800) + (10-1)(-50)]$$

$$= \frac{10 \times 2}{2}[4800 + 9 \times (-25)]$$

$$= 10\,[4800 - 225]$$

$$= 10 \times 4575 = ₹ 45750$$

∴ 10 தவணைகளில் செலுத்திய மொத்த தொகை =₹ 45750

(ii) தவணை முறையில் வாங்குவதால் அதிகமாக செலவாகும் தொகை

= ₹ 45750 – ₹ 40000 = 5750

அவர் ₹ 5750 அதிகமாக தவணை முறையில் செலுத்துவார்.

9. ஒருவர் தான் பெற்ற ₹ 65000 கடனை திருப்பிச் செலுத்த முதல் மாதம் ₹ 400 செலுத்துகிறார். அதன்பிறகு ஒவ்வொரு மாதமும் முந்தைய மாதம் செலுத்தியதைவிட ₹ 300 கூடுதலாகச் செலுத்துகிறார். அவர் இந்தக் கடனை அடைக்க எவ்வளவு காலம் தேவைப்படும்?

தீர்வு :

திருப்பிச் செலுத்த வேண்டிய மொத்த தொகை = ₹ 65000

அவர் முதல் தவணை ₹ 400 –ம் அதன் பின் வரும் மாதம் ஒவ்வொன்றிலும் ₹ 300 அதிகமாகச் செலுத்துகிறார்.

அதாவது, 400, 700, 1000, ...

$a = 400, d = 300$

∴ இது ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$65000 = \frac{n}{2}[2(400) + (n-1)300]$$

$$65000 = \frac{n}{2} \times 2\,[400 + (n-1)150]$$

$$= n\,[400 + 150n - 150]$$

$$= n\,[150n + 250]$$

$$65000 = 150n^2 + 250n$$

50 ஆல் வகுக்க

$$1300 = 3n^2 + 5n$$

$$3n^2 + 5n - 1300 = 0$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-1300)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 15600}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{15625}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm 125}{6} = \frac{-5-125}{6}, \frac{-5+125}{6}$$

$$n = \frac{-130}{6}, \frac{120}{6}$$

$$n = \frac{-130}{6}, 20$$

n குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது. ∴ n = 20.

அவர் கடனை அடைக்க 20 மாதங்கள் தேவைப்படும்.

10. செங்கற்களினால் கட்டப்பட்ட ஒரு படிக்கட்டில் மொத்தம் 30 படிக்கட்டுகள் உள்ளன. கீழ்ப் படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு 100 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. அடுத்தடுத்த படிக்கட்டுகள் அமைப்பதற்கு முந்தைய படிக்கட்டை விட இரண்டு செங்கற்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது.

(i) உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

(ii) படிக்கட்டுகள் முழுவதும் அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

தீர்வு : மொத்த படிக்கட்டுகளின் எண்ணிக்கை $n = 30$.

கீழ்ப்படிக்கட்டு அமைக்க தேவைப்படும் செங்கற்கள் $a = 100$

ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த படிக்கட்டிற்கும் 2 கற்கள் குறைவாகத் தேவைப்படும். ஒவ்வொரு படிக்கட்டிற்கும் தேவைப்படும் கற்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கும்.

100, 98, 96, ... 30 உறுப்புகள் வரை

$a = 100, d = -2, n = 30$

(i) உச்சி படிக்கட்டை அமைக்க தேவையான கற்கள் l என்க.

$$l = a + (n-1)d$$

$$= 100 + (30-1)(-2)$$

$$= 100 + 29(-2)$$

$$= 100 - 58 = 42$$

∴ உச்சி படிக்கட்டை அமைக்க 42 செங்கற்கள் தேவை.

(ii) முழு படிக்கட்டிற்கும் தேவைப்படும் கற்களின் எண்ணிக்கை

$$S_n = \frac{n}{2}(l+a) = \frac{30}{2}(100+42)$$
$$= 15 \times 142 = 2130$$

மொத்தம் தேவைப்படும் செங்கற்கள் = 2130

11. S_1, S_2, S_3,.... S_m என்பன 'm' வெவ்வேறு கூட்டுத்தொடர் வரிசைகளின் n உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். முதல் உறுப்புகள் 1, 2, 3,... m மற்றும் பொது வித்தியாசங்கள் 1, 3, 5,... (2m–1) முறையே அமைந்தால், அந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் $(S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_m) = \frac{1}{2} mn(mn+1)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

a = 1 மற்றும் d = 1 எனக் கொண்ட கூட்டுத் தொடரின் கூடுதல் S_1 என்க.

a= 2 மற்றும் d = 3 எனக் கொண்ட கூட்டுத் தொடரின் கூடுதல் S_2 என்க.

a = m மற்றும் d = 2m – 1 எனக் கொண்ட கூட்டுத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் S_m என்க.

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_1 = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)(1)] = \frac{n}{2}[2 + n - 1]$$

$$S_1 = \frac{n}{2}[n+1]$$

$$S_2 = \frac{n}{2}[2(2) + (n-1)(3)] = \frac{n}{2}[4 + 3n - 3]$$

$$S_2 = \frac{n}{2}[3n+1]$$

அதுபோல், $S_m = \frac{n}{2}[2(m) + (n-1)(2m-1)]$

$$= \frac{n}{2}[2m + 2mn - n - 2m + 1]$$

$$S_m = \frac{n}{2}[2mn - n + 1]$$

$S_1 + S_2 + ...+ S_m$ ஐக் காண்போம்

இங்கு முதல் உறுப்பு $S_1 = a = \frac{n}{2}(n+1)$ மற்றும்

S_m = கடைசி உறுப்பு

$$l = \frac{n}{2}[2mn - n + 1]$$

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = m

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}(l+a)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + ...S_m = \frac{m}{2}\left[\frac{n}{2}[2mn - n + 1] + \frac{n}{2}(n+1)\right]$$

$$= \frac{m}{2} \times \frac{n}{2}[2mn - n + 1 + n + 1]$$

$$= \frac{1}{4} \times mn(2mn+2) = \frac{1}{4} mn \times 2(mn+1)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + ...S_m = \frac{1}{2} mn(mn+1)$$

12. $\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + ...12 \text{ உறுப்புகள்}\right]$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு $t_2 - t_1 = \frac{3a-2b}{a+b} - \frac{a-b}{a+b}$

$$= \frac{3a-2b-a+b}{a+b} = \frac{2a-b}{a+b}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{5a-3b}{a+b} - \frac{3a-2b}{a+b}$$

$$= \frac{5a-3b-3a+2b}{a+b} = \frac{2a-b}{a+b}$$

$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

∴ இது ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

இங்கு $d = \frac{2a-b}{a+b}$

∴ கூட்டுத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + (12-1)\left(\frac{2a-b}{a+b}\right)\right]$$

$$= 6\left[2\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + 11\left(\frac{2a-b}{a+b}\right)\right]$$

$$= 6 \times \left[\left(\frac{2a-2b}{a+b}\right) + \frac{22a-11b}{a+b}\right]$$

$$= 6\left[\frac{2a-2b+22a-11b}{a+b}\right]$$

$$= 6\left[\frac{[24a-13b]}{a+b}\right]$$

கூடுதல் $S_{12} = \frac{6}{a+b}[24a-13b]$

பெருக்குத் தொடர் வரிசை

நினைவில் கொள்க

வரையறை

- முதல் உறுப்பைத் தவிர்த்து மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை ஒரு பூச்சியமற்ற மாறாத எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொடர்வரிசையானது, பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.
- இந்த மாறாத எண் பொது விகிதம் எனப்படும். பொது விகிதம் r எனக் குறிக்கப்படும்.
- a மற்றும் $r \neq 0$ என்பன மெய்யெண்கள் என்க. $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$ என்ற வடிவில் அமையும் எண்களைப் "பெருக்குத் தொடர்வரிசை" என்கிறோம். இங்கு 'a' என்பது முதல் உறுப்பு என்றும் 'r' என்பது பொது விகிதம் என்றும் அழைக்கப்படும்.
- பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் பொது உறுப்பு அல்லது n –வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$.
- பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் எப்போதும் ஒரு மாறிலியாகத்தான் இருக்கும். இந்த மாறிலிதான் அந்தத் தொடர் வரிசையின் பொது விகிதமாகும்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான நான்கு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினால் அல்லது வகுத்தால் கிடைக்கும் தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.
- a, b, c என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்து இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $b^2 = ac$.

சூத்திரங்கள்:

- ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r \neq 1$. $S_n = na, r = 1$ எனில்
- முடிவிலி பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் $a + ar + ar^2 + \ldots = \frac{a}{1 - r}, -1 < r < 1$.
- $\sum_{K=1}^{n} K = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{K=1}^{n} (2K - 1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
- $\sum_{K=1}^{n} K^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{K=1}^{n} K^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

எடுத்துக்காட்டு

2.40 **பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?**

(i) 7, 14, 21, 28,...

(ii) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$ **, (iii) 5, 25, 50, 75,...**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை, பெருக்குத் தொடர்வரிசையா எனக் கண்டறிய அவற்றின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் சமமாக உள்ளதா எனக் கண்டறிய வேண்டும்.

(i) 7, 14, 21, 28,...

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{14}{7} = 2; \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2};$

$\frac{t_4}{t_3} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 7, 14, 21, 28,... என்ற தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையல்ல.

(ii) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{2}{1} = 2; \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{4}{2} = 2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம் என்பதால் $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் $r = 2$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

(iii) 5, 25, 50, 75,...

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{25}{5} = 5; \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{50}{25} = 2; \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 5, 25, 50, 75,... என்ற தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை அல்ல.

2.41 **பின்வருவனவற்றின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது விகிதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, அதனுடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.**
(i) $a = -7, r = 6$ (ii) $a = 256, r = 0.5$

தீர்வு :

(i) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a, ar, ar^2, \ldots$

$a = -7, ar = -7 \times 6 = -42, ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$

எனவே, தேவையான பெருக்குத்தொடர் வரிசை $-7, -42, -252, \ldots$

(ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் $a, ar, ar^2, \ldots$

$a = 256, ar = 256 \times 0.5 = 128,$

$ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை 256, 128, 64,...

2.42 **9, 3, 1, ...என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 8 –வது உறுப்பைக் காண்க.**

தீர்வு :

8 –வது உறுப்பைக் காண $t_n = ar^{n-1}$ என்ற n –வது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

முதல் உறுப்பு $a = 9,$

பொது விகிதம் $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$t_8 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{243}$

எனவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 8 –வது உறுப்பு $\frac{1}{243}$.

2.43 **ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 4வது உறுப்பு $\frac{8}{9}$ மற்றும் 7 வது உறுப்பு $\frac{64}{243}$ எனில், அந்தப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.**

தீர்வு :

4 –வது உறுப்பு, $t_4 = \frac{8}{9} \Rightarrow ar^3 = \frac{8}{9}$ ...(1)

7 –வது உறுப்பு, $t_7 = \frac{64}{243} \Rightarrow ar^6 = \frac{64}{243}$ ...(2)

சமன்பாடு (2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க நாம்

பெறுவது, $\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{64}{243}}{\frac{8}{9}}$

$\Rightarrow r^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$

r –யின் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1) –யில் பிரதியிட

$a \times \left[\frac{2}{3}\right]^3 = \frac{8}{9}$ –லிருந்து $a = 3$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை

$a, ar, ar^2, \ldots$ அதாவது $3, 2, \frac{4}{3}, \ldots$

2.44 ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 343 மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் $\frac{91}{3}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்

அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் = 343

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 343$$

$a^3 = 7^3$ லிருந்து $a = 7$

உறுப்புகளின் கூடுதல் $= \frac{91}{3}$

ஆகவே, $a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{91}{3}$ –லிருந்து

$$7\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = \frac{91}{3}$$

$3 + 3r + 3r^2 = 13r$ எனவே $3r^2 - 10r + 3 = 0$

$(3r - 1)(r - 3) = 0$ எனவே $r = 3$ அல்லது $r = \frac{1}{3}$

$a = 7, r = 3$ எனில், தேவையான மூன்று உறுப்புகள் $\frac{7}{3}, 7, 21$.

$a = 7, r = \frac{1}{3}$ எனில், தேவையான மூன்று உறுப்புகள் $21, 7, \frac{7}{3}$.

2.45 ஓர் இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹ 40,000 மற்றும் ஒவ்வொரு வருடமும் அதன் மதிப்பு 10% குறைகிறது. 6 –வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹ 40,000. அதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு வருட முடிவில் 10% குறையும் என்பதால், முதல் வருட முடிவில் அதன் மதிப்பு ஆரம்ப மதிப்பில் 90% ஆக இருக்கும்.

அதாவது முதல் வருட முடிவில் இயந்திரத்தின் மதிப்பு $40,000 \times \frac{90}{100}$ ஆகும்.

இரண்டு வருடம் கழித்து இயந்திரத்தின் மதிப்பானது முதல் வருட மதிப்பில் 90% ஆக இருக்கும்.

இரண்டாம் வருட முடிவில் இயந்திரத்தின் மதிப்பானது $40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$ ஆகும்.

இந்த வகையில் தொடர்ந்தால், இயந்திரத்தின் மதிப்பு பின்வருமாறு குறைகிறது.

$$40000, 40000 \times \frac{90}{100}, 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2 \ldots$$

இந்தத் தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 40,000 மற்றும் பொது விகிதம் $\frac{90}{100}$ உடைய ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

6 –வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் மதிப்பைக் காண (5 –வது வருட முடிவில்), பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 6 –வது உறுப்பைக் கண்டறிய வேண்டும்.

ஆகவே, $n = 6, a = 40,000, r = \frac{90}{100}$.

$t_n = ar^{n-1}$ என்பதைப் பயன்படுத்த

$$t_6 = 40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^{6-1} = 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^5$$

$$t_6 = 40000 \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 23619.6$$

எனவே 6 –வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் மதிப்பு = ₹ 23619.60

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையானது முந்தைய உறுப்பை ஒரு _____ ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கிறது.

விடை: பூச்சியமற்ற மாறாத எண்

2. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் _____ மற்றும் இது _____ என அழைக்கப்படுகிறது.

விடை: மாறிலி, பொது விகிதம்

3. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளில் விடுபட்ட எண்களைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}, __$ (ii) $7, \frac{7}{2}, __$

(iii) $__, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

விடை: (i) 27 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 2

4. முதல் உறுப்பு = a, பொது விகிதம் = r எனில், t_9 மற்றும் t_{27} ஐக் காண்க.

விடை: ar^8, ar^{26}

5. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $t_1 = \frac{1}{5}$ மற்றும் $t_2 = \frac{1}{25}$ எனில், பொது விகிதம் ____

விடை: $\frac{1}{5}$

6. a, b, c என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே _____

விடை: $b^2 = ac$

சிந்தனைக் களம்

1. $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகுமா?

விடை:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{2^2}{2} = \frac{2\times 2}{2} = 2$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{2^{2^2}}{2^2} = \frac{2^2\times 2^2}{2^2} = 2^2 = 4$$

$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{2^{2^{2^2}}}{2^{2^2}} = \frac{2^{2^2}\times 2^{2^2}}{2^{2^2}} = 2^{2^2} = 16$$

$$\frac{t_2}{t_1} \neq \frac{t_3}{t_2} \neq \frac{t_4}{t_3}$$

∴ இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகாது.

2. 64 என்ற எண்ணைப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த மூன்று எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுக.

விடை:

அந்த மூன்று எண்கள் ar^{-1}, a, ar என்க

a = 4 மற்றும் r = 4 எனில்

1, 4, 16 என்பன தேவையான எண்களாகும்.

3. a, b, c,... என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனில், 2a, 2b, 2c, ... என்பது ஒரு ____.

விடை: பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்

4. 3, x, 6.75 என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனில், x –யின் மதிப்பு _____.

விடை: 4.5

பயிற்சி 2.7

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர் வரிசையாகும்?

(i) 3, 9, 27, 81,... (ii) 4, 44, 444, 4444...

(iii) 0.5, 0.05, 0.005,... (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$,

(v) 1, –5, 25, –125,... (vi)120, 60, 30, 18...

(vii) $16, 4, 1\frac{1}{4}, \ldots$

தீர்வு :

(i) 3, 9, 27, 81,...

இங்கு $\frac{t_2}{t_1} = \frac{9}{3} = 3$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{27}{9} = 3$

$\frac{t_4}{t_3} = \frac{81}{27} = 3$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம். எனவே 3, 9, 27, 81,... ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

(ii) 4, 44, 444, 4444

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{44}{4} = 11$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{444}{44} = \frac{111}{11}$

$\frac{t_4}{t_3} = \frac{4444}{444} = \frac{1111}{111}$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 4, 44, 444,... என்ற தொடர் வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை அல்ல

(iii) 0.5, 0.05, 0.005,...

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{0.05}{0.5} = \frac{0.5}{5} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

$\frac{t_3}{t_2} = \frac{0.005}{0.05} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம். எனவே 0.5, 0.05, 0.005,... ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

(iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{6}\times\frac{3}{1} = \frac{1}{2}$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{2}$$

இரு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம். எனவே $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$ ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

(v) $1, -5, 25, -125, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{-5}{1} = -5$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{25}{-5} = -5$$
$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{-125}{25} = -5$$

இரு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம். எனவே, $1, -5, 25, -125 \ldots$ ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

(vi) $120, 60, 30, 18, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால், $120, 60, 30, 18, \ldots$ ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை அல்ல.

(vii) $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{t_4}{t_3} = \frac{1/4}{1}$$
$$= \frac{1}{4}$$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம்

$\therefore 16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$ ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவிகிதம் உடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) $a = 6, r = 3$

(ii) $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$

(iii) $a = 1000, r = \frac{2}{5}$

தீர்வு :

(i) $a = 6, r = 3$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2 என்க.

$\Rightarrow 6, 6 \times 3, 6(3)^2$

$\Rightarrow 6, 18, 54$

$\therefore$ பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 6, 18, 54.

(ii) $a = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2 என்க.

$\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{2}, \sqrt{2}(\sqrt{2})^2$

$\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$

$\therefore$ பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$

(iii) $a = 1000 \quad r = \frac{2}{5}$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2 என்க.

$1000, 1000\left(\frac{2}{5}\right), 1000\left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow 1000, 400, 160$

$\therefore$ பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் 1000, 400, 160.

3. $729, 243, 81, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 7 -வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு : பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் n -வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

இங்கு $a = 729$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{243}{729}$$
$$r = \frac{1}{3}$$
$$t_7 = ar^{7-1} = ar^6 = 729\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$= 729 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$t_7 = 1$$

4. x + 6, x + 12 மற்றும் x + 15 என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில், x –யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

x + 6, x + 12 மற்றும் x + 15 பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில்,

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$$

i.e., $\frac{x+12}{x+6} = \frac{x+15}{x+12}$

$$(x + 12)^2 = (x + 6)(x + 15)$$

$$x^2 + 24x + 144 = x^2 + 6x + 15x + 90$$

$$x^2 + 24x + 144 - x^2 - 6x - 15x - 90 = 0$$

$$24x - 21x + 144 - 90 = 0$$

$$3x + 54 = 0$$

$$3x = -54$$

$$x = \frac{-54}{3} = -18$$

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) 4, 8, 16, ..., 8192

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \frac{1}{2187}$

தீர்வு :

(i) 4, 8, 16, ...8192

$a = 4, r = \frac{8}{4} = 2$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் n –வது உறுப்பு

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$8192 = 4r^{n-1}$$

$$r^{n-1} = \frac{8192}{4}$$

$$r^{n-1} = 2048 = 2^{11}$$

$$n - 1 = 11 \quad [\because r = 2]$$

$$n = 11 + 1 = 12$$

∴ பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 12.

2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

(ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \frac{1}{2187}$

இங்கு $a = \frac{1}{3}, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{1}$

$$r = \frac{1}{3}$$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் n –வது உறுப்பு

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\frac{1}{2187} = \frac{1}{3} r^{n-1}$$

$$\frac{3}{2187} = r^{n-1}$$

$$\frac{1}{729} = r^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 = r^{n-1}$$

$$n - 1 = 6 \quad \left[\because r = \frac{1}{3}\right]$$

$$n = 6 + 1 = 7$$

∴ பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 7.

6. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 9 –வது உறுப்பு 32805 மற்றும் 6 –வது உறுப்பு 1215 எனில், 12 –வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின்

9வது உறுப்பு= $ar^{9-1} = 32805 \Rightarrow ar^8 = 32805$...(1)

6வது உறுப்பு= $ar^{6-1} = 1215 \Rightarrow ar^5 = 1215$ ...(2)

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{ar^8}{ar^5} = \frac{32805}{1215}$$

$$r^3 = 27$$

$$r^3 = 3^3$$

$$r = 3$$

r = 3 என (2) -ல் பிரதியிட

$$ar^5 = 1215$$

$$a(3^5) = 1215$$

$$a = \frac{1215}{3^5}$$

$$a = 5$$

∴ பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 12 –வது உறுப்பு

$t_{12} = ar^{12-1}$

$= 5\,(3)^{11} = 5 \times 1,53,147$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 12 –வது உறுப்பு $= 7,65,735$

7. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 8 –வது உறுப்பு 768 மற்றும் பொது விகிதம் 2 எனில், அதன் 10 –வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் n –வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

8 –வது உறுப்பு $t_8 = 768$

$r = 2$

$ar^{8-1} = 768$

$a\,(2)^7 = 768$

$a = \frac{768}{2^7} = \frac{2^7 \times 2^1 \times 3}{2^7} = 6$

10 –வது உறுப்பு $t_{10} = ar^{10-1} = ar^9$

$= 6 \times 2^9 = 6 \times 512 = 3072$

2	768
2	384
2	192
2	96
2	48
2	24
2	12
2	6
	3

பெருக்குத்தொடர்வரிசையின் 10–வதுஉறுப்பு 3072.

8. a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனில், 3^a, 3^b, 3^c ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : a, b, c என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனில்,

$\therefore \quad t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$b - a = c - b$

$b + b = c + a$

$2b = a + c$

3 –இன் அடுக்கிற்கு மாற்ற

$\therefore \quad 3^{2b} = 3^{a+c}$

$3^{b+b} = 3^{a+c}$

$3^b . 3^b = 3^a . 3^c$

$\frac{3^b}{3^a} = \frac{3^c}{3^b}$

எனவே 3^a, 3^b, 3^c என்பன பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமையும்.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 27 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதல் $\frac{57}{2}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள் ar^{-1}, a, ar

அவற்றின் பெருக்கற்பலன் $= 27$

$ar^{-1} \times a \times ar = 27$

$a^3 = 27$

$a^3 = 3^3$

$a = 3$

இரண்டிரண்டாக கொடுக்கப்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதல் $= \frac{57}{2}$

$(ar^{-1} \times a) + (a \times ar) + (ar^{-1} \times ar) = \frac{57}{2}$

$a^2r^{-1} + a^2r + a^2 = \frac{57}{2}$

$a^2\left(\frac{1}{r} + r + 1\right) = \frac{57}{2}$

$3^2\left(\frac{1 + r^2 + r}{r}\right) = \frac{57}{2}$

$\frac{1 + r^2 + r}{r} = \frac{57}{2 \times 3 \times 3}$

$\frac{1 + r^2 + r}{r} = \frac{19}{6}$

$6 + 6r^2 + 6r = 19r$

$6r^2 + 6r - 19r + 6 = 0$

$6r^2 - 13r + 6 = 0$

$6r^2 - 9r - 4r + 6 = 0$

$3r\,(2r - 3) - 2\,(2r - 3) = 0$

$(2r - 3)\,(3r - 2) = 0$

$2r - 3 = 0$ (அல்லது) $3r - 2 = 0$

$2r = 3$ (அல்லது) $3r = 2$

$r = \frac{3}{2}$ (அல்லது) $r = \frac{2}{3}$

$r = \frac{3}{2}$ எனில், உறுப்புகள் $\frac{3}{3/2}, 3, 3\left(\frac{3}{2}\right) = 2, 3, \frac{9}{2}$

$r = \frac{2}{3}$ எனில், உறுப்புகள் $\frac{3}{2/3}, 3, 3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{2}, 3, 2$

∴ பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{9}{2}, 3, 2$.

10. ஒரு நபர் ஒரு நிறுவனத்தில் துணை மேலாளராகப் பணியில் சேர்கிறார். அவருக்கு அந்நிறுவனம் முதல் மாத ஊதியமாக ₹ 60,000 வழங்குகிறது. மற்றும் ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5% வழங்குவதாக ஒப்புக்கொள்கிறது. 5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் எவ்வளவு?

தீர்வு :

முதல் மாத ஊதியம் = ₹ 60000

முதல் ஆண்டு முடிவில் வருமானம்

$= 60000 \times \left(\frac{105}{100}\right)$

இரண்டாம் ஆண்டு முடிவில் ஊதியம்

$= (60000)\left(\frac{105}{100}\right)^2$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால் அவரது ஊதியமானது கீழ்க்கண்டவாறு உயர்கிறது.

$60000, 60000\left(\frac{105}{100}\right), 60000\left(\frac{105}{100}\right)^2 \ldots$

இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையை அமைக்கும்.

இங்கு $r = \frac{105}{100}; a = 60000$

5 ஆண்டு முடிவில் ஊதியம்

$= ar^{n-1} = ar^{6-1} = ar^5$

$= 60000\left(\frac{105}{100}\right)^5$

$= 60000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$

∴ 5 வருட முடிவில் அவரது மாத ஊதியம்

= ₹ 76577

11. சிவமணி ஒரு பணிக்கான நேர்காணலில் பங்கேற்கிறார். அந்நிறுவனம் அவருக்கு இரண்டு விதமான வாய்ப்புகளை வழங்குகிறது.
வாய்ப்பு A : முதல் மாத ஊதியம் ₹ 20,000 மற்றும் நிச்சயமான 6% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.
வாய்ப்பு B : முதல் மாத ஊதியம் ₹ 22,000 மற்றும் நிச்சயமான 3% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.
A மற்றும் B ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய 4 –வது வருட ஊதியம் எவ்வளவு?

தீர்வு :

வாய்ப்பு A:

முதல் மாத ஊதியம் = ₹ 20,000

ஆண்டு ஊதிய உயர்வு = 6% = $\frac{6}{100}$

∴ முதல் ஆண்டு முடிவில் ஊதியம்

$= 20,000 \times \frac{106}{100}$

∴ இரண்டாண்டு முடிவில் ஊதியம்

$= 20000 \times \left(\frac{106}{100}\right)^2$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால் அவரது ஆண்டு ஊதியம் ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமையும்.

இங்கு $a = ₹ 20000, \quad r = \frac{106}{100}$

∴ 4 –வது ஆண்டு ஊதியம் $= t_n = ar^{n-1}$

$t_4 = ar^{4-1} = ar^3$

$= 20000 \times \left(\frac{106}{100}\right)^3 = 23820$

∴ வாய்ப்பு A இன் மூலம் 4 –வது ஆண்டு ஊதியம் = ₹ 23, 820

வாய்ப்பு B:

முதல் மாத ஊதியம் = ₹ 22000

ஆண்டு ஊதிய உயர்வு = 3% = $\frac{3}{100}$

∴ முதல் ஆண்டு முடிவில் ஊதியம்

$= 22000 \times \frac{103}{100}$

இரண்டாண்டு முடிவில் ஊதியம்

$= 22000\left(\frac{103}{100}\right)^2$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால் அவரது ஆண்டு ஊதியம் ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமையும்.

$a = ₹ 22000, \quad r = \frac{103}{100}$

4 –வது ஆண்டு ஊதியம் $= ar^{n-1}$

$= 22000\left(\frac{103}{100}\right)^{4-1}$

$= 22000\left(\frac{103}{100}\right)^3$

∴ வாய்ப்பு B இன் மூலம் 4 –வது ஆண்டு ஊதியம் = ₹ 24040

12. a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் மற்றும் x, y, z என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் எனில் $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு : a, b, c என்பன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன எனில்

$b - a = c - b$

$b + b = c + a$

$2b = c + a$ ...(1)

x, y, z என்பன பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$\therefore \quad x = a$

$y = ar$

$z = ar^2$

இடப்பக்கம்

$x^{b-c} \times y^{c-a} \times y^{a-b} = a^{b-c} \times (ar)^{c-a} \times (ar^2)^{a-b}$

$= a^{b-c} \times a^{c-a} \times r^{c-a} \times a^{a-b}\, r^{2(a-b)}$

$= a^{b-c+c-a+a-b}\ r^{c-a+2a-2b}$

$= a^0\ r^{(a+c)-2b}$

$= 1.r^{2b-2b}$

$= 1.\ r^0$ [(1) லிருந்து $a + c = 2b$]

$= 1 \times 1 = 1$

= வலப்பக்கம்

$\therefore x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

நினைவில் கொள்க

- ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் அந்தத் தொடர் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

  $r \neq 1$ எனில் $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ மற்றும் $r = 1$ எனில் $S_n = na$

- பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots = \dfrac{a}{1-r}, -1 < r < 1$

எடுத்துக்காட்டு

2.46 1, –3, 9, – 27... என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் 8 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : இங்கு முதல் உறுப்பு a = 1,

பொது விகிதம் $r = \dfrac{-3}{1} = -3 < 1, n = 8$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},\ r \neq 1$$

ஆகவே, $S_8 = \dfrac{1\left((3)^8 - 1\right)}{(-3) - 1}$

$= \dfrac{6561 - 1}{-4}$

$= -1640$

2.47 ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $S_6 = 4095$ மற்றும் $r = 4$ எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

பொது விகிதம் = 4 >1, முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_6 = 4095$

எனவே, $S_6 = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4095$

$r = 4$ என்பதால், $\dfrac{a(4^6 - 1)}{4 - 1} = 4095$

இதிலிருந்து $a \times \dfrac{(4096 - 1)}{3} = 4095$

முதல் உறுப்பு a = 3

2.48 1 + 4 + 16 + ... என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 1365 கிடைக்கும்?

தீர்வு : கூடுதல் 1365 கிடைக்க கூட்ட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்க

$a = 1, r = \dfrac{4}{1} = 4 > 1$

$S_n = 1365$ இதிலிருந்து

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1} = 1365$$

$$\frac{1(4^n-1)}{4-1} = 1365$$

எனவே $4^n - 1 = 4095$

$4^n = 4096$ இதிலிருந்து

$4^n = 4^6$

$n = 6$

2.49 $3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots \infty$ **என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.**

தீர்வு :

இங்கு $a = 3, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{3}$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

2.50 0.6666...என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க.

தீர்வு :

0.6666... என்ற எண்ணை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$0.6666... = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \ldots$

0.6, 0.06, 0.006... என்ற எண்கள் ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை அமைக்கின்றன. முதல் உறுப்பு $a = 0.6$

பொது விகிதம் $r = \frac{0.06}{0.6} = 0.1$

மேலும் $-1 < r = 0.1 < 1$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$0.6666... = 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \ldots$$

$$= \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{0.6}{0.9}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ஆகவே 0.6666 ... என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

2.51 5 + 55 + 555 + ...என்ற தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : 5 + 55 + 555 + ... என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல, பெருக்குத் தொடர் வரிசையும் அல்ல. எனவே, இந்தத் தொடரை இரு தொடர்களாகப் பிரித்துக் கூடுதல் காண்போம்.

5 + 55 + 555 + ... + n உறுப்புகள் வரை =
5 [1 + 11 + 111 + ...+ n உறுப்புகள் வரை]

$$= \frac{5}{9}\left[9 + 99 + 999 + \ldots + n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots + n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10 + 100 + 1000 + \ldots + n \text{ உறுப்புகள் வரை}) - n\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)} - n\right] = \frac{50(10^n-1)}{81} - \frac{5n}{9}$$

2.52 $1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^n > 5000$ **என்றவாறு அமையும் மிகச்சிறிய மிகைமுழு எண் n காண்க.**

தீர்வு :

எத்தனை குறைவான உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 5000 –ஐத் தாண்டும் எனக் காண வேண்டும் அதாவது எந்தக் குறைவான n மதிப்பிற்கு $S_n > 5000$ வரும் எனக் காண வேண்டும்.

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{1(6^n-1)}{6-1} = \frac{6^n-1}{5}$$

$S_n > 5000$ என்பதால் $\frac{6^n-1}{5} > 5000$

$6^n - 1 > 25000$ இதிலிருந்து $6^n > 25001$

$6^5 = 7776$ மற்றும் $6^6 = 46656$ என்பதால்

$1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^n > 5000$ என்றவாறு அமையும் மிகச்சிறிய n –ன் மதிப்பு 6 ஆகும்.

2.53 ஒரு நபர் ஒவ்வோர் ஆண்டும் அதற்கு முந்தைய ஆண்டு சேமித்த தொகையில் பாதியைச் சேமிக்கிறார். 6 ஆண்டுகளில் அவர் ₹ 7875 –ஐச் சேமிக்கிறார் எனில், முதல் ஆண்டில் அவர் சேமித்த தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு :

6 ஆண்டுகளில் அவர் சேமித்த தொகை

$S_6 = 7875$

ஒவ்வோர் ஆண்டும் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய ஆண்டின் சேமிப்புத் தொகையில் பாதி என்பதால், $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 7875.$$

$$\frac{a\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 7875 \text{ லிருந்து } a \times \frac{63}{32} = 7875$$

$$a = \frac{7875 \times 32}{63} \text{ எனவே } a = 4000$$

எனவே, அந்த நபர் முதல் ஆண்டில் சேமித்த தொகை ₹ 4000.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் இருக்குமானால் அது _____ எனப்படும்.

விடை: பெருக்குத் தொடர்.

2. r = 1, எனும்போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _____.

விடை: $S_n = na$

3. r ≠ 1, எனும்போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _____.

விடை: $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

4. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் _____

விடை: $S_\infty = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$

5. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காணும் சூத்திரம் r -யின் எம்மதிப்புகளுக்குப் பொருந்தும்?

விடை: r -இன் மதிப்பு $-1 < r < 1$ என இருந்தால் இச்சூத்திரம் பொருந்தும்.

6. 3 + 33 + 333 + ... என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடரா?

விடை: 3 + 33 + 333 + ...என்ற தொடரில்

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{33}{3} = 11$$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{333}{33} = \frac{111}{11}$$

$$\frac{t_2}{t_1} \neq \frac{t_3}{t_2}$$

∴ இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் அல்ல.

7. $1 + r + r^2 + r^3 \ldots = \frac{3}{4}$ என்றவாறு அமையும் r -யின் மதிப்பு _____.

விடை: முடிவிலி பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல்

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$$

இங்கு a = 1

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{1-r}$$

$$3(1-r) = 4$$

$$3 - 3r = 4$$

$$-3r = 4 - 3$$

$$-3r = 1$$

$$r = \frac{-1}{3}$$

∴ r ன் மதிப்பு $= \frac{-1}{3}, -1 < \frac{-1}{3} < 1$.

பயிற்சி 2.8

1. பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

(i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots$ **(ii) 256, 64, 16,...**

தீர்வு :

(i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots$ என்பது தரப்பட்ட

பெருக்குத் தொடர் வரிசை

$a = 5, r = \frac{-3}{5} \neq 1$

இங்கு முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$= \frac{5\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1\right]}{\frac{-3}{5} - 1}$$

$$= \frac{5\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1\right]}{\frac{-3-5}{5}}$$

$$= \frac{5\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1\right]}{\frac{-8}{5}}$$

$$= \frac{-25}{8}\left[\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1\right]$$

$$= \frac{25}{8}\left[1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^n\right]$$

(ii) 256, 64, 16,.... என்பது தரப்பட்ட பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

இங்கு $a = 256, r = \frac{64}{256} = \frac{1}{4} \neq 1$

முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{256\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{256\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right]}{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-1024}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right] = \frac{1024}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

2. 5, 15, 45, ...என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : நாம் காண வேண்டியது 5 + 15 + 45 + ... 6 உறுப்புகள் வரை

பெருக்குத்தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

இங்கு $a = 5, r = \frac{15}{5} = 3$

$$\therefore \text{கூடுதல்} = \frac{5(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(729 - 1)}{2}$$

$$= \frac{5 \times 728}{2} = 5 \times 364$$

5 + 15 + 45 + ... 6 உறுப்புகள் வரை = 1820

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் 5 மற்றும் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் 46872 எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கணக்கின்படி r = 5 மற்றும் $S_6 = 46872$

பெருக்குத்தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$46872 = \frac{a(5^6 - 1)}{5 - 1}$$

$$46872 = a\frac{(15625 - 1)}{4} = a \times \frac{15624}{4}$$

$$46872 = a \times 3906$$

$$\frac{46872}{3906} = a$$

$$a = 12$$

$\therefore$ பெருக்குத்தொடரின் முதல் உறுப்பு a = 12

4. பின்வரும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண்க

(i) 9 + 3 + 1 + ...

(ii) $21 + 14 + \frac{28}{3} + ...$

தீர்வு :

(i) 9 + 3 + 1 + ...

இங்கு $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ இது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

$a = 9$ மற்றும் $r = \frac{1}{3}, -1 < r < 1$

$$\therefore \text{கூடுதல்} = \frac{a}{1 - r} = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{9}{\frac{2}{3}} = 9 \times \frac{3}{2}$$

$$\therefore 9 + 3 + 1 + ... = \frac{27}{2} = 13.5$$

(ii) $21 + 14 + \frac{28}{3} + ...$

இங்கு $\frac{14}{21} = \frac{2}{3} = \frac{t_2}{t_1}$

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{28/3}{14} = \frac{28}{3} \times \frac{1}{14} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2}$$

∴இது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

இங்கு $a = 21,\ r = \frac{2}{3}, -1 < r < 1.$

$$\text{கூடுதல்} = \frac{a}{1-r} = \frac{21}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{21}{1/3} = 21 \times \frac{3}{1}$$

$$21 + 14 + \frac{28}{3} + ... = 63.$$

5. ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 8 மற்றும் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $\frac{32}{3}$ எனில், அதன் பொது விகிதம் காண்க.

தீர்வு : முதல் உறுப்பு $a = 8$

$$S_\infty = \frac{32}{3}$$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முடிவிலி வரை கூடுதல்

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{32}{3} = \frac{8}{1-r}$$

$$32\,(1 - r) = 24$$

$$1 - r = \frac{24}{32}$$

$$1 - r = \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{3}{4} = r$$

$$\frac{1}{4} = r$$

பொது விகிதம் $r = \frac{1}{4}$

6. பின்வரும் தொடர்களின் n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

(i) 0.4 + 0.44 + 0.444 + ... n உறுப்புகள் வரை

(ii) 3 + 33 + 333 + ... n உறுப்புகள் வரை

தீர்வு :

(i) 0.4 + 0.44 + 0.444 + ... n உறுப்புகள் வரை

S_n = 0.4 + 0.44 + 0.444 + ... n உறுப்புகள் வரை.

$= 4\,[0.1 + 0.11 + 0.111 + ...$ n உறுப்புகள் வரை]

9 ஆல் பகுதி மற்றும் தொகுதியை பெருக்க

$= \frac{4}{9}[0.9 + 0.99 + 0.999 + ...$ n உறுப்புகள் வரை]

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{9}{10} + \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} + ... n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[\frac{10-1}{10} + \frac{100-1}{100} + \frac{1000-1}{100} + ... n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[\left(1-\frac{1}{10}\right) + \left(1-\frac{1}{100}\right) + \left(1-\frac{1}{1000}\right) + ...n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \left[\frac{\frac{1}{10}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}}\right]\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{\frac{9}{10}}\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[n - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right] = \left[\frac{4n}{9} - \frac{4}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$0.4 + 0.44 + 0.444 ... = \left[\frac{4n}{9} - \frac{4}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{9}n - \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{81}$$

(ii) 3 + 33 + 333 + ... n உறுப்புகள் வரை.

S_n = 3 + 33 + 333 + ...n உறுப்புகள் வரை

$= 3\,[1 + 11 + 111 +$ n உறுப்புகள் வரை]

$= \frac{3}{9}\,[9 + 99 + 999 + ...$n உறுப்புகள் வரை]

9 ஆல் பகுதி மற்றும் தொகுதியை பெருக்க

$= \frac{1}{3}\,[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...$n உறுப்புகள் வரை]

$= \frac{1}{3}\,[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ...$ n உறுப்புகள் வரை]

$= \frac{1}{3}$ {[$10 + 10^2 + 10^3 + ...$n உறுப்புகள் வரை] – n}

$10 + 10^2 + ...$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை. இங்கு a = 10, r = 10.

$\therefore S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$S_n = \frac{1}{3}\left\{\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1}\right] - n\right\}$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$

$= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

$3 + 33 + 333 + ...$n உறுப்புகள் வரை

$= \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$

7. 3 + 6 + 12 + ... + 1536 என்ற பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு : a = 3, $r = \frac{6}{3} = 2$

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

$1536 = 3(2)^{n-1}$

$\frac{1536}{3} = 2^{n-1}$

$512 = 2^{n-1}$

$2^9 = 2^{n-1}$

$n - 1 = 9$

$n = 9 + 1 = 10$

∴ பெருக்குத் தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n = 10.

∴ n உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1}$

$= \frac{3 \times (1024 - 1)}{1} = 3 \times 1023$

$3 + 6 + 12 + .. + 1536 = 3069$

8. குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுதுகிறார், மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார். இந்தச் செயல்முறை தொடர்ச்சியாக நடைபெறுகின்றது. ஒரு கடிதத்திற்கான செலவு ₹ 2 எனில் 8 நிலைகள் வரை கடிதங்கள் அனுப்புவதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் நிலையில் எழுதப்பட்ட கடிதங்கள் = 4

இரண்டாம் நிலையில் எழுதப்பட்ட கடிதங்கள் $= 4^2 = 16$

மூன்றாம் நிலையில் எழுதப்பட்ட கடிதங்கள் $= 4^3 = 64$

கடிதங்களின் எண்ணிக்கையானது, 4, 16, 64,...

இங்கு a = 4, $r = \frac{16}{4} = 4$ மற்றும் n = 8

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{4(4^8 - 1)}{4 - 1}$

$= \frac{4}{3}(65536 - 1) = \frac{4}{3} \times 65535$

$= 87380$

ஒரு வருடத்திற்கு செலவு ₹ 2

கடிதத்திற்கு ஆகும் மொத்த செலவு

$= 87380 \times 2 =$ ₹ 174760

9. $0.\overline{123}$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க.

தீர்வு : $0.\overline{123} = 0.123123123....$

$= 0.123 + 0.000123 + 0.000000123 + ...$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{0.000123}{0.123} = \frac{0.123}{123} = 0.001 = r$

∴ இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

a = 0.123 மற்றும் r = 0.001

முடிவிலி வரை கூடுதல் $= \frac{a}{1 - r}$

$= \frac{0.123}{1 - 0.001} = \frac{0.123}{1 - \frac{1}{1000}}$

$= \frac{0.123}{\frac{999}{1000}} = \frac{123}{999}$

$\therefore 0.\overline{123} = \frac{41}{333}$

10. $S_n = (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots n$ உறுப்புகள் வரை எனில் $(x - y)\, S_n = \left[\frac{x^2 (x^n - 1)}{x - 1} - \frac{y^2 (y^n - 1)}{y - 1}\right]$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : கணக்கின்படி $S_n = (x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை

$= \frac{x - y}{x - y}$ [$(x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை)]

[பகுதியையும் தொகுதியையும் $(x - y)$ ஆல் பெருக்க]

$= \frac{1}{x-y}$[$(x-y)(x+y) + (x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^2)$ + ...n உறுப்புகள் வரை]

$= \frac{1}{x - y}$ [$x^2 - y^2) + (x^3 + y^3) + (x^4 - y^4) + \ldots$.n உறுப்புகள் வரை]

$= \frac{1}{x - y}$ [$x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை] – [$y^2 + y^3 + y^4 + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை]

$S_n = \frac{1}{x - y}\left[\frac{x^2 (x^n - 1)}{x - 1} - \frac{y^2 (y^n - 1)}{y - 1}\right]$

$\left[\because S_n = \frac{a (r^n - 1)}{r - 1}\right]$

$(x - y)\, S_n = \left[\frac{x^2 (x^n - 1)}{x - 1} - \frac{y^2 (y^n - 1)}{y - 1}\right]$

சிறப்புத் தொடர்கள்

நினைவில் கொள்க

- சில தொடர்களின் கூடுதலை தனித்த சூத்திரங்கள் மூலம் காணலாம். இத்தகைய தொடர்களைச் சிறப்புத் தொடர்கள் என்கிறோம்.
- $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = (x + 1)^{k+1} - x^{k+1}$
- $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n (n + 1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n (n + 1) (2n + 1)}{6} = \sum_{k=1}^{n} k^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n (n + 1)}{2}\right]^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$
- இரு எண்களில் ஓர் எண் நீங்கலாக ஒரு எண்ணின் வகுத்திகளின் கூடுதலானது மற்றோர் எண்ணுக்குச் சமம். இவ்வாறு அமைந்த எண் ஜோடிகளை இணக்கமான எண்கள் அல்லது நட்பு எண்கள் என அழைக்கின்றோம். 220 மற்றும் 284 என்ற எண்களே மிகச் சிறிய ஜோடி நட்பு எண்கள் ஆகும்.
- முதல் n இயல் எண்களை ஒரு முக்கோண வடிவில் அமைக்க முடியும் என்பதால் அவற்றின் கூடுதல் முக்கோண எண் என்று அழைக்கின்றோம்.
- முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களை ஒரு பிரமிடு வடிவில் அமைக்க முடியும் என்பதால் அவற்றின் கூடுதலை சதுர பிரமிடு எண் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

2.54 மதிப்புக் காண்க (i) $1 + 2 + 3 + ... + 50$
(ii) $16 + 17 + 18 + ... + 75$

தீர்வு :

(i) $1 + 2 + 3 + ... + 50$

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$1 + 2 + 3 + ... + 50 = \frac{50 \times (50+1)}{2} = 1275$$

(ii) $16 + 17 + 18 + ... + 75$

$16 + 17 + 18 + ... + 75 = (1 + 2 + 3 + ... + 75) - (1 + 2 + 3 + ...+ 15)$

$$= \frac{75(75+1)}{2} - \frac{15(15+1)}{2}$$

$= 2850 - 120 = 2730$

2.55 கூடுதல் காண்க (i) $1 + 3 + 5 + ...$ 40 உறுப்புகள் வரை
(ii) $2 + 4 + 6 + ... + 80$
(iii) $1 + 3 + 5 + ... + 55$

தீர்வு :

(i) $1 + 3 + 5 + ...$ 40 உறுப்புகள் வரை $= 40^2 = 1600$
$[\because 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2]$

(ii) $2 + 4 + 6 + ... + 80 = 2(1 + 2 + 3 + ... + 40)$

$$= 2 \times \frac{40 \times (40+1)}{2} = 1640$$

(iii) $1 + 3 + 5 + ... + 55$

இங்கு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப்படவில்லை. நாம் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $n = \frac{(l-a)}{d} + 1$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்

$$n = \frac{(55-1)}{2} + 1 = 28$$

எனவே, $1 + 3 + 5 + ... + 55 = (28)^2 = 784$

2.56 கூடுதல் காண்க. (i) $1^2 + 2^2 + ... + 19^2$
(ii) $5^2 + 10^2 + 15^2 + ... + 105^2$
(iii) $15^2 + 16^2 + 17^2 + ... + 28^2$

தீர்வு :

(i) $1^2 + 2^2 + ... + 19^2 = \frac{19 \times (19+1)(2 \times 19+1)}{6}$

$$= \frac{19 \times 20 \times 39}{6} = 2470$$

(ii) $5^2 + 10^2 + 15^2 + ...+ 105^2 = 5^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 21^2)$

$$= 25 \times \frac{21 \times (21+1)(2 \times 21+1)}{6}$$

$$= \frac{25 \times 21 \times 22 \times 43}{6} = 82775$$

(iii) $15^2 + 16^2 + 17^2 + ... + 28^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 28^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 14^2)$

$$= \frac{28 \times 29 \times 57}{6} - \frac{14 \times 15 \times 29}{6}$$

$= 7714 - 1015 = 6699$

2.57 கூடுதல் காண்க (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 16^3$
(ii) $9^3 + 10^3 + ... + 21^3$

தீர்வு :

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 16^3$

$$= \left[\frac{16 \times (16+1)}{2}\right]^2 = (136)^2 = 18496$$

(ii) $9^3 + 10^3 + ... + 21^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 21^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 8^3)$

$$= \left[\frac{21 \times (21+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{8 \times (8+1)}{2}\right]^2$$

$= (231)^2 - (36)^2 = 53361 - 1296$

$= 52065.$

2.58 $1 + 2 + 3 + ... + n = 666$ எனில், n -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, என்பதால்

$$\frac{n(n+1)}{2} = 666$$

$n^2 + n - 1332 = 0$ இதிலிருந்து $(n + 37)(n - 36) = 0$

எனவே, $n = -37$ அல்லது $n = 36$

ஆனால் $n \neq -37$ (ஏனெனில் n ஓர் இயல் எண்); ஆகவே $n = 36$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. முதல் n இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதலானது, முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதலின் _____ ஆகும்.

விடை: வர்க்கம்

2. முதல் 100 இயல் எண்களின் சராசரி_____

விடை:

முதல் 100 இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$$\text{சராசரி} = \frac{5050}{100} = 50.5$$

3. சரியா, தவறா எனக் கூறுக. உனது விடைக்கான காரணம் தருக.

(i) முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

விடை: தவறு

(ii) அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஓர் இரட்டை எண்ணாகும்.

விடை: சரி

(iii) முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மற்றும் முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் 2 ஆல் வகுபடும்.

விடை: தவறு

(iv) முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஒரு வர்க்க எண்ணாகும்.

விடை: சரி

சிந்தனைக் களம்

1. சதுரங்கப் பலகையில் மொத்தம் எத்தனை சதுரங்கள் உள்ளன?

விடை: 64

2. சதுரங்கப் பலகையில் மொத்தம் எத்தனை செவ்வகங்கள் உள்ளன?

விடை: 1296

பயிற்சி 2.9

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + 60$

(ii) $3 + 6 + 9 + \ldots + 96$

(iii) $51 + 52 + 53 + \ldots + 92$

(iv) $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 225$

(v) $6^2 + 7^2 + 8^2 + \ldots + 21^2$

(vi) $10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 20^3$

(vii) $1 + 3 + 5 + \ldots + 71$.

தீர்வு :

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + 60$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = \frac{60 \times (60+1)}{2} = \frac{60 \times 61}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = 1830$$

(ii) $3 + 6 + 9 + \ldots + 96$

$$3 + 6 + 9 + \ldots + 96 = 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 32)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore 3 + 6 + 9 + \ldots + 96 = 3\left[\frac{32 \times (32+1)}{2}\right]$$

$$= 3\left[\frac{32 \times 33}{2}\right]$$

$$3 + 6 + 9 + \ldots + 96 = 1584$$

(iii) $51 + 52 + 53 + \ldots + 92$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$51 + 52 + 53 + \ldots + 92 = (1 + 2 + 3 + \ldots + 92) - (1 + 2 + \ldots + 50)$$

$$= \frac{92 \times (92+1)}{2} - \frac{50 \times (50+1)}{2}$$

$$= \frac{92 \times 93}{2} - \frac{50 \times 51}{2}$$

$$= 4278 - 1275$$

$$51 + 52 + 53 + \ldots + 92 = 3003$$

(iv) $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 225$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 225 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 15^2$$

$= \frac{15(15+1)[2(15)+1]}{6}$

$= \frac{15\times16\times31}{6}$

$1 + 4 + 9 + 16 + ... + 225 = 1240$

(v) $6^2 + 7^2 + 8^2 + ... + 21^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$6^2 + 7^2 + 8^2 + ... + 21^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 21^2) - (1^2 + 2^2 + ... + 5^2)$

$= \frac{21\times(21+1)[2(21)+1]}{6} - \frac{5\times6\times11}{6}$

$= \frac{21\times22\times43}{6} - 55 = 3311 - 55$

$6^2 + 7^2 + 8^2 ... + 21^2 = 3256$

(vi) $10^3 + 11^3 + 12^3 + ... + 20^3$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 20^3) - (1^3 + 2^3 + ... + 9^3)$

$= \left[\frac{20(20+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{9\times(9+1)}{2}\right]^2$

$= \left[\frac{20\times21}{2}\right]^2 - \left[\frac{9\times10}{2}\right]^2 = (210)^2 - (45)^2$

$= 44100 - 2025$

$10^3 + 11^3 + 12^3 + ... + 20^3 = 42075$

(vii) $1 + 3 + 5 + .. + 71$

இங்கு $a = 1, d = 3 - 1 = 2$

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{71-1}{2} + 1 = \frac{70}{2} + 1 = 36$

n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $= n^2$

$1 + 3 + 5 + ... + 71 = (36)^2 = 1296$

2. $1 + 2 + 3 + ... + k = 325$, எனில் $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3$ யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$= \frac{k(k+1)}{2} = 325$

முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் $= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

$= (325)^2 = 1,05,625$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = 1,05,625$

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = 44100$, எனில் $1 + 2 + 3 + ... + k$ யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 = 44100 = (210)^2$

$\therefore 1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} = 210$

$1 + 2 + 3 + ... + k = 210$

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 14400 கிடைக்கும்?

தீர்வு :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (120)^2$

$\therefore \frac{n(n+1)}{2} = 120$

$n(n+1) = 120 \times 2$

$n(n+1) = 240$

$n^2 + n - 240 = 0$

$(n - 15)(n + 16) = 0$

$n = 15$ (அல்லது) (-16)

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

∴ கூட்ட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 15

5. முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 285 மற்றும் முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் 2025 எனில் n -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 285$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 285$ ...(1)

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = 2025$

$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 2025 = (45)^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 45$

(1) $\Rightarrow \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\left[\frac{(2n+1)}{3}\right] = 285$

$$45 \times \left(\frac{2n+1}{3}\right) = 285$$

$2n + 1 = 285 / 15$

$2n + 1 = 19$

$2n = 19 - 1 = 18$

$$n = \frac{18}{2} = 9$$

6. ரேகாவிடம் 10 செ.மீ, 11 செ.மீ, 12 செ.மீ,... 24 செ.மீ என்ற பக்க அளவுள்ள 15 சதுர வடிவ வண்ணக் காகிதங்கள் உள்ளன. இந்த வண்ணக் காகிதங்களைக் கொண்டு எவ்வளவு பரப்பை அடைத்து அலங்கரிக்க முடியும்?

தீர்வு :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

வண்ணக் காகிதங்களால் அலங்கரிக்கும் பரப்பு $= 10^2 + 11^2 + 12^2 + ... + 24^2$

$10^2 + 11^2 + 12^2 + ... + 24^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 24^2) - (1^2 + 2^2 + ... + 9^2)$

$$= \frac{24 \times (24+1)[2(24)+1]}{6} - \frac{9 \times (9+1)[2(9)+1]}{6}$$

$$= (4 \times 25 \times 49) - \frac{9 \times 10 \times 19}{6}$$

$= 4900 - 285 = 4615$

4615 செ.மீ^{2} பரப்பளவு அலங்கரிக்க இயலும்.

7. $(2^3 - 1) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + ...$ என்ற தொடர்வரிசையின் (i) n உறுப்புகள் வரை (ii) 8 உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

(i) $(2^3 - 1) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + ...$ n உறுப்புகள் வரை

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் பொது உறுப்பு

$= (2n)^3 - (2n - 1)^3$

$= 8n^3 - [(2n)^3 - 3(2n)^2(1) + 3(2n)(1) - 1^3]$

$= 8n^3 - [8n^3 - 12n^2 + 6n - 1]$

$= 8n^3 - 8n^3 + 12n^2 - 6n + 1$

$= 12n^2 - 6n + 1$

$$= 12\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 6\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n$$

$= 2n(n + 1)(2n + 1) - 3n(n + 1) + n$

$= 2n(2n^2 + n + 2n + 1) - 3n^2 - 3n + n$

$= 4n^3 + 6n^2 + 2n - 3n^2 - 3n + n$

$= 4n^3 + 3n^2$

n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $= 4n^3 + 3n^2$

(ii) $(2^3 - 1) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + ...$ 8 உறுப்புகள் வரை

n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $= 4n^3 + 3n^2$

8 உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$= 4(8)^3 + 3(8)^2$

$= 2048 + 192 = 2240$

கூடுதல் = 2240

பயிற்சி 2.10

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்.

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி, a மற்றும் b, என்ற மிகை முழுக்களுக்கு, தனித்த மிகை முழுக்கள் q மற்றும் r, $a = bq + r$, என்றவாறு அமையுமானால், இங்கு r ஆனது

(1) $1 < r < b$ (2) $0 < r < b$

(3) $0 \leq r < b$ (4) $0 < r \leq b$

[விடை : (3)]

2. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, எந்த மிகை முழுவின் கனத்தையும் 9 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள்

(1) 0, 1, 8 (2) 1, 4, 8

(3) 0, 1, 3 (4) 1, 3, 5 [விடை : (1)]

3. 65 மற்றும் 117 –யின் மீ.பொ.வ –வை 65 m – 117 என்ற வடிவில் எழுதும்போது, m –யின் மதிப்பு

(1) 4 (2) 2

(3) 1 (4) 3 [விடை : (2)]

தீர்வு :

65 மற்றும் 117 இன் மீ.பொ.வ = 13

$65 m - 117 = 13$

$65 m = 13 + 117 = 130$

$$m = \frac{130}{65} = 2$$

4. 1729 –ஐ பகாக் காரணிப்படுத்தும் போது, அந்தப் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் கூடுதல்

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 4 [விடை : (3)]

தீர்வு : $1729 = 7^1 + 13^1 + 19^1$

அடுக்குகளின் கூடுதல் $= 1 + 1 + 1 = 3$

5. 1 முதல் 10 வரையுள்ள (இரண்டு எண்களும் உட்பட) அனைத்து எண்களாலும் வகுபடும் மிகச்சிறிய எண்

(1) 2025 (2) 5220

(3) 5025 (4) 2520 [விடை : (4)]

தீர்வு : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 இவற்றின் மீ.பொ.ம 2520

6. $7^{4k} \equiv$ _____ (மட்டு 100)

(1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4 [விடை: (1)]

7. $F_1 = 1$, $F_2 = 3$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ எனக் கொடுக்கப்படின் F_5 ஆனது

(1) 3 (2) 5
(3) 8 (4) 11 [விடை: (4)]

தீர்வு :
$F_1 = 1, F_2 = 3, F_3 = 3 + 1 = 4, F_4 = 4 + 3 = 7,$
$F_5 = 7 + 4 = 11$

8. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4 எனில், பின்வரும் எண்களில் எது இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்?

(1) 4551 (2) 10091
(3) 7881 (4) 13531 [விடை : (3)]

தீர்வு :
$a = 1, d = 4$
$t_n = a + (n - 1) d = 1 + (n - 1) 4;$
அந்த எண் 4 இன் மடங்கு + 1 ஆகும்.
$\therefore$ 7881.

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6 –வது உறுப்பின் 6 மடங்கும், 7 –வது உறுப்பின் 7 மடங்கும் சமம் எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 13 வது உறுப்பு

(1) 0 (2) 6
(3) 7 (4) 13 [விடை: (1)]

தீர்வு :

$$6t_6 = 7t_7$$
$$6[a + 5d] = 7[a + 6d]$$
$$6a + 30d = 7a + 42d$$
$$7a - 6a + 42d - 30d = 0$$
$$a + 12d = 0$$
$$a + (13 - 1) d = 0$$
$$t_{13} = 0$$

10. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 31 உறுப்புகள் உள்ளன. அதன் 16 வது உறுப்பு m எனில், அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல்.

(1) 16 m (2) 62 m
(3) 31 m (4) $\frac{31}{2}m$ [விடை : (3)]

தீர்வு : $n = 31, t_{16} = m$
$a + 15d = m$

$$s_{31} = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{31}{2}[a + a + 30d]$$
$$= \frac{31}{2}[a + 15d + a + 15d]$$
$$= \frac{31}{2}[2m] = 31m$$

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4. இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் அதன் கூடுதல் 120 கிடைக்கும்?

(1) 6 (2) 7
(3) 8 (4) 9 [விடை : (3)]

தீர்வு : $a = 1, d = 4$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)4]$$
$$120 \times 2 = n[2 + 4(n-1)]$$
$$240 = n[2 + 4n - 4]$$
$$= n[4n - 2]$$
$$240 = 2n[2n - 1]$$
$$120 = n[2n - 1]$$
$$2n^2 - n - 120 = 0$$
$$2n^2 - 16n + 15n - 120 = 0$$
$$2n(n - 8) + 15(n - 8) = 0$$
$$(n - 8)(2n + 15) = 0$$
$$n = 8 \text{ or } n = \frac{-15}{2}$$
$$n = \frac{-15}{2} \text{ என்பது இயலாதது}$$
$$\therefore n = 8$$

12. $A = 2^{65}$ மற்றும் $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \ldots + 2^0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பின்வருவனவற்றில் எது உண்மை?

(1) B ஆனது A ஐ விட 2^{64} அதிகம்
(2) A மற்றும் B சமம்
(3) B ஆனது A –ஐ விட 1 அதிகம்
(4) A ஆனது B –ஐ விட 1 அதிகம்

[விடை : (4)]

தீர்வு :

$$A = 2^{65}$$

$$B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \ldots + 2^0$$

இங்கு $a = 2^{64}; r = \frac{2^{63}}{2^{64}} = \frac{1}{2}; n = 65$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$B = \frac{2^{64}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{65} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 2^{65}\left(\frac{1}{2^{65}} - 1\right)(-1)$$

$$= (1 - 2^{65})(-1)$$

$$B = 2^{65} - 1$$

ஆனால் $A = 2^{65}$

$\therefore B = A - 1$

$A = B + 1$

13. $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் அடுத்த உறுப்பு

(1) $\frac{1}{24}$ (2) $\frac{1}{27}$

(3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{81}$ [விடை : (2)]

தீர்வு :

$$a = \frac{3}{16}; r = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{8} \times \frac{16}{3} = \frac{2}{3}.$$

இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஆகும்.

$\therefore$ அடுத்த உறுப்பு $\frac{1}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{27}$

14. $t_1, t_2, t_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசை எனில் $t_6, t_{12}, t_{18} \ldots$ என்பது

(1) ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை

(2) ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசை

(3) ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையுமல்ல, பெருக்குத் தொடர் வரிசையுமல்ல

(4) ஒரு மாறிலித் தொடர் வரிசை. [விடை: (2)]

தீர்வு :

$t_1, t_2, t_3, \ldots$ என்பது கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில் $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots\ldots$ என்பதும் பொது வேறுபாடு 6d உடைய ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

15. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 15)$ -யின் மதிப்பு

(1) 14400 (2) 14200

(3) 14280 (4) 14520 விடை : (3)

தீர்வு :

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 15)$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{15 \times 16}{2}\right]^2 - \left[\frac{15 \times 16}{2}\right] = (120)^2 - 120$$

$$= 14400 - 120 = 14,280$$

அலகுப் பயற்சி - 2

1. எல்லா மிகை முழுக்கள் n -க்கும் $n^2 - n$ ஆனது 2 -ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

ஒவ்வொரு மிகை எண்ணும் 2q அல்லது 2q + 1 என்ற வடிவில் அமையும்.

நிலை (i) $n = 2q$ எனில்

$$n^2 - n = (2q)^2 - (2q)$$

$$= 4q^2 - 2q$$

$$= 2q(2q - 1)$$

$$n^2 - n = 2r \quad \text{இங்கு} \quad r = q(2q - r)$$

$\therefore n^2 - n$ என்பது இரட்டை எண் ஆகையால் 2 ஆல் வகுபடும்.

நிலை (ii) $n = 2q + 1$ எனில்

$$n^2 - n = (2q + 1)^2 - (2q + 1)$$

$$= 4q^2 + 4q + 1 - 2q - 1$$

$$= 4q^2 + 2q$$

$$= 2q(2q + 1)$$

$$= 2r \quad \text{இங்கு} \quad r = q(2q + 1)$$

$\therefore n^2 - n$ என்பது இரட்டை எண் ஆகையால் 2 ஆல் வகுபடும்.

எனவே எல்லா மிகை முழுக்கள் n இக்கும் $n^2 - n$ ஆனது 2 ஆல் வகுபடும்.

2. ஒரு பால்காரரிடம் 175 லிட்டர் பசும் பாலும் 105 லிட்டர் எருமைப் பாலும் உள்ளது. இவற்றை அவர் சம கொள்ளளவுக் கொண்ட இருவகையான கலன்களில் அடைத்து விற்க விருப்பப்படுகிறார்.

(i) இவ்வாறு விற்பதற்குத் தேவைப்படும் கலன்களின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு எவ்வளவு? இவ்வாறாக

(ii) எத்தனை கலன் பசும்பால் மற்றும்

(iii) எருமைப்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்?

தீர்வு :

(i) பால்காரரிடம் உள்ள

பசும்பாலின் அளவு = 175 லிட்டர்

எருமைப்பாலின் அளவு = 105 லிட்டர்

விற்கப் பயன்படுத்தும் இரு கலன்களும் சம கொள்ளளவு உடையவை.

∴ ஒரு கலனின் கொள்ளளவு = 105, 175 இன் மீ.பொ.வ

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி

$175 = 105 \times 1 + 70$

$105 = 70 \times 1 + 35$

$70 = 35 \times 2 + 0$

மீதி $= 0$

∴ (105, 175) இன் மீ.பொ.வ $= 35$

கலனின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு = 35 லிட்டர்.

(ii) பசும்பால் கலன்களின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{பசும்பாலின் அளவு}}{\text{ஒரு கலனின் கொள்ளளவு}}$$

$$= \frac{175}{35} = 5$$

விற்கப்பட்ட பசும்பாலின் அளவு = 5 கலன்கள்

(iii) எருமைப்பால் கலன்களின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{எருமைப்பாலின் மொத்த அளவு}}{\text{ஒரு கலனின் கொள்ளளவு}}$$

$$= \frac{105}{35} = 3$$

விற்கப்பட்ட எருமைப்பாலின் அளவு

= 3 கலன்கள்

3. a, b, c என்ற எண்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7 மற்றும் 10. a + 2b + 3c ஐ 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு :

a, b, c என்ற எண்களை 13 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி 9, 7, 10

∴ $a = 13q_1 + 9,\ b = 13q_2 + 7,\ c = 13q_3 + 10$

எனவே, $a + 2b + 3c = (13q_1 + 9) + 2(13q_2 + 7) + 3(13q_3 + 10)$

$= 13q_1 + 9 + 26q_2 + 14 + 39q_3 + 30$

$= 13(q_1 + 2q_2 + 3q_3) + 53$

$= 13(q_1 + 2q_2 + 3q_3) + (4 \times 13 + 1)$

$= 13(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4) + 1$

∴ a + 2b + 3c ஐ 13 ஆல் வகுக்க, மீதி 1 கிடைக்கும்.

4. 107 ஆனது 4q + 3, q என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என்ற வடிவில் அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எண் 107,

இது ஒரு மிகை எண்

எனவே a = 107 மற்றும் b = 4 என்க

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$107 = 4q + r$ இங்கு $0 \le r < 4$

∴ அதாவது r = 0, 1, 2, 3.

107 ஒற்றை எண், எனவே மீதி 0 அல்லது 2 ஆக இருக்க இயலாது.

எனவே, 107 ஐ 4q அல்லது 4q + 2 என்ற வடிவில் அமைக்க இயலாது. மீதமுள்ள வடிவங்கள் 4q + 1 அல்லது 4q + 3

$4q + 1 = 107$ எனில்

$4q = 107 - 1$

$= 106$

$q = \frac{106}{4}$ ஒரு இயல் எண் அல்ல

∴ $107 = 4q + 3$ என்ற வடிவில் மட்டுமே அமையும்

∴ இங்கு $107 = 4q + 3$

$4q = 107 - 3 = 104$

$q = \frac{104}{4} = 26$

$q = 26$

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் (m + 1) வது உறுப்பானது (n + 1) வது உறுப்பின் இரு மடங்கு எனில், (3m + 1) வது உறுப்பானது (m + n + 1) வது உறுப்பின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

தீர்வு :

a-என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் d-பொது வித்தியாசம் என்க.

(m + 1) –வது உறுப்பு = (n + 1) ஆவது உறுப்பு × 2

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{m+1} = a + (m+1-1)d = a + md$

$t_{n+1} = a + (n+1-1)d = a + nd$

$t_{m+1} = 2t_{n+1}$

$a + md = 2(a + nd)$

$a + md = 2a + 2nd$

$md - 2nd = 2a - a$

$(m-2n)d = a$

$(m+n+1)^{\text{வது}}$ உறுப்பு $= t_{m+n+1} = a + (m+n+1-1)d$

$= a + (m+n)d$

$= (m-2n)d + (m+n)d$

$= md - 2nd + md + nd$

$= 2md - nd$

$(m+n+1)^{\text{வது}}$ உறுப்பின் இருமடங்கு $= 2(2md - nd)$

$= 2(2m-n)d$ ... (1)

$(3m+1)$ –வது உறுப்பு

$= t_{3m+1} = a + (3m+1-1)d$

$= a + 3md$

$= (m-2n)d + 3md$

$= md - 2nd + 3md$

$= 4md - 2nd$

$= 2(2m-n)d$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) யிலிருந்து $(3m+1)^{\text{வது}}$ உறுப்பு $= (m+n+1)^{\text{வது}}$ உறுப்பின் இரு மடங்கு.

6. – 2, – 4, – 6 ... – 100 என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12 –வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12 –வது உறுப்பு காண வேண்டும். எனவே இறுதி உறுப்பை முதல் உறுப்பாக அமைக்க.

i.e., – 100, ..., – 6, – 4, – 2 என்பது தேவையான கூட்டுத் தொடர்

முதல் உறுப்பு $a = -100$

$d = -4 - (-6) = -4 + 6 = 2$

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{12} = -100 + (12-1)(2)$

$= -100 + 22 = -78$

இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12 –வது உறுப்பு $= -78$.

7. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகள் ஒரே பொதுவித்தியாசம் கொண்டுள்ளன. ஒரு தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 2 மற்றும் மற்றொரு தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 7. இரு தொடர்வரிசைகளின் 10 வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம், 21வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்குச் சமம் என நிரூபித்து உள்ளது. இந்த வித்தியாசம் அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசத்திற்குச் சமமாக உள்ளது என நிறுவுக.

தீர்வு :

இரு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகள் ஒரே பொது வேறுபாடு கொண்டுள்ளன. அந்த பொது வேறுபாடு d என்க.

முதல் கூட்டுத் தொடரில் $a = 2$

இரண்டாவது கூட்டுத் தொடரில் $a = 7$

10 வது உறுப்பு $t_{10} = a + 9d$

2வது கூட்டுத்தொடரில் 10 வது உறுப்பு $t_{10} = 7 + 9d$

$= a + 9d$

முதல் கூட்டுத் தொடரில் 10வது உறுப்பு $t_{10} = 2 + 9d$

அவற்றின் வேறுபாடு

$= (7 + 9d) - (2 + 9d)$

$= 7 + 9d - 2 - 9d$

$= 5$ ... (1)

21 வது உறுப்பு $t_{21} = a + 20d$

முதல் கூட்டுத் தொடரின் 21 வது உறுப்பு

$= 2 + 20d$

இரண்டாவது கூட்டுத் தொடரின் 21வது உறுப்பு

$= 7 + 20d$

அவற்றின் வேறுபாடு

$= 7 + 20d - (2 + 20d)$

$= 7 + 20d - 2 - 20d = 5$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, 21 வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு 10 வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகளுக்குச் சமம்.

இரு தொடரிலும் உள்ள n வது உறுப்புகளின் வேறுபாடு

$= 7 + (n-1)d - [2 + (n-1)d]$

$= 7 + nd - d - 2 - nd + d$

$= 7 - 2 = 5$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. ஒரு நபர் 10 வருடங்களில் ₹ 16500 ஐ சேமிக்கிறார். ஒவ்வொரு வருடமும் அவர் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய வருடம் சேமிக்கும் தொகையை விட ₹ 100 அதிகம். அவர் முதல் வருடம் எவ்வளவு சேமித்திருப்பார்?

தீர்வு :

முதல் வருடத்தில் அவரது சேமிப்பு x என்க.

எனவே அவரது 10 வருட சேமிப்பு

$x + (x + 100) + (x + 200) + ...$ 10 உறுப்புகள் வரை

$= 16500$

$x + x + 100 + x + 200 + \ldots$ 10 உறுப்புகள் வரை $= 16500$

$(x + x + \ldots$ 10 உறுப்புகள்$) + (100 + 200 + \ldots$ 9 உறுப்புகள்$) = 16500$

$$10x + \frac{9}{2}\left[2(100) + 8(100)\right] = 16500$$

$$10x = 16500 - 4500$$

$$10x = 12000$$

$$x = \frac{12000}{10} = 1200$$

அவரது முதல் வருட சேமிப்பு = ₹ 1200

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 2 –வது உறுப்பு $\sqrt{6}$ மற்றும் 6 வது உறுப்பு $9\sqrt{6}$ எனில் அந்தத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

தீர்வு :

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு $= ar^{n-1}$

2–வது உறுப்பு $= \sqrt{6}$

$$ar^{2-1} = \sqrt{6}$$

$$ar = \sqrt{6}$$

6 வது உறுப்பு $= 9\sqrt{6}$

$$ar^{6-1} = 9\sqrt{6}$$

$$ar^5 = 9\sqrt{6}$$

$$\therefore \frac{ar^5}{ar} = \frac{9\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$r^4 = 9$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \sqrt{3}$$

மேலும் $ar = \sqrt{6}$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{r} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$a = \sqrt{2}$$

$\therefore$ தேவையான பெருக்குத்தொடர் $a, ar, ar^2, \ldots$

$$= \sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 \ldots.$$

$$= \sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2} \ldots.$$

10. ஒரு வாகனத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 15% குறைகிறது. வாகனத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹ 45,000 எனில், 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு வாகனத்தின் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு :

வாகனத்தின் முதல் ஆண்டு மதிப்பு $= ₹\ 45000$

ஒவ்வொரு ஆண்டும் குறையும் மதிப்பு 15%

$$= \frac{15}{100}$$

$\therefore$ ஒரு வருடத்திற்குப் பின் வாகனத்தின் மதிப்பு

$$= 45000 \times \frac{85}{100}$$

$$45000,\ 45000 \times \frac{85}{100},\ 45000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^2, \ldots \text{என}$$

தொடரும் வாகனத்தின் மதிப்பானது ஒரு பெருக்குத் தொடரை அமைக்கும்.

$$a = 45000,\ r = \frac{85}{100}$$

$\therefore$ 3 வருடத்திற்குப் பின் வாகனத்தின் மதிப்பு, $n = 4$.

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$t_4 = 45000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^{4-1}$$

$$= 45000 \times \frac{85}{100} \times \frac{85}{100} \times \frac{85}{100}$$

$$= 27635.625$$

$\therefore$ 3 வருடத்திற்குப் பின் வாகனத்தின் மதிப்பு $= ₹\ 27636$

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றம் மற்றும் வழிமுறை

1. இரு முழுக்களுக்கிடையே உள்ள _____ காண யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம் பயன்படுகிறது.

(1) மீ.பொ.வ (2) மடங்கு
(3) இரண்டும் (4) எதுவுமில்லை

[விடை: 1]

2. b இன் எந்த மதிப்புக்கு யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றம் பயன்படாது?

(1) மிகை முழுக்களுக்கு
(2) பூச்சியத்திற்கு
(3) குறை முழுக்களுக்கு
(4) மேற்கூறிய அனைத்திற்கும் [விடை: 2]

3. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி 455 மற்றும் 42 ஆனது கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்_____

(1) $455 = 42 \times 9 + 77$
(2) $455 = 42 \times 10 + 35$
(3) $455 = 42 \times 11 - 7$
(4) $455 = 42 \times 12 - 49$ [விடை: 2]

அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்

4. 132 ஐ அதன் பகாக் காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதினால் கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது சரி?

(1) $132 = 2 \times 6 \times 11$
(2) $132 = 2^2 \times 3 \times 11$
(3) $132 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
(4) $132 = 3 \times 4 \times 11$ [விடை: (2)]

தீர்வு :

2	132
2	66
3	33
11	11
	1

$132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11$
$= 2^2 \times 3 \times 11$

5. 240 இன் பகாக் காரணிகளின் கூடுதல்

(1) 16 (2) 14
(3) 12 (4) 10 [விடை: (1)]

தீர்வு :

2	240
2	120
2	60
2	30
3	15
5	5
	1

240 இன் பகாக்காரணிகள்

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
கூடுதல் $= 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5 = 16$

6. தீர்க்க: $25 + 37 \equiv$ _____ (மட்டு 12)

(1) 2 (2) 3
(3) 1 (4) 62 [விடை: (1)]

தீர்வு :

$25 + 37 \equiv x$ (மட்டு 12)
$62 \equiv x$ (மட்டு 12)
$62 - x = 12k$

$$\frac{62 - x}{12} = k$$

$$\frac{62 - 2}{12} = 5$$

$\therefore x = 2.$

7. 144 ஐ 11 இன் மட்டு மதிப்பாக அமைத்தால் கிடைப்பது?

(1) 144 மட்டு 11 (2) 1 மட்டு 11
(3) 2 மட்டு 11 (4) 143 மட்டு 11

[விடை: 2]

தீர்வு : $144 \equiv x$ (மட்டு 11)
$144 - x$ என்பது 11 இன் மடங்கு
$143 = (144 - 1)$ என்பது 11 இன் மடங்கு
$\therefore x = 1$
$144 \equiv 1$ (மட்டு 11).

தொடர் வரிசைகள்

8. 7, 10, 13, ...என்ற தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வேறுபாடு

(1) 1, 7 (2) 7, 10
(3) 7, 3 (4) 13, 10

[விடை: (3)]

தீர்வு:
7, 10, 13, ...
$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \Rightarrow 10 - 7 = 13 - 10 = 3$
$\therefore \quad d = 3$
முதல் உறுப்பு a =7.

கூட்டுத் தொடர் வரிசை

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் n வது உறுப்பு b எனில் பொது வேறுபாடு

(1) $\frac{b-a}{n+1}$ (2) $\frac{b-a}{n-1}$
(3) $\frac{b-a}{n}$ (4) $\frac{b+a}{n-1}$ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :
முதல் உறுப்பு = a
பொது வேறுபாடு = d என்க
$n^{\text{வது}}$ உறுப்பு = b
$a + (n-1)d = b$
$(n-1)d = b - a$
$d = \frac{b-a}{n-1}$

10. $\frac{1}{3}, \frac{1-3b}{3}, \frac{1-6b}{3}, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வேறுபாடு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{-1}{3}$
(3) $-b$ (4) b **[விடை: (3)]**

தீர்வு :
பொது வேறுபாடு = $t_2 - t_1$
$= \frac{1-3b}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1-3b-1}{3} = -\frac{3b}{3} = -b$

தொடர்கள்

11. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $3n^2 + 5n$ எனில் 164 அத்தொடரின் எத்தனையாவது உறுப்பு?

(1) 26 ஆவது (2) 27 ஆவது
(3) 28 ஆவது (4) எதுவுமில்லை **[விடை: (2)]**

தீர்வு :
$S_n = 3n^2 + 5n$
$S_1 = 3(1)^2 + 5 = 8 = a = t_1$
$S_2 = 3(2)^2 + 5(2) = 3(4) + 10$
$= 12 + 10 = 22$
$t_2 = S_2 - S_1 = 22 - 8 = 14$
$d = t_2 - t_1 = 14 - 8 = 6$
$a + (n-1)d = 164$
$8 + (n-1)6 = 164$
$n - 1 = \frac{164-8}{6} = \frac{156}{6} = 26$
$n = 26 + 1 = 27$

12. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல், இரண்டாவது மற்றும் கடைசி உறுப்புகள் முறையே a, b மற்றும் 2a ஆகும். அவற்றின் கூடுதல்

(1) $\frac{ab}{2(b-a)}$ (2) $\frac{ab}{b-a}$
(3) $\frac{3ab}{2(b-a)}$ (4) எதுவுமில்லை **[விடை: (3)]**

தீர்வு :
$n = \frac{l-a}{d} + 1$
$= \frac{2a-a}{b-a} + 1 = \frac{a}{b-a} + 1$
$= \frac{a+b-a}{b-a} = \frac{b}{b-a}$
கூடுதல் $= \frac{n}{2}(l+a)$
$= \frac{b}{2(b-a)}(2a+a)$
கூடுதல் $= \frac{3ab}{2(b-a)}$

பெருக்குத் தொடர் வரிசை

13. 2, 6, 18, . . . என்ற பெருக்குத் தொடரின் 7 வது உறுப்பு

(1) 5832 (2) 2919
(3) 1458 (4) 729 **[விடை: (3)]**

தீர்வு : $a = 2, \; r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{6}{2} = 3$
$t_n = ar^{n-1}$
$t_7 = 2(3)^{7-1} = 2(3)^6$
$= 2 \times 729 = 1458.$

14. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் எந்த உறுப்பும்____ ஆகாது.

(1) 3 (2) 1
(3) 2 (4) 0 **[விடை: (4)]**

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் கூடுதல்

15. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

(1) $\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ (2) $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(3) $\frac{2ab}{(a+b)}$ (4) $\frac{a+b}{2}$ **[விடை: (2)]**

16. $-2, 6, -18, \ldots$ என்ற தொடரின் 7 உறுப்புகளின் கூடுதல்

(1) 1094 (2) -1094

(3) 9041 (4) -9041 **[விடை: (2)]**

தீர்வு : $a = -2,\ r = \frac{6}{-2} = -3$

கூடுதல் $= \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$S_7 = \frac{(-2)[(-3)^7-1]}{-3-1}$

$= \frac{(-2)(-2187-1)}{-4} = \frac{(-2)(-2188)}{-4}$

$= -1094.$

சிறப்புத் தொடர்கள்

17. $\frac{5+9+13+\ldots \text{ } n \text{ உறுப்புகள் வரை}}{7+9+11+\ldots \text{ } (n+1) \text{ உறுப்புகள் வரை}} = \frac{17}{16}$

எனில் n = ?

(1) 8 (2) 7

(3) 10 (4) 11 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$5 + 9 + 13 + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை

$= \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$d = 9 - 5 = 4;\ a = 5$

கூடுதல் $= \frac{n}{2}[2\times 5+(n-1)4]$

$= \frac{n}{2}[10+4n-4]$

$= \frac{n}{2}[4n+6] = n(2n+3)$

கூடுதல் $7 + 9 + 11 + \ldots (n+1)$ உறுப்புகள் வரை

$= \frac{n+1}{2}[2\times 7+(n+1-1)2]$

$= \frac{n+1}{2}[14+2n]$

$= \frac{(n+1)}{2}2(7+n) = (n+1)(7+n)$

$\frac{5+9+13+\ldots \text{ } n \text{ உறுப்புகள் வரை}}{7+9+11+\ldots \text{ } (n+1) \text{ உறுப்புகள் வரை}} = \frac{17}{16}$

$\frac{n(3+2n)}{(n+1)(7+n)} = \frac{17}{16}$

$16n(3+2n) = 17(n+1)(7+n)$

$48n + 32n^2 = 17n^2 + 136n + 119$

$48n + 32n^2 - 17n^2 - 136n - 119 = 0$

$15n^2 - 88n - 119 = 0$

$15n^2 - 105n + 17n - 119 = 0$

$15n(n-7) + 17(n-7) = 0$

$(n-7)(15n+17) = 0$

$n = 7$ அல்லது $n = -\frac{17}{15}$

$n = -\frac{17}{15}$ ஆக இருக்க இயலாது.

$\therefore\ n = 7$

18. முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்

(1) $2n-1$ (2) $2n+1$

(3) n^2 (4) n^2-1 **[விடை: (3)]**

19. $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 = ?$

(1) 55^2 (2) 10^2

(3) 55^3 (4) 10^3 **[விடை: (1)]**

20. $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = ?$

(1) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ (2) $\frac{n(n+1)}{2}$

(3) n^2 (4) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

[விடை (4)]

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைத் தருக.

தீர்வு :

"1 ஐ தவிர்த்து மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த முடியும். மேலும் இந்தக் காரணிப்படுத்துதலானது (பகா எண்களை எழுதும் வரிசையைத் தவிர்த்து) ஒரே முறையில் அமையும்."

2. 6^n என்பது n ஒரு இயல் எண்ணாகக் கொண்ட எண் 6^n ஆனது 7 ஆல் வகுபடுமா என ஆராய்க.

தீர்வு : $6^n = (2\times 3)^n = 2^n \times 3^n$

6^n இன் பகாக்காரணிகளுள் 7 இல்லை. எனவே 6^n ஆனது 7 ஆல் வகுபடாது.

3. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 100 மற்றும் 190 இன் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம காண்க.

தீர்வு :

அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தின்படி அனைத்து பகு எண்களையும் பகாக் காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுத இயலும்.

2	100
2	50
5	25
	5

2	190
5	95
	19

$\therefore$ 100 மற்றும் 190 ஐக் காரணிப்படுத்த

$100 = 2^2 \times 5^2$

$190 = 2^1 \times 5^1 \times 19^1$

$\therefore$ 100 மற்றும் 190 இன் மீ.பொ.வ

$= 2^1 \times 5^1 = 10$

மீ.பொ.வ × மீ.பொ.ம = இரு எண்களின் பெருக்கற்பலன்

$10 \times$ மீ.பொ.ம. $= 100 \times 190$

மீ.பொ.ம $= \dfrac{100 \times 190}{10} = 1900$

4. மீச்சிறு பகு எண் மற்றும் மீச்சிறு பகா எண்ணின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு :

மீச்சிறு பகு எண் $= 4 = 2^2$

மீச்சிறு பகா எண் $= 2 = 2^1$

$\therefore$ 4, 2 மீ.பொ.வ $= 2$

5. மூன்று சாலைகள் சந்திப்பில் பொருத்தப்பட்டுள்ள எச்சரிக்கை விளக்குகள் 48 வினாடி, 72 வினாடி மற்றும் 108 வினாடிகளில் மாறுகின்றன. அவை மூன்றும் காலை 8.20 மணிக்கு சேர்ந்து மாறின எனில் மீண்டும் அவை மூன்றும் சேர்ந்து எந்த நேரம் மாறும்?

தீர்வு :

சேர்ந்து மாறும் நேரம் = 48, 72, 108 இன் மீ.பொ.ம

12	48, 72, 108
3	4, 6, 9
2	4, 2, 3
	2, 1, 3

மீ.பொ.ம $= 12 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 432$

எனவே அவை 432 வினாடிகளுக்குப் பின் சேர்ந்து மாறும் = 432/60 = 7 நிமிடம் 12 வினாடி.

மீண்டும் மாறும் நேரம் 8 : 27 : 12 மு.ப

6. 7 ஆனது $(2^{29} + 3)$ ஐ வகுக்குமா?

தீர்வு :

$2^3 \equiv 1$ (மட்டு 7)

$(2^3)^8 \equiv 1^8$ (மட்டு 7)

$2^3 2^{24} \equiv 1 \times 1^8$ (மட்டு 7)

$2^{27} \equiv 1$ (மட்டு7)

$2^2\, 2^{27} \equiv 4 \times 1$ (1 மட்டு 7)

$2^{29} \equiv 4$ (மட்டு 7)

$2^{29} + 3 = (4 + 3)$ (மட்டு7)

$2^{29} + 3 \equiv 0$ (மட்டு 7)

$2^{29} + 3$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்.

7. $3^{202} + 5^9$ ஐ 8 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி என்ன?

தீர்வு :

$3^2 = 1$ (மட்டு 8)

$(3^2)^{101} \equiv 1^{101}$ (மட்டு 8)

$3^{202} \equiv 1$ (மட்டு 8)

$5^2 \equiv 1$ (மட்டு8)

$5 \equiv 5$ (மட்டு 8)

$(5^2)^4 \equiv 1^4$ (மட்டு 8)

$5^8.5^1 \equiv 5$ (மட்டு 8)

$3^{202} + 5^9 = 6$ (மட்டு 8)

$\therefore$ மீதி $= 6$

8. $a_n = (-1)^{n-1}, 2^n$ எனில் அத்தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_n = (-1)^{n-1} 2^n$

$a_1 = (-1)^{1-1} 2^1$

$= (-1)^0 2^1 = 1 \times 2 = 2$

$a_2 = (-1)^{2-1} \times 2^2$

$= (-1)^1 \times 4 = -4$

$a_3 = (-1)^{3-1} \times 2^3 = (-1)^2 \times 8 = 8$

$\therefore$ முதல் மூன்று உறுப்புகள் 2, – 4, 8

9. $a_n = \dfrac{n(n-3)}{n+4}$ என்ற தொடரின் 15 வது உறுப்புக் காண்க.

தீர்வு :

$a_n = \dfrac{n(n-3)}{n+4}$

$a_{15} = \dfrac{15(15-3)}{15+4}$

$= \dfrac{15 \times 12}{19}$

$a_{15} = \dfrac{180}{19}$

10. 5, 8, 11,...என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்புக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் முதல் உறுப்பு 5

அடுத்தடுத்த எண்கள் முந்தைய எண்ணுடன் 3 ஐக் கூட்டுவதால் கிடைக்கின்றன.

$\therefore$ n வது உறுப்பு $a_n = 3n + 2$

11. $\frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{8}{2}, \ldots$ என்ற தொடரின் பொது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு :

ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த உறுப்பிலும் இத்தொடரின் தொகுதி $n(n-2)$ அதிகரிக்கிறது. பகுதி மாறாமல் 2 ஆக இருக்கிறது.

$$\therefore \text{பொது உறுப்பு } a_n = \frac{n(n-2)}{2}$$

12. $a_n = \frac{2n-3}{6}$ என்ற தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$a_n = \frac{2n-3}{6}$$

$$\therefore a_1 = \frac{2(1)-3}{6} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$a_2 = \frac{2(2)-3}{6} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{2(3)-3}{6} = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6}$$

$\therefore$ முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{-1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}$

13. 2x, x + 10, 3x + 2 ஆகியவை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் x இன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

2x, x + 10, 3x + 2 என்பன கூட்டுத் தொடர் வரிசையை அமைக்கும்.

$$x + 10 - 2x = 3x + 2 - [x + 10]$$
$$-x + 10 = 3x + 2 - x - 10 = 2x - 8$$
$$10 + 8 = 2x + x$$
$$3x = 18$$
$$x = \frac{18}{3} = 6$$

14. –1, 3, 7, 11, ...என்ற கூட்டுத் தொடரில் 95 எத்தனையாவது உறுப்பு?

தீர்வு :

$a = -1, \quad d = t_2 - t_1 = 3 - (-1) = 4$

கூட்டுத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு 95 என்க

$$t_n = 95$$
$$a + (n-1)d = 95$$
$$-1 + (n-1)4 = 95$$
$$(n-1)4 = 95 + 1 = 96$$
$$n - 1 = \frac{96}{4} = 24$$
$$n = 24 + 1 = 25$$

$\therefore$ 95 ஆனது கூட்டுத் தொடரின் 25 வது உறுப்பு

15. 3, 6, 9, 12, ..., 111 என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன?

தீர்வு :

இங்கு $t_2 - t_1 = 6 - 3 = 3$

$t_3 - t_2 = 9 - 6 = 3$

$\therefore$ இது ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

$a = 3, d = 3.$

கூட்டுத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு = 111

$$t_n = 111$$
$$a + (n-1)d = 111$$
$$3 + (n-1)3 = 111$$
$$(n-1)3 = 111 - 3 = 108$$
$$(n-1) = \frac{108}{3}$$
$$n - 1 = 36$$
$$n = 36 + 1 = 37$$

$\therefore$ கூட்டுத் தொடரில் 37 உறுப்புகள் உள்ளன.

16. 3, 7, 11, ...என்ற தொடரின் ஒரு உறுப்பு 184. இதனைச் சரிபார்?

தீர்வு :

இங்கு $7 - 3 = 4, 11 - 7 = 4$ எனவே இது ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்,

கூட்டுத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு = 184 என்க

எனவே $t_n = 184$

$$a + (n-1)d = 184$$
$$3 + (n-1)4 = 184$$
$$(n-1)4 = 184 - 3$$
$$(n-1)4 = 181$$
$$n - 1 = \frac{181}{4}$$
$$n - 1 = 45.25$$
$$n = 45.25 + 1 = 46.25$$

n ஒரு இயல் எண் அல்ல. எனவே 184 இக்கூட்டுத் தொடரின் உறுப்பு அல்ல.

17. ஈரிலக்க எண்களில் 7 ஆல் வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை காண்க.

தீர்வு :

7 ஆல் வகுபடும் முதல் ஈரிலக்க எண் = 14.

7 ஆல் வகுபடும் கடைசி ஈரிலக்க எண் = 98.

எனவே 14, 21, 28, ..., 98 என்ற கூட்டுத் தொடரின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை காண

$$a = 14, d = 7$$

$$n \text{ வது உறுப்பு} = 98$$

$$a + (n-1)\,d = 98$$

$$14 + (n-1)(7) = 98$$

$$(n-1)(7) = 98 - 14 = 84$$

$$n - 1 = \frac{84}{7} = 12$$

$$n = 12 + 1 = 13$$

∴ 7 ஆல் வகுபடும் ஈரிலக்க எண்கள் 13.

18. முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

முதல் n இயல் எண்கள் 1, 2, 3, 4,.... n

$a = 1; d = 2 - 1 = 1, l = n.$

$$\text{கூடுதல் } S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

$$= \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

∴ முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் $\frac{n(n+1)}{2}$

19. $S_n = 5n^2 + 3n$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில் n ஆவது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$S_n = 5n^2 + 3n$$

$$S_{n-1} = 5(n-1)^2 + 3(n-1)$$

$$= 5(n^2 - 2n + 1) + 3(n-1)$$

$$= 5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3$$

$$= 5n^2 - 7n + 2$$

$$n \text{ வது உறுப்பு} = S_n - S_{n-1}$$

$$\therefore n \text{ வது உறுப்பு} = [5n^2 + 3n] - [5n^2 - 7n + 2]$$

$$= 5n^2 + 3n - 5n^2 + 7n - 2$$

$$t_n = 10n - 2$$

20. $\frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, 1, -2, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் 9 வது உறுப்பையும், பொது உறுப்பையும் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு $a = \frac{1}{4}, \quad r = -2$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_9 = \frac{1}{4}(-2)^8 = 64$$

$$a_n = \frac{1}{4}(-2)^{n-1}$$

$$a_n = (-1)^{n-1}\,2^{n-3}$$

21. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் 7 வது உறுப்பானது 4 வது உறுப்பின் 8 மடங்கு மற்றும் அதன் 5 வது உறுப்பு 48 எனில் அப்பெருக்குத் தொடரைக் காண்க.

தீர்வு :

$$a_7 = 8a_4 \text{ மற்றும் } a_5 = 48$$

$$ar^6 = 8ar^3 \text{ மற்றும் } ar^4 = 48$$

$$r^3 = 8 \quad \Rightarrow a(2)^4 = 48$$

$$r = 2 \qquad a = \frac{48}{16} = 3$$

$$a = 3$$

∴ தேவையான பெருக்குத் தொடர் 3, 6, 12, 24, 48...

22. 5, 10, 20, 40,... என்ற பெருக்குத் தொடரில் 5120 எத்தனையாவது உறுப்பு?

தீர்வு : $a = 5, \quad r = 2$

$$a_n = 5120$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$5120 = 5(2)^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 1024$$

$$2^{n-1} = 2^{10}$$

$$n - 1 = 10$$

$$n = 10 + 1 = 11$$

5120 என்பது பெருக்குத் தொடரின் 11 வது உறுப்பு

23. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முடிவிலி வரை கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

$$a = 1, r = \frac{1}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

24. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் முடிவிலி வரை கூடுதல் காண்க

தீர்வு :

இங்கு $a = \frac{-3}{4}, r = \frac{-1}{4}$

கூடுதல் $= \frac{a}{1-r} = \frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)}$

கூடுதல் $= \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{-3}{5}$

25. $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times .... = 3$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times ....$

$= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ ஐக் கெள்வோம். இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையாகும்.

இங்கு $a = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

கூடுதல் $= \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....} = 3^1 = 3 =$ வலப்பக்கம்

26. $y = x + x^2 + x^3 + ...$ எனில் $x = \frac{y}{1+y}$ என நிரூபி.

தீர்வு :

$y = x + x^2 + x^3 + ...$

$= x(1 + x + x^2 + ...)$

$y = x\left[\frac{1}{1-x}\right] \quad \left[\because \quad S_\infty = \frac{a}{1-r}\right]$

$y = \frac{x}{1-x}$

$y - yx = x$

$x + xy = y \quad \Rightarrow x(1+y) = y$

$x = \frac{y}{1+y}$

27. $0.1\overline{42}$ ஐ விகிதமுறு எண்ணாக எழுதுக. (பெருக்குத் தொடர் வரிசையைப் பயன்படுத்தி)

தீர்வு :

$0.1\overline{42} = 0.1424242...$

$= 0.1 + 0.042 + 0.00042 + 0.0000042 + ...$

$= 0.1 + \frac{42}{10^3} + \frac{42}{10^5} + \frac{42}{10^7} + ...$

$= \frac{1}{10} + \left[\frac{\frac{42}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}\right] = \frac{1}{10} + \frac{42}{990}$

$\therefore 0.1\overline{42} = \frac{141}{990}$

28. கூடுதல் காண்க: $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 80.$

தீர்வு :

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore 1 + 2 + 3 + ... + 80 = \frac{80 \times 81}{2} = 3240$

29. கூடுதல் காண்க: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 70^3.$

தீர்வு :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$= \left[\frac{70 \times 71}{2}\right]^2$

$= (35 \times 71)^2 = (2485)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 70^3 = 61,75,225$

30. கூடுதல் காண்க: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 23^2$

தீர்வு :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 23^2 = \frac{23 \times 24 \times 47}{6}$

$= 4324$

31. 7 மீ , 3 மீ 85 செ.மீ மற்றும் 12 மீ 95 செ.மீ நீளங்களை மீதியில்லாமல் அளக்கப் பயன்படும் மீப்பெரு நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான நீளம் =

(7 மீ, 3 மீ 85 செ.மீ, 12 மீ 95 செ.மீ)

= 700 செ.மீ, 385 செ.மீ, 1295 செ.மீ

5	700
7	140
2	20
2	10
5	5
	1

5	385
7	77
	11

5	1295
7	259
	37

$700 = 2^2 \times 5^2 \times 7^1$

$385 = 5^1 \times 7^1 \times 11^1$

$1295 = 5^1 \times 7^1 \times 37^1$

மீ.பொ.வ $= 5^1 \times 7^1 = 35$

∴ தேவையான நீளம் 35 செ.மீ.

32. 43, 91 மற்றும் 183 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது ஒரே மீதியைத் தரும் மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான எண் = (91 – 43), (183 – 91)
(183 – 43) ன் மீ.பொ.வ
= 48, 92, 140 இன் மீ.பொ.வ

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	92
2	46
	23

7	140
2	20
2	10
	5

$48 = 2^4 \times 3^1$

$92 = 2^2 \times 23^1$

$140 = 2^2 \times 5^1 \times 7^1$

∴ மீ.பொ.வ $= 2^2 = 4$

∴ தேவையான எண் = 4

33. ஓர் எண்ணை இரு மடங்காக மாற்றினால் அது 12, 18, 21 மற்றும் 30 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். அவ்வாறு அமையும் மிகச் சிறிய எண் எது?

தீர்வு :

2	12, 18, 21, 30
3	6, 9, 21, 15
	2, 3, 7, 5

12, 18, 21, 30 ன் மீ.பொ.ம $= 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$
$= 4 \times 9 \times 35$
$= 1260$

தேவையான எண் $= 1260 \div 2$
$= 630$

34. தேர்வுகள் அனைத்தும் திங்கட் கிழமை முடிவடைகின்றன. அன்றிலிருந்து 29 நாட்களுக்குப் பின் தேர்வு முடிவுகள் வெளியிடப்படும் எனில், எந்தக் கிழமை தேர்வு முடிவுகள் வெளிவரும்?

தீர்வு :

திங்கட் கிழமை 1 ஐக் குறிக்கும்.

திங்கட் கிழமைக்குப் பின் 29 நாட்கள் கழிந்தால்

$\equiv 1 + 29 \pmod 7$

$\equiv 30 \pmod 7$

$\equiv 2 \pmod 7$

2 என்பது செவ்வாய்க் கிழமையைக் குறிக்கும்.

தேர்வு முடிவுகள் செவ்வாய்க் கிழமை வெளிவரும்.

35. $\{a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 1, n > 1$ எனில்$\}$ இந்த தொடரில் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_1 = 3.$

$a_n = 3a_{n-1}+1, n > 1$

$n = 2$ எனில்,

$a_2 = 3a_{2-1}+ 1 = 3a_1 + 1$
$= 3 (3) + 1 = 9 + 1 = 10$

$n = 3$ எனில்,

$a_3 = 3a_{3-1} + 1 = 3a_2 + 1$
$= 3 (10) + 1 = 30 + 1 = 31$

∴ முதல் மூன்று உறுப்புகள் 3, 10, 31

36. $a_n = (-1)^n n$ எனில் a_3, a_5 மற்றும் a_8 காண்க.

தீர்வு :

$a_n = (-1)^n n$

$(-1)^{\text{ஒற்றை எண்}}$ = குறை எண்

$(-1)^{\text{இரட்டை எண்}}$ = மிகை எண்

$a_3 = (-1)^3 3 = -3$

$a_5 = (-1)^5 5 = -5$

$a_8 = (-1)^8 8 = 8$

$a_3 = -3; a_5 = -5; a_8 = 8$

37. $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ எனில், a_1, a_2, a_3 காண்க.

தீர்வு :

$a_n = (n - 1) (2 - n) (3 + n)$

$n = 1$ எனில், $a_1 = (1 - 1) (2 - 1) (3 + 1)$

$a_1 = 0 \times 1 \times 4 = 0$

$n = 2$ எனில், $a_2 = (2 - 1) (2 - 2) (3 + 2)$

$a_2 = 1 \times (0) \times 5 = 0$

$n = 3$ எனில், $a_3 = (3 - 1) (2 - 3) (3 + 3)$

$= 2 \times (-1) \times 6 = -2 \times 6$

$a_3 = -12$

$a_1 = 0; a_2 = 0; a_3 = -12$

38. n இன் எந்த மதிப்புக்கு 69, 68, 67,... மற்றும் 1, 7, 13, 19 ...என்ற இரு கூட்டுத் தொடர்களின் n ஆவது உறுப்பு ஒரே எண்ணாக அமையும்?

தீர்வு :

69, 68, 67,... என்ற கூட்டுத் தொடரில்

$a = 69;\ d = 68 - 69 = -1$

$t_n = a + (n-1)\,d$

$t_n = 69 + (n-1)(-1)$ ...(1)

1, 7, 13, 19,... என்ற கூட்டுத் தொடரில்

$a = 1;\ d = 7 - 1 = 6$

$T_n = 1 + (n-1)\,6$ ...(2)

இரு கூட்டுத் தொடரும் ஒரே உறுப்பைப் பெற்றிருந்தால் $t_n = T_n$

$69 + (n-1)(-1) = 1 + (n-1)\,6$

$69 - n + 1 = 1 + 6n - 6$

$69 + 1 - 1 + 6 = 6n + n$

$75 = 7n$

$n = \frac{75}{7}$, இது ஒரு இயல் எண் அல்ல

∴ இரு கூட்டுத் தொடர்களும் பொதுவான உறுப்பைப் பெற்று இருக்காது.

39. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 8 ஆவது உறுப்பு 31. 15 வது உறுப்பு 11 ஆவது உறுப்பை விட 16 அதிகம் எனில், அந்த கூட்டுத் தொடரைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு = a , பொது வேறுபாடு = d என்க.

$a_8 = 31$ மற்றும் $a_{15} = 16 + a_{11}$

$a + (n-1)\,d = t_n$

$a + 7d = 31$ மற்றும்

$a + 14\,d = 16 + (a + 10d)$

$a + 14\,d = 16 + a + 10d$

$a - a + 14d - 10d = 16$

$4d = 16$

$d = \frac{16}{4} = 4$

$a + 7d = 31$

$a + 7(4) = 31$

$a + 28 = 31$

$a = 31 - 28 = 3.$

∴ கூட்டுத்தொடர் a, a + d, a + 2d, ...

⇒ 3, 7, 11, 15, 19,...

40. 5, 15, 25,... என்ற கூட்டுத் தொடரின் எந்த உறுப்பு 31 வது உறுப்பை விட 130 அதிகமான மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்?

தீர்வு :

$a = 5;\ d = 10$

$a_{31} = a + 30d = 5 + 30 \times 10 = 305$

n வது உறுப்பு = 31 வது உறுப்பு + 130

$a_n = 130 + a_{31}$

$a + (n-1)\,d = 130 + 305$

$5 + 10(n-1) = 435$

$10(n-1) = 430$

$n - 1 = 43$

$n = 44$

∴ 44 வது உறுப்பு தேவையான உறுப்பாகும்.

41. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 17, கடைசி உறுப்பு 350, பொது வேறுபாடு 9 எனில் அத்தொடரில் எத்தனை உறுப்புகள் இருக்கும்? அவற்றின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு $a = 17$

கடைசி உறுப்பு $l = 350 = t_n$

பொது வேறுபாடு $d = 9$

$t_n = a + (n-1)d$

$350 = 17 + (n-1)\,9$

$\frac{350 - 17}{9} = n - 1$

$n = \frac{333}{9} + 1$

$= 37 + 1 = 38$

∴ கூட்டுத் தொடரில் 38 உறுப்புகள் உள்ளன.

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{38} = \frac{38}{2}(17 + 350)$

$= 19 \times 367$

∴ கூடுதல் = 6973

42. 7 ஆல் வகுபடும் எல்லா மூன்று இலக்க எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

7 ஆல் வகுபடும் மூன்றிலக்க எண்களாவன 105, 112, 119, ..., 994.

இது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாகும்.

$a = 105,\ d = 7$

$t_n = 994 = l$

$t_n = a + (n-1)d$

$$994 = 105 + (n-1)\,7$$

$$n - 1 = \frac{994-105}{7} = \frac{889}{7} = 127$$

$$n = 127 + 1 = 128$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$= \frac{128}{2}(105+994)$$

$$= 64\,(1099)$$

∴ தேவையான கூடுதல் = 70336

43. x, (2x + 2), (3x + 3),.... என்பன பெருக்குத் தொடரில் அமையும் எனில் அந்த தொடரின் அடுத்த உறுப்பு என்ன?

தீர்வு :

x, 2x + 2, 3x + 3,.... என்பன பெருக்குத் தொடரில் அமைந்தால்

$$\frac{2x+2}{x} = \frac{3x+3}{2x+2} = r \quad (x \neq -1)$$

$$r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{2x+2}{x} = \frac{3}{2}$$

$$4x + 4 = 3x$$

$$x = -4$$

∴ அடுத்த உறுப்பு = $r(3x+3)$

$$= \frac{3}{2}(-12+3)$$

$$= \frac{-27}{2} = -13.5$$

44. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் 5, 8 மற்றும் 11 ஆவது உறுப்புகள் முறையே p, q மற்றும் s எனில் $q^2 = ps$ என நிரூபி.

தீர்வு :

பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு = 'a'

பொது விகிதம் = r என்க.

இங்கு $a_5 = p \Rightarrow ar^4 = p$ ...(1)

$a_8 = q \Rightarrow ar^7 = q$ ...(2)

$a_{11} = s \Rightarrow ar^{10} = s$ ...(3)

(2) ஐ வர்க்கப்படுத்த

$q^2 = (ar^7)^2$

$q^2 = a^2r^{14}$

$q^2 = (ar^4)(ar^{10})$

$q^2 = ps$ $[\because p = ar^4$ மற்றும் $s = ar^{10}]$

45. $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \ldots$ என்ற தொடரில் முடிவிலி வரை கூடுதல் காண்க

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொடரை

$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \ldots.\right) + \left(\frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^4} + \frac{2}{7^6} + \ldots.\right)$ என

எழுதலாம்.

$$= \left(\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}\right) + \left(\frac{\frac{2}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}\right) \qquad \left[\text{கூடுதல்} = \frac{a}{1-r}\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{48}{49}} + \frac{\frac{2}{49}}{\frac{48}{49}}$$

$$= \frac{7}{48} + \frac{2}{48} = \frac{9}{48}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \ldots. = \frac{9}{48}$$

46. $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முடிவிலி வரை கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தொடரை

$\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5^3} + \frac{2}{5^5} + \ldots\right) + \left(\frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^6} + \ldots\right)$ என

எழுதலாம்.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$\text{கூடுதல்} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{\frac{3}{5^2}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} + \frac{\frac{3}{25}}{1-\frac{1}{25}}$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$$

$$\therefore \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \ldots = \frac{13}{24}$$

47. கூடுதல் காண்க: $16^2 + 17^2 + 18^2 + \ldots + 30^2$

தீர்வு :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$16^2 + 17^2 + 18^2 + \ldots + 30^2$$
$$= (1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 15^2)$$
$$= \frac{30 \times 31 \times 61}{6} - \frac{15 \times 16 \times 31}{6}$$
$$= 9455 - 1240 = 8215$$

48. கூடுதல் காண்க: $8^3 + 9^3 + 10^3 + \ldots + 23^3$.

தீர்வு :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$8^3 + 9^3 + 10^3 + \ldots + 23^3$$
$$= (1^3 + 2^3 + \ldots + 23^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 7^3)$$
$$= \left[\frac{23 \times 24}{2}\right]^2 - \left[\frac{7 \times 8}{2}\right]^2$$
$$= (23 \times 12)^2 - (7 \times 4)^2$$
$$= (276)^2 - (28)^2$$
$$= 76176 - 784$$
$$= 75,392$$

49. 1 + 3 + 5 + ... 20 உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $= n^2$

முதல் 20 ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $= 20^2$
$= 400$

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் நான்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் கூடுதல் 20. அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 120. அந்த எண்களைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான நான்கு உறுப்புகள் $(a - 3d), (a - d), (a + d), (a + 3d)$ என்க

கூடுதல் $= 20$

$$(a - 3d) + (a - d) + (a + d) + (a + 3d) = 20$$
$$a - 3d + a - d + a + d + a + 3d = 20$$
$$4a = 20$$
$$a = \frac{20}{4} = 5$$

அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் $= 120$

$$(a - 3d)^2 + (a - d)^2 + (a + d)^2 + (a + 3d)^2 = 120$$
$$a^2 + 9d^2 - 6ad + a^2 + d^2 - 2ad + a^2 + d^2 + 2ad + a^2 + 9d^2 + 6ad = 120$$
$$4a^2 + 20d^2 = 120$$
$$a^2 + 5d^2 = 30$$
$$25 + 5d^2 = 30$$
$$5d^2 = 5$$
$$d = \pm 1$$

$d = 1$ எனில், எண்கள் 2, 4, 6, 8.

$d = -1$ எனில், எண்கள் 8, 6, 4, 2.

∴ தேவையான நான்கு எண்கள் 2, 4, 6, 8.

2. $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, \ldots$ என்ற தொடரின் எத்தனையாவது உறுப்பு முதல் குறை எண்ணாக அமையும்?

தீர்வு :

இங்கு $t_2 - t_1 = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$

$t_3 - t_2 = 18\frac{1}{2} - 19\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

∴ இத்தொடர் ஒரு கூட்டுத் தொடராகும். $a = 20$; $d = -\frac{3}{4}$

இத்தொடரின் n ஆவது உறுப்பு முதல் குறை எண் என்க.

i.e., $t_n < 0$

$$a + (n - 1)d < 0$$
$$20 + (n - 1) \times \left(\frac{-3}{4}\right) < 0$$
$$(n - 1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20$$
$$(n - 1)\left(\frac{3}{4}\right) > 20$$
$$n - 1 > \frac{20}{\left(\frac{3}{4}\right)}$$
$$n - 1 > 20 \times \frac{4}{3}$$

$$n > \frac{80}{3} + 1$$

$$n > \frac{80+3}{3} = \frac{83}{3}$$

$$n > 27\frac{2}{3}$$

$n \geq 28$ [$\because$ n ஒரு இயல் எண்]

$\therefore n \geq 28$, எனில் t_n குறை எண் ஆகும்.

$\therefore 28^{\text{வது}}$ உறுப்பு முதல் குறை எண் உறுப்பாகும்.

3. 9, 17, 25,... என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளின் கூடுதல் 636 ஆக இருக்க முடியும்?

தீர்வு :

இங்கு $a = 9, d = 17 - 9 = 8$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$636 = \frac{n}{2}\{2(9) + (n-1)(8)\}$$

$$= \frac{n}{2} \times 2\{9 + (n-1)4\}$$

$$= n\{9 + 4n - 4) = n\{4n + 5\}$$

$$636 = 4n^2 + 5n$$

$$4n^2 + 5n - 636 = 0$$

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4)(-636)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 10176}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{10201}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm 101}{8}$$

$$= \frac{-5 + 101}{8}, \frac{-5 - 101}{8}$$

$$= \frac{96}{8}, \frac{-106}{8} = 12 \text{ அல்லது } \frac{-53}{4}$$

$n = -\frac{53}{4}$ ஆக இருக்க இயலாது.

$\therefore n = 12$

$\therefore$ 12 உறுப்புகளின் கூடுதல் 636 ஆகும்.

4. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் நான்காவது, ஏழாவது மற்றும் கடைசி உறுப்புகள் முறையே 10, 8 மற்றும் 2560 எனில், முதல் உறுப்பையும், அப்பெருக்குத் தொடரிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு = a, பொது வேறுபாடு = r என்க

$a_4 = 10, a_7 = 80, a_n = 2560$

$$ar^3 = 10$$

$$ar^6 = 80$$

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{80}{10}$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

$$ar^3 = 10$$

$$\therefore a(2)^3 = 10$$

$$a(8) = 10$$

$$a = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$ar^{n-1} = 2560$$

$$\frac{5}{4}(2)^{n-1} = 2560 \Rightarrow 2^{n-1} = 2560 \times \frac{4}{5}$$

$$= 512 \times 4$$

$$= 2048$$

$$2^{n-1} = 2^{11}$$

$\therefore n - 1 = 11 \Rightarrow n = 12$

5. a, b, c என்பன கூட்டுத் தொடரில் அமையும் மற்றும் a^2, b^2, c^2 என்பன பெருக்குத் தொடரில் அமையும். $a > b > c$ மற்றும் $a + b + c = 3/2$ எனில் a இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$b = a + d, c = a + 2d$ என்க ...(1)

a^2, b^2, c^2 என்பன பெருக்குத் தொடரில் அமையும் எனில்

$$(b^2)^2 = a^2c^2$$

$$\pm b^2 = ac \quad ...(2)$$

$\therefore$ a, b, c என்பன கூட்டுத் தொடரில் அமையும் எனில்

$$2b = a + c$$

$$a + b + c = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

(1) லிருந்து $a = b - d$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} - d$$

$$c = a + 2d$$

$= \left(\frac{1}{2} - d\right) + 2d = \frac{1}{2} + d$

(2) லிருந்து $\pm\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - d\right)\left(\frac{1}{2} + d\right)$

$\Rightarrow \pm\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - d^2$

$\therefore d = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore a = \frac{1}{2} - d = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ $[\because a > b > c]$

6. x மற்றும் y என்பன ஒற்றை மிகை முழுக்கள் எனில் $x^2 + y^2$ ஆனது 4 ஆல் வகுபடாத இரட்டை எண் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

m மற்றும் n என்பன இரு முழுக்கள் எனில்

$x = 2m + 1$ மற்றும் $y = 2n + 1$

[ஏனெனில் x , y ஒற்றை எண்கள்]

$x^2 + y^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$

$= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1$

$= 4(m^2 + n^2) + 4(m + n) + (1 + 1)$

$= 4(m^2 + n^2) + 4(m + n) + 2$

$= 4q + 2$, இங்கு $q = (m^2 + n^2) + (m + n)$

$= 4q + 2$

$x^2 + y^2 = 2[2q + 1]$ என்பது ஒரு இரட்டை எண்

$4q + 2$ என்பது 4 ஆல் வகுபடாத ஒரு இரட்டை எண்.

ஏனெனில் 4 ஆல் வகுக்க மீதி 2 கிடைக்கும்.

$x^2 + y^2$ ஆனது 4 ஆல் வகுபடாத இரட்டை எண் ஆகும்.

7. 210 மற்றும் 55 இன் மீ.பொ.வ $210 \times 5 + 55y$ என்ற வடிவில் அமையும் எனில் y –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி மீ.பொ.வ காண

$210 = 55 \times 3 + 45$

$55 = 45 \times 1 + 10$

$45 = 10 \times 4 + 5$

$10 = 5 \times 2 + 0$

மீதி $= 0$

$\therefore$ 210 , 55 இன் மீ.பொ.வ 5

$5 = 210 \times 5 + 55y$

$5 - 210 \times 5 = 55y$

$55y = 5 - 1050$

$= -1045$

$y = \frac{-1045}{55}$

$y = -19$

8. 56 மற்றும் 72 இன் மீ.பொ.வ d எனில் $d = 56x + 72y$ என்றவாறு அமைந்த x மற்றும் y –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி 56, 72 -ன் மீ.பொ.வ காண

$72 = 56 \times 1 + 16$ ... (1)

$56 = 16 \times 3 + 8$ ... (2)

$16 = 8 \times 2 + 0$

மீதி $= 0$

$\therefore$ 56, 72 இன் மீ.பொ.வ $= 8$

(2) லிருந்து

$8 = 56 - 16 \times 3$

$8 = 56 - (72 - 56 \times 1) \times 3$

[$\because$ (1) லிருந்து $16 = 72 - 56 \times 1$]

$= 56 - (3 \times 72) + 3 \times 56$

$= 56(1 + 3) - (3 \times 72)$

$= 56(4) + 72(-3)$

$d = 56x + 72y$ உடன் ஒப்பிட

$x = 4$ மற்றும் $y = -3$

9. ஒரு நேர்முகத் தேர்வில் கணிதம், இயற்பியல். மற்றும் வேதியியலில் கலந்து கொண்டவர்கள் முறையே 60, 84 மற்றும் 108 பேர். ஒவ்வொரு அறையிலும் ஒரே எண்ணிக்கையில் ஒரே பாடத்தில் கலந்து கொள்பவர்களை அமர வைக்க வேண்டுமெனில் எத்தனை அறைகள் தேவைப்படும்?

தீர்வு :

ஒவ்வொரு அறையிலும் உள்ள நபர்கள் = 60, 84 , 108 இன் மீ.பொ.வ.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறைப் படி 60, 84 இன் மீ.பொ.வ காண,

$84 = 60 \times 1 + 24$

$60 = 24 \times 2 + 12$

$24 = 12 \times 2 + 0$

மீதி $= 0$

$\therefore$ 60 , 84 இன் மீ.பொ.வ 12.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை பயன்படுத்தி 108, 12 இன் மீ.பொ.வ காண

$108 = 12 \times 9 + 0$

மீதி $= 0$

$\therefore$ 12 ,108 இன் மீ.பொ.வ $= 12$

∴ மீ.பொ.வ (60, 84, 108) = 12.

∴ ஒவ்வொரு அறையிலும் 12 பேரை அமர்த்தலாம்.

மொத்த நபர்கள் = 60 + 84 + 108

= 252

தேவையான அறைகள் = $\frac{252}{12}$ = 21

10. 1356, 1868 மற்றும் 2764 ஐ வகுக்கும்போது ஒவ்வொன்றிலும் 12 ஐ மீதியாகத் தரும் மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான எண் = (1356 – 12), (1868 – 12), (2764 – 12) ன் மீ.பொ.வ

= 1344, 1856, 2752 ன் மீ.பொ.வ

2	2752
2	1376
2	688
2	344
2	172
2	86
	43

2	1344
2	672
3	336
7	112
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

2	1856
2	928
2	464
2	232
2	116
2	58
	29

$2752 = 2^6 \times 43^1$

$1344 = 2^6 \times 3^1 \times 7^1$

$1856 = 2^6 \times 29^1$

மீ.பொ.வ = 2^6 = 64

∴ தேவையான எண் = 64

11. 16, 24, 36 மற்றும் 54 ஆகிய எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் மிகச்சிறிய ஐந்து இலக்க எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

மிகச்சிறிய 5 இலக்க எண் 10000.

தேவையான எண் 16, 24, 36 ,54 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

2	16, 24, 36, 54
2	8, 12, 18, 27
3	4, 6, 9, 27
3	4, 2, 3, 9
2	4, 2, 1, 3
	2, 1, 1, 3

மீ.பொ.ம = $2^4 \times 3^3$

= 16×27 = 432

16, 24, 36, 54 இன் மீ.பொ.ம = 432

∴ தேவையான எண் 432 ஆல் வகுபடும்.

```
      231
  ----------
432 | 10000
      864
  ----------
      1360
      1296
  ----------
        64
```

10000 ஐ 432 ஆல் வகுக்க மீதி = 64

தேவையான எண் = 10000 + (432 – 64)

= 10368

12. ஆறு மணிகள் ஒரே நேரத்தில் அடிக்கத் தொடங்கி ஒவ்வொன்றும் 2, 4, 6, 8, 10 மற்றும் 12 நிமிட இடைவெளியில் தொடர்ந்து அடிக்கும் எனில் 30 நிமிடங்களில் ஆறு மணிகளும் சேர்ந்து எத்தனை முறை ஒலிக்கும்?

தீர்வு :

2	2, 4, 6, 8, 10, 12
3	1, 2, 3, 4, 5, 6
2	1, 2, 1, 4, 5, 2
	1, 1, 1, 2, 5, 1

மீ.பொ.ம = 12×10 = 120

2,4,6,8,10, 12 இன் மீ.பொ.ம = 120

∴ 6 மணிகளும் 120 வினாடிகளுக்குப் பின் சேர்ந்து ஒலிக்கும். அதாவது 2 நிமிடங்களுக்குப் பின் சேர்ந்து ஒலிக்கும்.

30 நிமிடங்களில் மணிகள் $\left(\frac{30}{2}+1\right)$ = 16 முறை சேர்ந்து ஒலிக்கும்.

13. தீர்க்க $9x \equiv 5$ (மட்டு 13)

தீர்வு :

$9x \equiv 5$ (மட்டு 13)

$9x - 5 = 13k$ (k ஏதேனும் ஒரு முழு)

$x = \frac{13k+5}{9}$ (k ஏதேனும் ஒரு முழு)

1, 10, 19,..... மதிப்புகளுக்கு 13k + 5 ஆனது 13 ஆல் வகுபடும்.

$x = \frac{13(1)+5}{9} = 2$

$x = \frac{13(10)+5}{9} = 15$

$$x = \frac{13(19)+5}{9} = 28$$

$$x = \frac{13(28)+5}{9} = 41$$

∴ x ன் மதிப்புகள் 2, 15, 28, 41,...

14. $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$ என்ற தொடரின் அடுத்த 5 உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 2$ for $n \geq 2$

$n = 2$ எனில் $a_2 = a_{2-1} + 2$

$= a_1 + 2 = 1 + 2$

$a_2 = 3$

$n = 3$ எனில் $a_3 = a_{3-1} + 2$

$= a_2 + 2 = 3 + 2$

$a_3 = 5$

$n = 4$ எனில் $a_4 = a_{4-1} + 2$

$= a_3 + 2 = 5 + 2$

$a_4 = 7$

$n = 5$ எனில் $a_5 = a_{5-1} + 2$

$= a_4 + 2 = 7 + 2$

$a_5 = 9$

$n = 6$ எனில் $a_6 = a_{6-1} + 2$

$= a_5 + 2 = 9 + 2$

$a_6 = 11$

அடுத்த 5 உறுப்புகள் $a_2 = 3; a_3 = 5; a_4 = 7;$ $a_5 = 9$ மற்றும் $a_6 = 11$.

15. $a_1 = 4$; $a_n = 4a_{n-1} + 3$, $n > 1$ என்ற தொடரின் அடுத்த ஐந்து உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_1 = 4$

$a_n = 4a_{n-1} + 3, n > 1$

$n = 2$ எனில், $a_2 = 4a_{2-1} + 3 = 4a_1 + 3$

$= 4(4) + 3 = 16 + 3$

$a_2 = 19$

$n = 3$ எனில், $a_3 = 4a_{3-1} + 3 = 4a_2 + 3$

$= 4(19) + 3 = 76 + 3$

$a_3 = 79$

$n = 4$ எனில், $a_4 = 4a_{4-1} + 3 = 4a_3 + 3$

$= 4(79) + 3 = 316 + 3$

$a_4 = 319$

$n = 5$ எனில், $a_5 = 4a_{5-1} + 3 = 4a_4 + 3$

$= 4(319) + 3 = 1276 + 3$

$a_5 = 1279$

$n = 6$ எனில், $a_6 = 4a_{6-1} + 3 = 4a_5 + 3$

$= 4(1279) + 3 = 5116 + 3$

$a_6 = 5119$

∴ அடுத்த 5 உறுப்புகள்

$a_2 = 19, a_3 = 79, a_4 = 319, a_5 = 1279, a_6 = 5119.$

16. $a_n = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$ என ஒரு தொடர் வரையறுக்கப்படுகிறது. அதன் முதல் மூன்று உறுப்புகள் பூச்சியம் மற்றும் ஏனைய அனைத்து உறுப்புகளும் மிகை எண்கள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$a_n = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

$n = 1$ எனில், $a_1 = 1^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6$

$= 1 - 6 + 11 - 6 = 12 - 12$

$a_1 = 0$

$n = 2$ எனில், $a_2 = 2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6$

$= 8 - (6 \times 4) + 22 - 6$

$= 8 - 24 + 22 - 6 = 30 - 30$

$a_2 = 0$

$n = 3$ எனில், $a_3 = 3^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6$

$= 27 - 54 + 33 - 6 = 60 - 60$

$a_3 = 0$

எனவே $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

$n^3 - 6n^2 + 11n - 6$ என்ற தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் பூச்சியம் ஆகும்.

∴ $(n-1)$, $(n-2)$ மற்றும் $(n-3)$ ஆகியவை a_n இன் காரணிகள் ஆகும்.

∴ $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)$; $a_n > 0$; $n > 3$.

∴ ஏனைய உறுப்புகள் மிகை எண்கள் ஆகும்.

17. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 10 வது உறுப்பு 52 மற்றும் 16 வது உறுப்பு 82 எனில், அதன் 32 வது உறுப்பையும், பொது உறுப்பையும் காண்க.

தீர்வு :

$t_n = a + (n-1)d$

கூட்டுத் தொடரில் 10 வது உறுப்பு = 52.

$t_{10} = a + (10-1)d = 52$

$a + 9d = 52$ ...(1)

16 வது உறுப்பு = 82

$a + 15d = 82$ ...(2)

$a + 9d = 52$ ...(1)

(2) – (1), $6d = 30$

$d = 5$

$a + 9d = 52$ [(1) இலிருந்து]

$a + 9(5) = 52$

$a + 45 = 52$

$a = 52 - 45 = 7$

$\therefore \quad t_{32} = a + 31d$

$= 7 + 31(5) = 7 + 155$

$t_{32} = 162$

பொது உறுப்பு $a_n = 5n + 2$

18. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் 5 மற்றும் 9 ஆவது உறுப்புகளின் கூடுதல் 72. மேலும் 7 மற்றும் 12 ஆவது உறுப்புகளின் கூடுதல் 97 எனில், அந்தக் கூட்டுத் தொடரைக் காண்க.

தீர்வு :

$a_5 + a_9 = 72$ மற்றும் $a_7 + a_{12} = 97$

$a + 4d + a + 8d = 72$ மற்றும் $a + 6d + a + 11d = 97$

$2a + 12d = 72$ மற்றும் $2a + 17d = 97$

$2a + 12d = 72 \quad ...(1)$

$2a + 17d = 97 \quad ...(2)$

$(2) - (1) \Rightarrow \quad 5d = 25$

$d = 5$

$2a + 12d = 72$

$2a + 12(5) = 72$

$2a + 60 = 72$

$2a = 72 - 60 = 12$

$a = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore$ தேவையான கூட்டுத் தொடர்

$a, a + d, a + 2d. a + 3d ...$

$6, 6 + 5, 6 + 2(5), 6 + 3(5) ...$

$6, 11, 16, 21,...$

19. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = 3n^2 - 4n$ எனில், n வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$S_n = 3n^2 - 4n$

$S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 4(n-1)$

$= 3(n^2 - 2n + 1) - 4n + 4$

$= 3n^2 - 6n + 3 - 4n + 4$

$= 3n^2 - 10n + 7$

$\therefore n^{\text{வது}}$ உறுப்பு $= S_n - S_{n-1}$

$= [3n^2 - 4n] - [3n^2 - 10n + 7]$

$= 3n^2 - 4n - 3n^2 + 10n - 7$

$\therefore n^{\text{வது}}$ உறுப்பு $= 6n - 7$

20. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் முதல் ஆறு உறுப்புகளின் கூடுதல் 42. 10 வது உறுப்பு மற்றும் 30 வது உறுப்புகளின் விகிதம் 1 : 3 எனில் முதல் உறுப்பையும் 13 வது உறுப்பையும் காண்க.

தீர்வு :

$S_6 = \frac{6}{2}\{2a + (6-1)d\} = 42$

$\therefore 6a + 15d = 42 \quad ...(1)$

$t_{10} : t_{30} = 1 : 3$

$\frac{a + 9d}{a + 29d} = \frac{1}{3}$

$3(a + 9d) = a + 29d$

$3a + 27d = a + 29d$

$3a - a = 29d - 27d$

$2a = 2d$

$a = d$

(1) லிருந்து, $6a + 15d = 42$

$6d + 15d = 42 \quad [\because a = d]$

$21d = 42$

$d = \frac{42}{21} = 2$

$a = d = 2$

$t_{13} = a + 12d$

$= 2 + 12(2)$

$= 2 + 24 = 26$

13 வது உறுப்பு $= 26$

21. 3, 15, 27, 39,... என்ற கூட்டுத் தொடரின் எந்த உறுப்பு 21 வது உறுப்பைவிட 120 அதிகமாகக் கொண்டிருக்கும்?

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு $= a$, பொது வேறுபாடு $= d$

$a = 3; d = 15 - 3 = 12$

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{21} = 3 + (21 - 1) \times 12$

$= 3 + 20 \times 12 = 3 + 240$

$t_{21} = 243$

தேவையான உறுப்பு n ஆவது உறுப்பு எனில்,

n வது உறுப்பு $= 120 +$ 21வது உறுப்பு

$= 120 + 243 = 363$

$t_n = a + (n-1)d$

$363 = 3 + (n-1) \times 12$

$363 - 3 = (n-1) \times 12$

$n - 1 = \frac{360}{12} = 30$

$n = 30 + 1 \quad n = 31$

∴ கூட்டுத் தொடரின் 31வது உறுப்பு தேவையான உறுப்பு ஆகும்.

22. மூன்றாவது உறுப்பு 12 ஆக அமைந்த மூன்று எண்கள் ஒரு குறைந்து செல்லும் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமையும். கடைசி உறுப்பு 12 –க்குப் பதிலாக 9 ஆக அமைந்தால் அம்மூன்று உறுப்புகளும் ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கும் எனில், அந்த பெருக்குத் தொடரின் பொது விகிதம் காண்க.

தீர்வு :

a, b, 12 என்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடரை அமைக்கும் எனில்,

$$b^2 = 12a \quad \ldots(1)$$

a, b, 9 என்ற எண்கள் கூட்டுத் தொடரை அமைக்கும் எனில்,

$$2b = a + 9$$

$$a = 2b - 9 \quad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$b^2 = 12(2b - 9)$$

$$b^2 - 24b + 108 = 0$$

$$(b - 18)(b - 6) = 0$$

$$b = 6, 18$$

(2) $\Rightarrow$ $a = 2b - 9 = 2(6) - 9 = 3$

மற்றும் $a = 2b - 9 = 2(18) - 9 = 27$

∴ பொது விகிதம் $= \frac{b}{a} = \frac{6}{3}$ மற்றும் $\frac{18}{27}$

$= 2$ மற்றும் $\frac{2}{3}$

இது குறைந்து செல்லும் பெருக்குத் தொடர்.

எனவே பொது விகிதம் $r = \frac{2}{3}$

23. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மிகை எண்களாகும். மேலும் அதன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பின்வரும் இரு உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில், அப்பெருக்குத் தொடரின் பொதுவிகிதம் என்ன?

தீர்வு :

a, ar, ar^2,.... என்பது தேவையான பெருக்குத் தொடர் என்க.

$$a = ar + ar^2 \Rightarrow r^2 + r - 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \quad \left[\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

$$r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad [\because \text{ஒவ்வொரு உறுப்பும் மிகை எண்கள்}]$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

24. $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$ $(x \neq 0)$ எனில், a, b, c, d என்பன பெருக்குத் தொடரை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

கணக்கின்படி $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$

$$\frac{\frac{a}{b} + x}{\frac{a}{b} - x} = \frac{\frac{b}{c} + x}{\frac{b}{c} - x} = \frac{\frac{c}{d} + x}{\frac{c}{d} - x}$$

முதல் இரு உறுப்புகளிலிருந்து

$$\frac{2\frac{a}{b}}{2x} = \frac{2\frac{b}{c}}{2x}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \ldots(1)$$

கடைசி இரு உறுப்புகளிலிருந்து

$$\frac{2\frac{b}{c}}{2x} = \frac{2\frac{c}{d}}{2x} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

∴ a, b, c, d என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடரை அமைக்கும்.

25. $(\sqrt{2}+1) + 1 + (\sqrt{2}-1) + \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முடிவிலி வரை கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

$$a = \sqrt{2} + 1,$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{கூடுதல்} = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

கூடுதல் $= \frac{4+3\sqrt{2}}{2}$

26. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 4 ஆவது உறுப்பு 4 எனில் அதன் முதல் 7 உறுப்புகளின் பெருக்கற் பலன் காண்க.

தீர்வு :

பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு a, பொது விகிதம் r என்க.

$t_4 = 4 \Rightarrow ar^{4-1} = 4 \Rightarrow ar^3 = 4$

முதல் 7 உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்

$t_1 \times t_2 \times t_3 \times t_4 \times t_5 \times t_6 \times t_7$

$= (a)(ar)(ar^2)(ar^3)(ar^4)(ar^5)(ar^6)$

$= a^7 r^{21} = (ar^3)^7$

$= (4)^7 = 16384$

முதல் 7 உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் = 16384

27. 1, 22, 4444, 88888888,....என்ற தொடரில் 1025 வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தொடரிலுள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை 1, 2, 4, 8,...

இது ஒரு பெருக்குத் தொடரை அமைக்கும் அதன் 1025 ஆவது உறுப்பு = 2^n என்க.

$1 + 2 + 4 + 8 + ...+ 2^{n-1} < 1025 \leq 1 + 2 + 4 + ...+ 2^n$

$1.\frac{2^n-1}{2-1} < 1025 \leq 1.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$

$2^n - 1 < 1025 \leq 2^{n+1} - 1$

$2^n < 1026 \leq 2^{n+1}$ ...(1)

$2^{n+1} \geq 1026 > 1024$

$2^{n+1} > 2^{10}$

$n + 1 > 10$

$n > 9$

∴ 1025 ஆவது உறுப்பு 2^{10} ஆகும்.

28. கூடுதல் காண்க : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை

தீர்வு :

$(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) + \ldots$ = 2 + 6 + 12 + 20 + ...+ n உறுப்புகள் வரை

$= (1^2+1) + (2^2+2) + (3^2+3) + \ldots +$ n உறுப்புகள் வரை

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை$) + (1 + 2 + 3 + \ldots +$ n உறுப்புகள் வரை$)$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3}+1\right]$

$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+4}{3}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

29. கூடுதல் காண்க : $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots +$ n உறுப்புகள் வரை

தீர்வு :

$(3 \times 1^2) + (5 \times 2^2) + (7 \times 3^2) + \ldots.$ + n உறுப்புகள் வரை = 3 + 20 + 63 + ... + உறுப்புகள் வரை

$= (2 \times 1^3 + 1^2) + (2 \times 2^3 + 2^2) + (2 \times 3^3 + 3^2) + \ldots + (2 \times n^3 + n^2)$

$= 2(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$

$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{2[n(n+1)]^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)}{2}\left[n(n+1) + \frac{(2n+1)}{3}\right]$

$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3(n^2+n)+(2n+1)}{3}\right]$

$= \frac{n(n+1)(3n^2+3n+2n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{6}$

30. கூடுதல் காண்க : $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \ldots.$ n உறுப்புகள் வரை

தீர்வு :

$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \ldots$ n உறுப்புகள் வரை

$$= \frac{1}{4}[1^2+2.1+1]+\frac{1}{4}[2^2+2.2+1]+...+\frac{1}{4}(n^2+2n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}+\frac{n}{1}\right]$$

$$= \frac{n}{4}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)+\frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{n}{4}\left[\frac{2n^2+3n+1+6n+6+6}{6}\right]$$

$$= \frac{n}{24}[2n^2+9n+13]$$

31. கூடுதல் காண்க: 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 + 18 + 20 + ... + 100

தீர்வு :

3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 + 18 + 20 + ... + 100

= (3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + ... 99) + (5 + 10 + 15 + 20 + ... + 100) – (15 + 30 + ... 90)

= 3 (1 + 2 + 3 + ... + 33) + 5 (1 + 2 + 3 + ... + 20) – 15(1 + 2 + ... + 6)

$$= 3\left(\frac{33\times 34}{2}\right)+5\left(\frac{20\times 21}{2}\right)-15\left(\frac{6\times 7}{2}\right)$$

= (3 × 33 × 17) + (5 × 10 × 21) – (15 ×3 × 7)

= 1683 + 1050 – 315

= 2733 – 315

= 2418.

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ஒரு ஒற்றை மிகை முழுவின் வர்க்கமானது 8q + 1, இங்கு q ஒரு முழு என்ற வடிவில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

முதலில் "எல்லா மிகை ஒற்றை எண்களையும் 4q + 1 அல்லது 4q + 3 என்ற வடிவில் எழுதலாம்" என நிறுவுவோம். யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி 'a' மற்றும் 'b' $(a > b)$ என்பன இரு மிகை எண்கள் எனில் a = bq + r , $0 \le r < |b|$

இரு மிகை எண்கள் 'a" மற்றும் b = 4 எனில்

a = 4q + r இங்கு $0 \le r < |4|$

a = 4q, a = 4q + 1; a = 4q + 2; a = 4q + 3

= 2 (2q); a = 4q + 1 = 2 (2q + 1); = ஒற்றை எண்

= இரட்டை எண் = ஒற்றை எண் = இரட்டை எண்

∴ ஒவ்வொரு மிகை ஒற்றை எண்ணும் 4q + 1 அல்லது 4q + 3 என்ற வடிவில் இருக்கும்.

நிலை (1): a = 4q + 1 எனில்

$a^2 = (4q + 1)^2$

$= 16q^2 + 8q + 1$

= 8q (2q + 1) + 1

= 8 m + 1 இங்கு m = q (2q +1)

நிலை (2): a = 4q + 3 எனில்

$a^2 = (4q + 3)^2 = 16q^2 + 24q + 9$

$= 8 [2q^2 + 3q] + 8 + 1$

$= 8 [2q^2 + 3q + 1] + 1$

= 8 m + 1 இங்கு $m = 2q^2 + 3q + 1$

∴ இதிலிருந்து ஒவ்வொரு ஒற்றை மிகை எண்ணின் வர்க்கமும் 8q + 1, என்ற வடிவில் இருக்கும் என அறியலாம்.

2. $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கும் எனில், a^2, b^2, c^2 என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடரை அமைக்கும் என நிரூபி.

தீர்வு :

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ என்பன கூட்டுத் தொடரில் அமையும்.

$$\therefore t_2 - t_1 = t_3 - t_2$$

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}$$

$$\frac{(b+c)-(c+a)}{(c+a)(b+c)} = \frac{(c+a)-(a+b)}{(a+b)(c+a)}$$

$$\frac{b+c-c-a}{cb+ab+c^2+ac} = \frac{c+a-a-b}{ca+bc+a^2+ab}$$

$$\frac{b-a}{ab+cb+ac+c^2} = \frac{c-b}{ab+bc+ca+a^2}$$

(b – a) (ab + bc + ca + a^2)

= (c – b) (ab + cb + ac + c^2)

$ab^2 + b^2c + cab + a^2b - a^2b - abc - a^2c - a^3$

$= abc + c^2b + ac^2 + c^3 - ab^2 - cb^2 - abc - bc^2$

$ab^2 + b^2c - a^2c - a^3 = ac^2 + c^3 - ab^2 - cb^2$

$b^2c - a^2c + ab^2 - a^3 = c^3 - cb^2 + ac^2 - ab^2$

$c(b^2 - a^2) + a(b^2 - a^2) = c(c^2 - b^2) + a(c^2 - b^2)$

$$(b^2 - a^2)(c + a) = (c^2 - b^2)(c + a)$$
$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2$$
$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$$

$\therefore a^2, b^2, c^2$ என்பவை கூட்டுத் தொடரில் அமையும்.

3. $\frac{2m+1}{m}, \frac{2m-1}{m}, \frac{2m-3}{m}, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடரின் 6 வது உறுப்பு காண்க.

தீர்வு :

இங்கு $t_1 = \frac{2m+1}{m}$; $t_2 = \frac{2m-1}{m}$

$$d = t_2 - t_1$$
$$= \frac{2m-1}{m} - \frac{2m+1}{m}$$
$$= \frac{2m-1-2m-1}{m}$$
$$= \frac{-2}{m}$$
$$t_n = a + (n-1)d$$
$$t_n = \left[\frac{2m+1}{m}\right] + (n-1)\left[\frac{-2}{m}\right]$$
$$= \left[\frac{2m+1}{m}\right] + \left[\frac{-2n}{m}\right] - 1\left[\frac{-2}{m}\right]$$
$$= \frac{2m+1}{m} - \frac{2n}{m} + \frac{2}{m}$$
$$= \frac{2m+1-2n+2}{m}$$

n வது உறுப்பு $= \frac{2m-2n+3}{m}$

$\therefore$ 6 வது உறுப்பு $t_6 = \frac{2m-2(6)+3}{m}$

6 வது உறுப்பு $= \frac{2m-9}{m}$

4. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் p வது உறுப்பு $\frac{1}{q}$ மற்றும் q வது உறுப்பு $\frac{1}{p}$ எனில் முதல் pq உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{1}{2}(pq+1)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

கூட்டுத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$t_n = a + (n-1)d$$

p ஆவது உறுப்பு $= \frac{1}{q}$

$$a + (p-1)d = \frac{1}{q} \quad \ldots(1)$$

q ஆவது உறுப்பு $= \frac{1}{p}$ $\quad a + (q-1)d = \frac{1}{p} \quad \ldots(2)$

$(1) - (2) \Rightarrow [(p-1)-(q-1)]d = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$

$$(p-1-q+1)d = \frac{p-q}{pq}$$
$$(p-q)d = \frac{p-q}{pq}$$
$$d = \frac{p-q}{pq(p-q)}$$
$$d = \frac{1}{pq}$$

$d = \frac{1}{pq}$ என (1) இல் பிரதியிட,

$$a + (p-1)\left(\frac{1}{pq}\right) = \frac{1}{q}$$
$$a = \frac{1}{q} - \frac{p-1}{pq}$$
$$= \frac{p-p+1}{pq}$$
$$a = \frac{1}{pq}$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\therefore S_{pq} = \frac{pq}{2}\left[2\left(\frac{1}{pq}\right) + (pq-1)\left(\frac{1}{pq}\right)\right]$$
$$= \frac{pq}{2}\left[\frac{2}{pq} + \frac{pq}{pq} - \frac{1}{pq}\right]$$
$$= \frac{pq}{2}\left[\frac{1}{pq} + 1\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{pq}{pq} + pq\right] = \frac{1}{2}(1 + pq)$$

$$\therefore S_{pq} = \frac{1}{2}(pq+1)$$

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் 7 உறுப்புகளின் கூடுதல் 49 மற்றும் முதல் 17 உறுப்புகளின் கூடுதல் 289 எனில், முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு :

முதல் உறுப்பு = a; பொது வேறுபாடு = d என்க

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

$$S_7 = \frac{7}{2}[2a + 6d] = 49$$

$$\frac{7}{2} \times 2\,(a + 3d) = 49$$

$$7\,(a + 3d) = 49$$

$$a + 3d = \frac{49}{7} = 7 \qquad \ldots(1)$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}[2a + 16\,d] = 289$$

$$\Rightarrow \frac{17}{2} \times 2\,[a + 8d] = 289$$

$$17\,(a + 8d) = 289$$

$$a + 8d = \frac{289}{17} = 17 \qquad \ldots(2)$$

$$(2) - (1)\ a + 8d - a - 3d = 17 - 7$$

$$5d = 10$$

$$d = \frac{10}{5} = 2$$

(1) லிருந்து,

$$a + 3\,(2) = 7$$

$$a + 6 = 7$$

$$a = 7 - 6 = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

$$= \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)(2)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$

$$= \frac{n}{2}[2n] = n^2$$

$\therefore$ n உறுப்புகளின் கூடுதல் $= n^2$

6. கூடுதல் காண்க : 0.6 + 0.66 + 0.666 + ... n உறுப்புகள் வரை.

தீர்வு :

S_n = 0.6 + 0.66 + 0.666 + ... n உறுப்புகள் வரை

= 6 [0.1 + 0.11 + 0.111 + ...n உறுப்புகள் வரை]

$$= \frac{6}{9}\ [0.9 + 0.99 + 0.999 + .n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

(பகுதியையும் தொகுதியையும் 9 ஆல் பெருக்க)

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{9}{10} + \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} + ... \text{ n உறுப்புகள் வரை}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\begin{array}{l}\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \\ \ldots \text{ n உறுப்புகள் வரை}\end{array}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots \text{ n உறுப்புகள் வரை}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right]$$

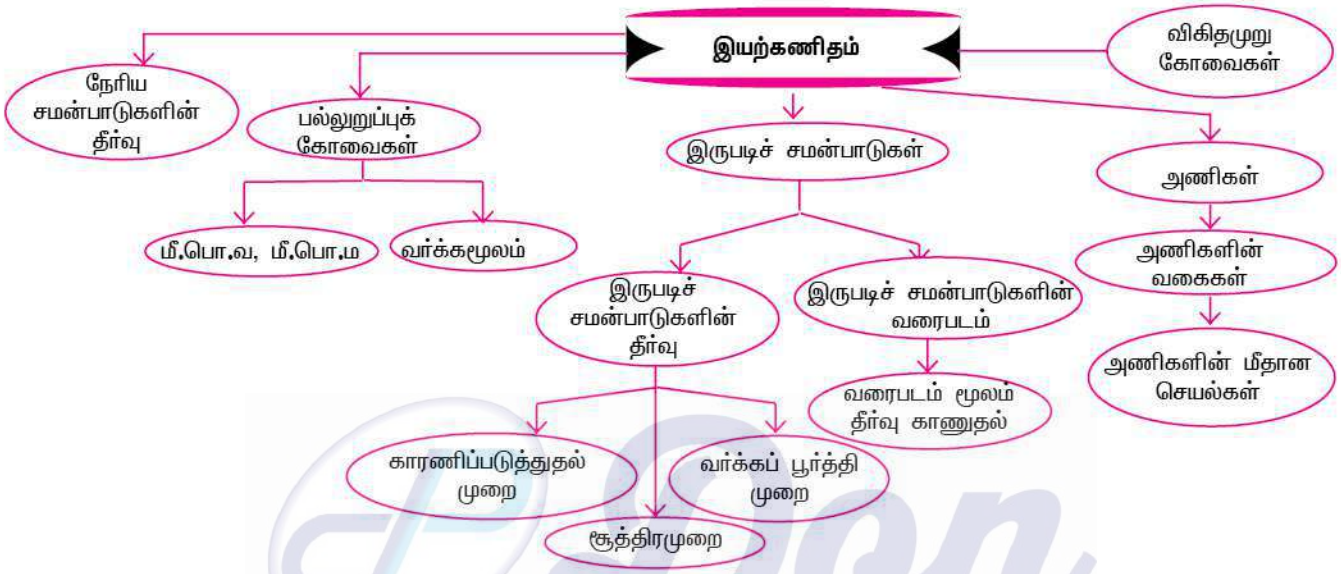
0.6 + 0.666 +... n உறுப்புகள் வரை

$$= \left[\frac{2n}{3} - \frac{2}{27}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right]$$

அலகு 3

இயற்கணிதம்

மன வரைபடம்



மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள்

நினைவில் கொள்க

- x , y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த படி 1 ஐக் கொண்ட சமன்பாடுகளை, இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் என்கிறோம். x , y என்ற மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax + by + c = 0$. இங்கு a, b, c என்பன மெய்யெண்கள்.
- இரண்டு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் xy-தளத்தில் அமைந்த நேர்கோடுகளைக் குறிக்கிறது.
- x, y மற்றும் z என்ற மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டின் வடிவம் $ax + by + cz + d = 0$. இங்கு a, b, c, d என்பன மெய்யெண்கள் மற்றும் a, b, c இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்று இருக்கும்.
- மூன்று மாறிகளில் அமைந்த சமன்பாடுகள் தளத்தைக் குறிக்கிறது.
- சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வு (அல்லது) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (அல்லது) தீர்வுகளின்றியும் இருக்கும்.
- சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது $0 = 1$ என வருமேயானால், அதற்கு தீர்வு கிடையாது.
- சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது $0 = 0$ என வருமேயானால், சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

3.1 தந்தையின் வயதானது மகனின் வயதைப் போல ஆறு மடங்கு ஆகும். ஆறு வருடங்களுக்குப் பிறகு தந்தையின் வயதானது மகனின் வயதைப்போல் நான்கு மடங்கு அதிகம். தந்தை மற்றும் மகனின் தற்போதைய வயதை (வருடங்களில்) காண்க.

தீர்வு : தந்தையின் தற்போதைய வயது x மற்றும் மகனின் தற்போதைய வயது y என்க.

கொடுக்கப்பட்டவை, $x = 6y$ ... (1)

$x + 6 = 4(y + 6)$ ... (2)

(1) ஐ (2)-யில் பிரதியிட, $6y + 6 = 4(y + 6)$

$6y + 6 = 4y + 24 \Rightarrow y = 9$

எனவே, மகனின் வயது 9 வருடங்கள் மற்றும் தந்தையின் வயது 54 வருடங்கள்.

3.2 தீர்க்க $2x - 3y = 6$, $x + y = 1$

தீர்வு :

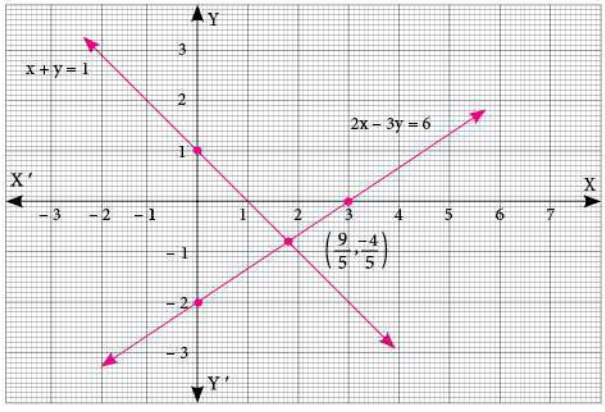
$2x - 3y = 6$ ... (1)

$x + y = 1$ ... (2)

$(1) \times 1 \Rightarrow 2x - 3y = 6$

$(2) \times 2 \Rightarrow 2x + 2y = 2$

$-5y = 4 \Rightarrow y = \frac{-4}{5}$



$y = \frac{-4}{5}$ என (2) -ல் பிரதியிட, $x - \frac{4}{5} = 1$

$\Rightarrow x = \frac{9}{5}$

எனவே, $x = \frac{9}{5}, y = \frac{-4}{5}$

3.3 பின்வரும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பினைத் தீர்க்க. $3x - 2y + z = 2$, $2x + 3y - z = 5$, $x + y + z = 6$

தீர்வு :

$3x - 2y + z = 2$ ... (1)

$2x + 3y - z = 5$ ... (2)

$x + y + z = 6$ ... (3)

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட,

$3x - 2y + z = 2$

$2x + 3y - z = 5$ (+)

$5x + y = 7$ ... (4)

(2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட,

$2x + 3y - z = 5$

$x + y + z = 6$ (+)

$3x + 4y = 11$ ... (5)

$4 \times (4) - (5)$

$20x + 4y = 28$

$3x + 4y = 11$ (−)

$17x = 17$

$\Rightarrow x = 1$

$x = 1$ என (4) -யில் பிரதியிட, $5 + y = 7$

$\Rightarrow y = 2$

$x = 1, y = 2$ என (3)-ல் பிரதியிட,

$1 + 2 + z = 6 \Rightarrow z = 3$

எனவே, $x = 1, y = 2, z = 3$

3.4. பள்ளிகளுக்கிடையேயான ஒரு தடகளப் போட்டியில், 24 தனிநபர் போட்டிகளில் ஒட்டுமொத்தமாக 56 புள்ளிகள் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. முதலிடம் பெறுபவருக்கு 5 புள்ளிகளும், இரண்டாமிடம் பெறுபவருக்கு 3 புள்ளிகளும், மூன்றாமிடம் பெறுபவருக்கு 1 புள்ளியும் அளிக்கப்படும். மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை முதல் மற்றும் இரண்டாம் இடங்களைப் பிடித்தவர்களின் எண்ணிக்கையின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

முதலிடம் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை x, இரண்டாமிடம் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை y, மூன்றாமிடம் பெறுபவர்களின் எண்ணிக்கை z என்க.

மொத்தப்போட்டிகள் = 24; மொத்தப்புள்ளிகள் = 56.

எனவே, மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்

$x + y + z = 24$ ...(1)

$5x + 3y + z = 56$ ...(2)

$x + y = z$ ...(3)

(3) ஐ (1) -யில் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது $z + z = 24 \Rightarrow z = 12$

$(3) \Rightarrow \quad x + y = 12$

$(2) \Rightarrow \quad 5x + 3y = 44$

$3 \times (3) \Rightarrow \quad 3x + 3y = 36 \quad (-)$

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

$x = 4$, $z = 12$ என (3) -யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $y = 12 - 4 = 8$

எனவே, முதலிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும்;

இரண்டாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 8 ஆகும்;

மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

3.5 **தீர்க்க $x + 2y - z = 5$; $x - y + z = -2$; $-5x - 4y + z = -11$**

தீர்வு :

$x + 2y - z = 5$ ... (1)

$x - y + z = -2$ ... (2)

$-5x - 4y + z = -11$ ...(3)

(1) மற்றும் (2)-ஐக் கூட்ட,

$x + 2y - z = 5$

$x - y + z = -2$ (+)

$2x + y = 3$ ... (4)

(2)-லிருந்து (3) -ஐக் கழிக்க,

$x - y + z = 2$

$-5x - 4y + z = -11$ (–)

$6x + 3y = 9$

3 ஆல் வகுக்க, $2x + y = 3$ ... (5)

(4) -லிருந்து(5)-ஐக் கழிக்க,

$2x + y = 3$

$2x + y = 3$

$0 = 0$

இங்கு $0 = 0$ என்ற முற்றொருமை கிடைக்கிறது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

3.6. **தீர்க்க $3x + y - 3z = 1$; $-2x - y + 2z = 1$; $-x - y + z = 2$.**

தீர்வு :

$3x + y - 3z = 1$ ...(1)

$-2x - y + 2z = 1$ ... (2)

$-x - y + z = 2$ ... (3)

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட,

$3x + y - 3z = 1$

$-2x - y + 2z = 1$ (+)

$x - z = 2$ ... (4)

(1) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட,

$3x + y - 3z = 1$

$-x - y + z = 2$ (+)

$2x - 2z = 3$ ... (5)

$(5) - 2 \times (4) \Rightarrow 2x - 2z = 4 \quad (-)$

$0 = -1$

இங்கு நாம் $0 = -1$ என்ற தவறான முடிவைப் பெறுறோம். எனவே, இந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்குத் தீர்வு இல்லை.

3.7. **தீர்க்க $\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{6} + 1 = \frac{z}{7} + 2$; $\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 13$**

தீர்வு :

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{6} + 1$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{6x - 2y}{12} = 2$$

$\Rightarrow 3x - y = 12$ ... (1)

$\frac{x}{2} - 1 = \frac{z}{7} + 2$ என்க.

$$\frac{x}{2} - \frac{z}{7} = 1 + 2$$

$$\Rightarrow \frac{7x - 2z}{14} = 3$$

$\Rightarrow 7x - 2z = 42$ ... (2)

$$\frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 13$$

$$\Rightarrow \frac{2y + 3z}{6} = 13$$

$\Rightarrow 2y + 3z = 78$ ... (3)

(2) மற்றும் (3) -லிருந்து z- ஐ நீக்க,

$(2) \times 3 \Rightarrow \quad 21x - 6z = 126$

$(3) \times 2 \Rightarrow \quad 4y + 6z = 156$

$21x + 4y = 282$

$(1) \times 4 \Rightarrow \quad x - 4y = 48$

$33x = 330 \Rightarrow x = 10$

$x = 10$ என (1)- ல் பிரதியிட, $30 - y = 12$

$\Rightarrow y = 18$

$x = 10$ என (2) - ல் பிரதியிட, $70 - 2z = 42$

$\Rightarrow z = 14$

எனவே, $x = 10, y = 18, z = 14$

3.8 **தீர்க்க :**

$\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} - \frac{1}{3z} = \frac{1}{4}; \frac{1}{x} = \frac{1}{3y}; \frac{1}{x} - \frac{1}{5y} + \frac{4}{z} = 2\frac{2}{15}$

தீர்வு :

$\frac{1}{x} = p, \frac{1}{y} = q, \frac{1}{z} = r$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளை

$$\frac{p}{2} + \frac{q}{4} - \frac{r}{3} = \frac{1}{4}$$

$$p = \frac{q}{3}$$

$p - \frac{q}{5} + 4r = 2\frac{2}{15} = \frac{32}{15}$ என எழுதலாம்

இவற்றைச் சுருக்கும்போது கிடைப்பது,

$6p + 3q - 4r = 3$ ... (1)

$3p = q$ ... (2)

$15p - 3q + 60r = 32$ ... (3)

(2) -ஐ (1) மற்றும் (3)-யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$15p - 4r = 3$ ... (4)

$6p + 60r = 32$

$\Rightarrow 3p + 30r = 16$ ... (5)

(4) மற்றும் (5) -ஐத் தீர்க்க,

$$\begin{array}{r} 15p - 4r = 3 \\ 15p + 150r = 80 \ (-) \\ \hline -154r = -77 \end{array} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$r = \frac{1}{2}$ என (4) -ல் பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது,

$15p - 2 = 3$

$\Rightarrow p = \frac{1}{3}$

(2) -லிருந்து, $q = 3p \Rightarrow , q = 1$

எனவே, $x = \frac{1}{p} = 3, y = \frac{1}{q} = 1, \quad z = \frac{1}{r} = 2$

அதாவது, $x = 3, y = 1, z = 2$

3.9. முதல் எண்ணின் மும்மடங்கு இரண்டாம் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண்ணின் இரு மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதல் 5. முதல் எண்ணின் மும்மடங்கைக் கழிக்க நாம் பெறுவது 2. முதல் எண்ணின் இரு மடங்கு மற்றும் இரண்டாம் எண்ணின் மும்மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதலிலிருந்து மூன்றாம் எண்ணைக் கழிக்க நாம் பெறுவது 1. இவ்வாறு அமைந்த மூன்று எண்களைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான மூன்று எண்கள் x, y, z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து நாம் பெறுவது

$3x + y + 2z = 5$ ... (1)

$x + 3z - 3y = 2$ ...(2)

$2x + 3y - z = 1$ ... (3)

$(1) \times 1 \Rightarrow 3x + y + 2z = 5$

$(2) \times 3 \Rightarrow 3x - 9y + 9z = 6 \ (-)$

$10y - 7z = -1$ ...(4)

$(1) \times 2 \Rightarrow 6x + 2y + 4z = 10$

$(3) \times 3 \Rightarrow 6x + 9y - 3z = 3 \ (-)$

$-7y + 7z = 7$ ...(5)

(4) மற்றும் (5) ஐக் கூட்ட, $10y - 7z = -1$

$-7y + 7z = 7$

$3y = 6$

$\Rightarrow y = 2$

$y = 2$ என (5) -ல் பிரதியிட,

$-14 + 7z = 7 \Rightarrow z = 3$

$y = 2$ மற்றும் $z = 3$ என (1) ல் பிரதியிட,

$3x + 2 + 6 = 5$

$\Rightarrow x = -1$

எனவே, தேவையான எண்கள் $x = -1, y = 2, z = 3$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு கிடைக்க வேண்டுமெனில் தேவைப்படும் குறைந்தப்பட்ச சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை_____.

விடை: 3

2. _____ எனில், நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒரு முற்றொருமையைக் கொடுக்கும்.
விடை: எண்ணற்ற தீர்வுகள்.

3. _____ எனில், நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பின் முடிவு பொருளற்றது.
விடை: தீர்வு இல்லை.

சிந்தனைக் களம்

1. மூன்று மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாட்டு தொகுப்பினைத் தீர்க்கும்போது கிடைக்கும் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை _____.
விடை: 3

2. மூன்று தளங்கள் இணையாக இருப்பின் அவை சந்திக்கும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை_____.
விடை: பூச்சியம்.

பயிற்சி 3.1

1. கீழ்க்காணும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமை நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க.

(i) $x + y + z = 5,\ 2x - y + z = 9,\ x - 2y + 3z = 16$

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 4 = 0,\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + 1 = 0,\ \frac{2}{z} + \frac{3}{x} = 14$

(iii) $x + 20 = \frac{3y}{2} + 10 = 2z + 5 = 110 - (y + z)$

தீர்வு :

(i)

$$x + y + z = 5 \quad \ldots(1)$$
$$2x - y + z = 9 \quad \ldots(2)$$
$$x - 2y + 3z = 16 \quad \ldots(3)$$

(1) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$x + y + z = 5 \quad \ldots(1)$$
$$2x - y + z = 9 \ (+) \quad \ldots(2)$$
$$(1) + (2) \Rightarrow \quad 3x + 2z = 14 \quad \ldots(4)$$

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$x - 2y + 3z = 16 \quad \ldots(3)$$
$$(1) \times (2) \Rightarrow \quad 2x + 2y + 2z = 10 \ (+) \quad \ldots(5)$$
$$(3) + (5) \Rightarrow \quad 3x + 5z = 26 \quad \ldots(6)$$

(4) , (6) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$3x + 5z = 26 \quad \ldots(6)$$
$$3x + 2z = 14 \quad \ldots(4)$$
$$(6) - (4) \Rightarrow \quad 3z = 12$$
$$z = \frac{12}{3} = 4$$

$z = 4$ என (4) –ல் பிரதியிட,

$$3x + 2(4) = 14$$
$$3x + 8 = 14$$
$$3x = 14 - 8 = 6$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$x = 2, z = 4$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$2 + y + 4 = 5$$
$$y + 6 = 5$$
$$y = 5 - 6$$
$$y = -1$$

∴ தீர்வு : $x = 2, y = -1, z = 4$

(ii)

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + 4 = 0$$
$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} + 1 = 0$$
$$\frac{2}{z} + \frac{3}{x} = 14$$

$\frac{1}{x} = a,\ \frac{1}{y} = b$ மற்றும் $\frac{1}{z} = c$ என்க

எனவே, சமன்பாடுகள்

$$a - 2b = -4 \quad \ldots(1)$$
$$b - c = -1 \quad \ldots(2)$$
$$3a + 2c = 14 \quad \ldots(3)$$
$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow \quad 4a - b + c = 9 \quad \ldots(4)$$

(4) ,(2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$4a - b + c = 9 \quad \ldots(4)$$
$$b - c = -1 \quad \ldots(2)$$
$$(4) + (2) \Rightarrow \quad 4a = 8$$
$$a = \frac{8}{4} = 2$$

$a = 2$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$2 - 2b = -4$$
$$-2b = -4 - 2 = -6$$
$$b = \frac{6}{2} = 3$$

$b = 3$ என (2) ல் பிரதியிட,

$$3 - c = -1$$
$$c = 4$$

இப்போது $a = 2, b = 3, c = 4$

∴ தீர்வு $x = \frac{1}{a} = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{b} = \frac{1}{3},\ z = \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$

(iii) $x + 20 = \frac{3y}{2} + 10 = 2z + 5 = 110 - (y + z)$

$x + 20 = \frac{3y}{2} + 10$ என்பதைச் சமப்படுத்த

$2x + 40 = 3y + 20$

சுருக்கக் கிடைப்பது, $2x - 3y = -20$ ... (1)

$\frac{3y}{2} + 10 = 2z + 5$ என்பதைச் சமப்படுத்த

$3y + 20 = 4z + 10$

சுருக்க $3y - 4z = -10$ ... (2)

சமப்படுத்த $2z + 5 = 110 - (y + z)$

சுருக்க $3z + y = 105$ ... (3)

(2) , (3) ஐக் கருதுக.

(3) × 3 $\Rightarrow$ $3y + 9z = 315$ ... (4)

(2) × 1 $\Rightarrow$ $3y - 4z = -10$ ... (2)

(4) – (2) $\Rightarrow$ $13z = 325$

$z = \frac{325}{13} = 25$

(3) ல் பிரதியிட, $3(25) + y = 105$

$y = 105 - 75$

$y = 30$

$y = 30$ என (1) ல் பிரதியிட,

$2x - 3(30) = -20$

$2x = -20 + 90$

$2x = 70$

$x = \frac{70}{2} = 35$

∴ தீர்வு : $x = 35, y = 30, z = 25$

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுகளின் தன்மையைக் காண்க.

(i) $x + 2y - z = 6$, $-3x - 2y + 5z = -12$, $x - 2z = 3$

(ii) $2y + z = 3(-x + 1)$, $-x + 3y - z = -4$, $3x + 2y + z = -\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{3} = \frac{x+y}{2}$, $x + y + z = 27$

தீர்வு :

(i) $x + 2y - z = 6$ ... (1)

$-3x - 2y + 5z = -12$ ... (2)

$x - 2z = 3$ ... (3)

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$x + 2y - z = 6$ ... (1)

$x - 2z = 3$ ... (3)

(1) – (3) $\Rightarrow$ $2y + z = 3$ ... (4)

(4) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$2y + z = 3$ ... (4)

$-3x - 2y + 5z = -12$ ... (2)

(4) + (2) $\Rightarrow$ $-3x + 6z = -9$ ... (5)

(5) ஐ (–3) ஆல் வகுக்க,

கிடைப்பது, $x - 2z = 3$ ... (6)

6) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$x - 2z = 3$ ... (6)

$x - 2z = 3$ ... (3)

(6) – (3) $\Rightarrow$ $0 = 0$ என்பது முற்றொருமை.

∴ சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டது.

(ii) $2y + z = 3(-x + 1)$

$3x + 2y + z = 3$ ... (1)

$-x + 3y - z = -4$ ... (2)

$3x + 2y + z = -\frac{1}{2}$ ... (3)

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$3x + 2y + z = 3$ ... (1)

$3x + 2y + z = -\frac{1}{2}$ ... (2)

(1) – (2) $\Rightarrow$ $0 = \frac{7}{2}$ (அல்லது)

$0 = 7$

$0 = 7$ என்பது தவறான முடிவு. (பொருளற்றது)

∴ சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு தீர்வு கிடையாது.

(iii) $\frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{3} = \frac{x+y}{2}$

$x + y + z = 27$ ... (3)

$\frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{3}$ என்பதைச் சமப்படுத்த

நமக்குக் கிடைப்பது, $4x - 3y + z = 0$ ... (1)

$\frac{y+z}{4} = \frac{x+y}{2}$ என்பதைச் சமப்படுத்த

சுருக்கக் கிடைப்பது, $2x + y - z = 0$ ... (2)

(1) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$4x - 3y + z = 0$ ...(1)

$2x + y - z = 0$ ...(2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $6x - 2y = 0$ ...(4)

(2) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$2x + y - z = 0$ ...(2)

$x + y + z = 27$ ...(3)

(2) + (3) $\Rightarrow$ $3x + 2y = 27$ ...(5)

(4) , (5) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$6x - 2y = 0$ ...(4)

$3x + 2y = 27$ ...(5)

$9x = 27$

$$x = \frac{27}{9} = 3$$

$x = 2$ என்பதை (4) ல் பிரதியிட,

$$6(3) - 2y = 0$$
$$-2y = -18$$
$$y = \frac{18}{2} = 9$$

$x = 3, y = 9$ என்பதை (3) ல் பிரதியிட,

$$3 + 9 + z = 27$$
$$z = 27 - 12$$
$$z = 15$$

தீர்வு: $x = 3, y = 9, z = 15$

3. தாத்தா, தந்தை மற்றும் வாணி ஆகிய மூவரின் சராசரி வயது 53. தாத்தாவின் வயதில் பாதி, தந்தையின் வயதில் மூன்றில் ஒரு பங்கு மற்றும் வாணியின் வயதில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதல் 65. நான்கு ஆண்டுகளுக்கு முன் தாத்தாவின் வயது வாணியின் வயதைபோல் நான்கு மடங்கு எனில், மூவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

தீர்வு :

வாணி, தந்தை மற்றும் தாத்தா ஆகியோரின் தற்போதைய வயது முறையே x, y, z என்க.

$\therefore$ கொ.ப: $\frac{x + y + z}{3} = 53$

$$\therefore x + y + z = 159 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{z}{2} + \frac{y}{3} + \frac{x}{4} = 65$$

$$6z + 4y + 3x = 780 \quad \ldots (2)$$
$$(z - 4) = 4(x - 4)$$
$$4x - z = 12 \quad \ldots (3)$$

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$x + y + z = 159 \quad \ldots (1)$$
$$4x - z = 12 \quad \ldots (3)$$

(1) + (3) $\Rightarrow$ $5x + y = 171$ ... (4)

(2) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$3x + 4y + 6z = 780 \quad \ldots (2)$$

(3) × (6) $\Rightarrow$ $24x - 6z = 72$ ... (5)

(2) + (5) $\Rightarrow$ $27x + 4y = 852$ ... (6)

(4) , (6) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

(4) × 4 $\Rightarrow$ $20x + 4y = 684$ ... (7)

(6) × 1 $27x + 4y = 852$ ... (6)

(7) – (6) $\Rightarrow$ $-7x = -168$

$$x = \frac{168}{7} = 24$$

$x = 24$ என (4) ல் பிரதியிட,

$$5(24) + y = 171$$
$$y = 171 - 120 = 51$$

$x = 24, y = 51$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$24 + 51 + z = 159$$
$$z = 159 - 75 = 84$$

$\therefore$ வாணியின் தற்போதைய வயது = 24 வருடங்கள்
தந்தையின் தற்போதைய வயது = 51 வருடங்கள்
தாத்தாவின் தற்போதைய வயது = 84 வருடங்கள்.

4. ஒரு மூவிலக்க எண்ணில், இலக்கங்களின் கூடுதல் 11. இலக்கங்களை இடமிருந்து வலமாக வரிசை மாற்றினால் புதிய எண் பழைய எண்ணின் ஐந்து மடங்கைவிட 46 அதிகம். பத்தாம் இட இலக்கத்தின் இரு மடங்கோடு நூறாம் இட இலக்கத்தைக் கூட்டினால் ஒன்றாம் இட இலக்கம் கிடைக்கும் எனில், அந்த மூவிலக்க எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

நூறாம் இட இலக்கம் 'x', பத்தாம் இட இலக்கம் 'y' மற்றும் ஒன்றாம் இடஇலக்கம் 'z' என்க.

$\therefore$ மூவிலக்க எண் $100x + 10y + z$

கொ. பட்டது: $x + y + z = 11$ ... (1)

$$100z + 10y + x = 5(100x + 10y + z) + 46$$

சுருக்கக் கிடைப்பது

$$499x + 40y - 95z = -46 \quad \ldots (2)$$
$$x + 2y = z$$
$$\Rightarrow x + 2y - z = 0 \quad \ldots (3)$$

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$x + y + z = 11 \quad \ldots (1)$$
$$x + 2y - z = 0 \quad \ldots (3)$$

(1) + (3) $\Rightarrow$ $2x + 3y = 11$ ... (4)

(1) ஐக் கருதுக.

$$499x + 40y - 95z = -46 \quad \ldots (2)$$

(1) × 95 $\Rightarrow$

$95x + 95y + 95z = 1045$ ... (5)

$594x + 135y = 999$ ... (6)

(6) , (4) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$594x + 135y = 999 \quad \ldots (6)$$

(4) × 45 $\Rightarrow$ $90x + 135y = 495$ ... (7)

(6) – (7) $\Rightarrow$ $504x = 504$

$$x = \frac{504}{504} = 1$$

$x = 1$ என (4) ல் பிரதியிட,

$$2(1) + 3y = 11$$
$$3y = 11 - 2 = 9$$
$$y = \frac{9}{3} = 3$$

$x = 1, y = 3$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$1 + 3 + z = 11$$
$$z = 11 - 4 = 7$$

$\therefore x = 1,\ y = 3, z = 7$

$\therefore$ மூவிலக்க எண் 137.

அதாவது, $100(1) + 10(3) + 1(7) = 100 + 30 + 7 = 137$

5. ஐந்து, பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகளின் மொத்த மதிப்பு ₹ 105 மற்றும் மொத்த நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை 12. முதல் இரண்டு வகை நோட்டுகளின் எண்ணிக்கையை இடமாற்றம் செய்தால் முந்தைய மதிப்பை விட ₹ 20 அதிகரிக்கிறது எனில், எத்தனை ஐந்து பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகள் உள்ளன?

தீர்வு :

ஐந்து, பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை முறையே x, y , z என்க.

கொ.ப.: $x + y + z = 12$ ... (1)

$5x + 10y + 20z = 105$ ... (2)

$10x + 5y + 20z = 125$ ... (3)

(2) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$5x + 10y + 20z = 105$ ... (2)

$10x + 5y + 20z = 125$ ... (3)

(2) – (3) $\Rightarrow -5x + 5y = -20$ ... (4)

(1) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

(1) $\times 20 \Rightarrow 20x + 20y + 20z = 240$ ... (5)

(2) $\times 1 \Rightarrow 5x + 10y + 20z = 105$ ... (2)

(5) – (2) $\Rightarrow 15x + 10y = 135$ ... (6)

(4) , (6) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

(4) $\times 3 \Rightarrow -15x + 15y = -60$ ... (7)

$15x + 10y = 135$ ... (6)

$$25y = 75$$
$$y = \frac{75}{25} = 3$$

$y = 3$ என (4) ல் பிரதியிட,

$$-5x + 5(3) = -20$$
$$-5x = -20 - 15$$
$$-5x = -35$$
$$x = \frac{35}{5} = 7$$

$x = 7, y = 3$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$7 + 3 + z = 12$$
$$z = 12 - 10 = 2$$

$\therefore$ ஐந்து ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை 7
பத்து ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை 3
இருபது ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை 2.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம

நினைவில் கொள்க

- மீ.பொ.வ என்பதை நீள் வகுத்தல் முறை மூலம் கண்டறியலாம்.
- $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன ஒரே படியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில், பெரும உறுப்பை படியாகக் கொண்டது வகுபடும் உறுப்பாக இருக்கும்.
- மீ.பொ.ம: இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம என்பது கோவைகளால் வகுபடும் மீச்சிறு படியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.
- மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு: $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில்,
  $f(x) \times g(x) = [f(x), g(x)$ ன் மீ.பொ.ம$] \times [f(x), g(x)$ ன் மீ.பொ.வ$]$

எடுத்துக்காட்டு

3.10 $x^3 + x^2 - x + 2$ மற்றும் $2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு:

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ மற்றும்
$g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{l|l} & 2 \\ \hline x^3 + x^2 - x + 2 & 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3 \\ & 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \quad (-) \\ \hline & -7x^2 + 7x - 7 \end{array}$$

$= -7(x^2 - x + 1)$

$-7(x^2 - x + 1) \neq 0, -7$ என்பது $g(x)$ –யின் ஒரு வகுத்தி அல்ல.

$g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ –ஐ மீதியால் வகுக்க (மாறிலிக் காரணியை விடுத்து), நாம் பெறுவது

$$\begin{array}{l|l} & x \\ \hline x^3 - x + 1 & x^3 + x^2 - x + 2 \\ & x^3 - x^2 + x \quad (-) \\ \hline & 2x^2 - 2x + 2 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \quad (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

$= 2(x^2 - x + 1)$

இந்நிலையில், மீதி பூச்சியம் ஆகும்.

எனவே, மீ.பொ. வ $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 3, x^3 + x^2 - x + 2)$
$= x^2 - x + 1$

3.11. $6x^3 - 30x^2 + 60x - 48$ மற்றும் $3x^3 - 12x^2 + 21x - 18$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு:

$f(x) = 6x^3 - 30x^2 + 60x - 48$
$= 6(x^2 - 5x^2 + 10x - 8)$ மற்றும்
$g(x) = 3x^3 - 12x^2 + 21x - 18$
$= 3(x^3 - 4x^2 + 7x - 6)$

என இருப்பதால், தற்பொழுது நாம் $x^3 - 5x^2 + 10x - 8$ மற்றும் $x^3 - 4x^2 + 7x - 6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

$$\begin{array}{l|l} & 1 \\ \hline x^3 - 5x^2 + 10x - 8 & x^3 - 4x^2 + 7x - 6 \\ & x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \quad (-) \\ \hline & x^2 - 3x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & x - 2 \\ \hline x^2 - 3x + 2 & x^3 - 5x^2 + 10x - 8 \\ & x^3 - 3x^2 + 2x \quad (-) \\ \hline & -2x^2 + 8x - 8 \\ & -2x^2 + 6x - 4 \quad (-) \\ \hline & 2x - 4 = 2(x - 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & x - 1 \\ \hline x - 2 & x^2 - 3x + 2 \\ & x^2 - 2x \quad (-) \\ \hline & -x + 2 \\ & -x + 2 \quad (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

இங்கு, மீதி பூச்சியம் ஆகும்.

இங்கு தலையாயக் கெழுக்கள் 3 மற்றும் 6 –ன் மீ.பொ.வ 3 ஆகும்.

எனவே, மீ.பொ.வ $(6x^3 - 30x^2 + 60x - 48, 3x^3 - 12x^2 + 21x - 18) = 3(x - 2)$

3.12. பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.ம காண்க.

(i) $8x^4y^2, 48x^2y^4$

(ii) $(5x - 10), (5x^2 - 20)$

(iii) $(x^4 - 1), x^2 - 2x + 1$

(iv) $x^3 - 27, (x - 3)^2, x^2 - 9$

தீர்வு:

(i) $8x^4y^2, 48x^2y^4$

முதலில் நாம் எண் கெழுக்களின் மீ.பொ.ம காண்போம். அதாவது,

மீ.பொ.ம$(8, 48) = 2 \times 2 \times 2 \times 6 = 48$

இப்பொழுது உறுப்புகளில் உள்ள மாறிகளுக்கு மீ.பொ.ம காண்போம்.

அதாவது. மீ.பொ.ம$(x^4y^2, x^2y^4) = x^4y^4$

எண்கெழுக்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மாறிகளின் மீ.பொ.ம ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளின் மீ.பொ.ம ஆகும்.

எனவே,

மீ.பொ.ம $(8x^4y^2, 48x^2y^4) = 48x^4y^4$

(ii) $(5x - 10), (5x^2 - 20)$

$5x - 10 = 5(x - 2)$
$5x^2 - 20 = 5(x^2 - 4)$
$= 5(x + 2)(x - 2)$

எனவே, மீ.பொ.ம $[(5x - 10), (5x^2 - 20)]$
$= 5(x + 2)(x - 2)$

(iii) $(x^4 - 1), x^2 - 2x + 1$

$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1$

$= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

எனவே,

மீ.பொ.ம $[(x^4 - 1), (x^2 - 2x + 1)]$

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)^2$

(iv) $x^3 - 27, (x - 3)^2, x^2 - 9$

$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

$(x - 3)^2 = (x - 3)^2$;

$(x^2 - 9) = (x + 3)(x - 3)$

எனவே, மீ.பொ.ம $[(x^3 - 27), (x - 3)^2, (x^2 - 9)]$

$= (x - 3)^2 (x + 3)(x^2 + 3x + 9)$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரே படியுள்ள இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுக்கும்போது, _____ ஐப் பொறுத்து வகுபடும் மற்றும் வகுக்கும் கோவைகளைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

விடை: உயர்ந்த வரிசைக்கெழு

2. f (x) ஐ g (x) ஆல் வகுக்கும்போது மீதி r (x) = 0 எனில், g (x) ஆனது அந்த இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் _____ என அழைக்கப்படும்.

விடை: காரணி

3. f (x) = g (x) q(x) + r(x) எனில், f (x) ஆனது g(x) -ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில், f (x) உடன் _____ ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

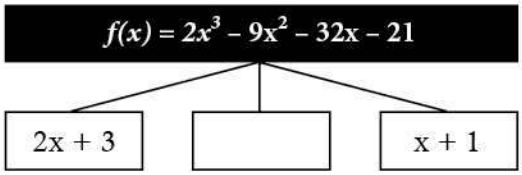
விடை: q (x)

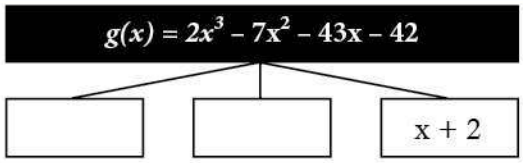
4. f(x) = g(x) q(x) + r(x) எனில் f(x) ஆனது g(x)–ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில் f(x) உடன் _____ ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

விடை: r (x)

சிந்தனைக் களம்

1. கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகள் f(x) மற்றும் g(x) ஆகியவற்றுக்கான காரணி மரத்தை நிறைவு செய்க. அதிலிருந்து அவற்றின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம காண்க.

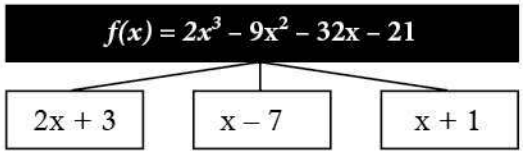


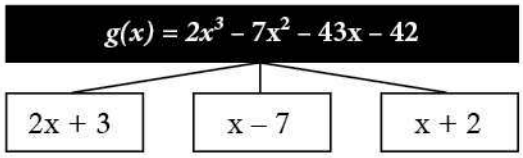


மீ.பொ.வ [f(x) மற்றும் g(x)] = _____ ?

மீ.பொ.ம [f(x) மற்றும் g(x)] = _____ ?

விடை:





மீ.பொ. வ [f(x) மற்றும் g(x)] = $(2x + 3)(x - 7)$

மீ.பொ. ம [f(x) மற்றும் g(x)] = $(2x + 3)(x - 7)(x + 2)(x + 1)$

பயிற்சி 3.2

1. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

(i) $x^4 + 3x^3 - x - 3, x^3 + x^2 - 5x + 3$

(ii) $x^4 - 1, x^3 - 11x^2 + x - 11$

(iii) $3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x, 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$

(iv) $3x^3 + 3x^2 + 3x + 3, 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

தீர்வு:

(i) $x^4 + 3x^3 - x - 3, x^3 + x^2 - 5x + 3$

உயர்ந்த வரிசை பல்லுறுப்புக் கோவையை, குறைந்த வரிசை பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க, மற்றும்

$f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$

$g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ என்க.

f (x) ஐ g (x) ஆல் வகுக்க,

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\ & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \quad (-) \\ \hline & 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\ & 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \quad (-) \\ \hline & 3x^2 + 6x - 9 \end{array}$$

$= 3(x^2 + 2x - 3) \neq 0$

g (x) ன் வகுத்தி '3' இல்லாததால், g (x) ஐ $x^2 + 2x - 3$ ஆல் வகுக்க

$x - 1$

$x^2 + 2x - 3$ | $x^3 + x^2 - 5x + 3$

$x^3 + 2x^2 - 3x$ (–)

$- x^2 - 2x + 3$

$- x^2 - 2x + 3$ (–)

0

மீதி பூச்சியம் வருவதால், மீ.பொ.வ = $x^2 + 2x - 3$

(ii) $f(x) = x^4 - 1$, $g(x) = x^3 - 11x^2 + x - 11$ என்க.

f (x) ஐ g (x) ஆல் வகுக்க

$x + 11$

$x^3 - 11x^2 + x - 11$ | $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$

$x^4 - 11x^3 + x^2 - 11x$ (–)

$11x^3 - x^2 + 11x - 1$

$11x^3 - 121x^2 + 11x - 121$ (–)

$120x^2 + 120$

$= 120 (x^2 + 1) \neq 0$

'120' என்பது g (x) ன் வகுத்தி அல்ல. எனவே, g (x) ஐ $x^2 + 1$ ஆல் வகுக்க.

$x - 11$

$x^2 + 1$ | $x^3 - 11x^2 + x - 11$

$x^3 + x$ (–)

$- 11x^2 - 11$

$- 11x^2 - 11$ (–)

0

மீதி பூச்சியம் வருவதால், மீ.பொ.வ = $x^2 + 1$

(iii) $f(x) = 4x^4 + 14x^3 + 8x^2 - 8x$

$= 2 (2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 4x)$

$g(x) = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 3 (x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x)$ என்க.

$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 4x$ ஐ $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$ ஆல் வகுக்க

2

$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$ | $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 4x$

$2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 16x$ (–)

$3x^3 + 12x^2 + 12x$

$= 3 (x^3 + 4x^2 + 4x)$

இப்போது, $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$ ஐ $x^3 + 4x^2 + 4x$ ஆல் வகுக்க

$x - 2$

$x^3 + 4x^2 + 4x$ | $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2$ (–)

$- 2x^3 - 8x^2 - 8x$

$- 2x^3 - 8x^2 - 8x$ (–)

0

மீதி பூச்சியம் வருவதால், மீ.பொ.வ = $x^3 + 4x^2 + 4x$

அதாவது, $x (x^2 + 4x + 4) = x (x + 2)^2$

(iv) $f(x) = 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

$= 6 (x^3 + 2x^2 + x + 2)$

$g(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

$= 3 (x^3 + x^2 + x + 1)$ என்க

6 , 3 ன் மீ.பொ.வ 3

இப்போது, $x^3 + 2x^2 + x + 2$ ஐ $x^3 + x^2 + x + 1$ ஆல் வகுக்க

1

$x^3 + x^2 + x + 1$ | $x^3 + 2x^2 + x + 2$

$x^3 + x^2 + x + 1$ (–)

$x^2 + 1$

இப்போது, $(x^3 + x^2 + x + 1)$ ஐ $(x^2 + 1)$ ஆல் வகுக்க

$x + 1$

$x^2 + 1$ | $x^3 + x^2 + x + 1$

$x^3 + x$ (–)

$x^2 + 1$

$x^2 + 1$ (–)

0

மீதி பூச்சியம் வருவதால், மீ.பொ.வ = $3(x^2 + 1)$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.பொ.ம காண்க.

(i) $4x^2y, 8x^3y^2$

(ii) $-9a^3b^2, 12a^2b^2c$

(iii) $16m, -12m^2n^2, 8n^2$

(iv) $p^2 - 3p + 2, p^2 - 4$

(v) $2x^2 - 5x - 3, 4x^2 - 36$

(vi) $(2x^2 - 3xy)^2, (4x - 6y)^3, (8x^3 - 27y^3)$

தீர்வு:

(i) $4x^2y, 8x^3y^2$

மீ.பொ.ம (4, 8) = 8
மீ.பொ.ம (x^2y, x^3y^2) = x^3y^2
∴ மீ.பொ.ம $(4x^2y, 8x^3y^2)$ = $8x^3y^2$

(ii) $-9a^3b^2, 12a^2b^2c$
மீ.பொ.ம $(-9, 12)$ = -36
மீ.பொ.ம (a^3b^2, a^2b^2c) = a^3b^2c
∴ மீ.பொ.ம $(-9a^3b^2, 12a^2b^2c) = -36a^3b^2c$

(iii) $16m, -12m^2n^2, 8n^2$
மீ.பொ.ம $(16, -12, 8)$ = -48
மீ.பொ.ம (m, m^2n^2, n^2) = m^2n^2
∴ மீ.பொ.ம $(16m, -12m^2n^2, 8n^2) = -48m^2n^2$

(iv) $p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)$
$p^2 - 4 = (p+2)(p-2)$
மீ.பொ.ம $= (p-1)(p-2)(p+2)$

(v) $2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 6x + x - 3$
$= 2x(x-3) + 1(x-3)$
$= (2x+1)(x-3)$
$4x^2 - 36 = 4(x^2 - 9)$
$= 4(x+3)(x-3)$
∴ மீ.பொ.ம $= 4(x+3)(x-3)(2x+1)$

(vi) $(2x^2 - 3xy)^2 = [x(2x-3y)]^2$
$= x^2(2x-3y)^2$
$(4x - 6y)^3 = [2(2x-3y)]^3$
$= 2^3(2x-3y)^3$
$8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3$
$= (2x-3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
∴ மீ.பொ.ம $= 2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
$= 2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம ஆகியவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு

சிந்தனைக் களம்

1. $f(x) \times g(x) \times r(x)$ = மீ.பொ.ம $[f(x), g(x), r(x)] \times$ மீ.பொ.வ $[f(x), g(x), r(x)]$ என ஆகுமா?

விடை:

$f(x) \times g(x) \times r(x) \neq [f(x), g(x), r(x)]$ ன் மீ.பொ.ம $\times [f(x), g(x), r(x)]$ ன் மீ.பொ.வ

பயிற்சி 3.3

1. பின்வருவனவற்றில் முறையே f (x) மற்றும் g (x) ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம காண்க. மேலும், f (x) × g (x) = (மீ.பொ.வ) × (மீ.பொ.ம) என்பதைச் சரிபார்க்க.

(i) $21x^2y, 35xy^2$

(ii) $(x^3 - 1)(x + 1), (x^3 + 1)$

(iii) $(x^2y + xy^2), (x^2 + xy)$

தீர்வு:

(i) $f(x) = 21x^2y$
$g(x) = 35xy^2$ என்க.
மீ.பொ.வ $= 7xy$
மீ.பொ.ம 21, 35 = 105
மீ.பொ.ம x^2y, xy^2 = x^2y^2
∴ மீ.பொ.ம $= 105x^2y^2$
இப்போது, $f(x) \times g(x) = (21x^2y)(35xy^2)$
$= 735x^3y^3$
மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ $= (105x^2y^2)(7xy)$
$= 735x^3y^3$
∴ $f(x) \times g(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ
சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $f(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$
$= (x-1)(x^2 + x + 1)(x + 1)$
$g(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
மீ.பொ.வ $= x + 1$
மீ.பொ.ம $= (x+1)(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
$f(x) \times g(x) = (x^3 - 1)(x + 1)(x^3 + 1)$
$= (x+1)((x^3)^2 - (1)^2)$
$= (x+1)(x^6 - 1)$
மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ $= (x+1)(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x + 1)$
$= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)(x + 1)$
$= (x^3 + 1)(x^3 - 1)(x + 1)$
$= (x^6 - 1)(x + 1)$
∴ $f(x) \times g(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ
சரிபார்க்கப்பட்டது.

(iii) $f(x) = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$
$g(x) = x^2 + xy = x(x + y)$ என்க
மீ.பொ.வ $= x(x + y)$
மீ.பொ.ம $= xy(x + y)$
$f(x) \times g(x) = (x^2y + xy^2)(x^2 + xy)$
$= xy(x + y)\, x(x + y)$
$= x^2y(x + y)^2$
மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ $= xy(x + y)\, x(x + y)$
$= x^2y(x + y)^2$
∴ $f(x) \times g(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ
சரிபார்க்கப்பட்டது.

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம காண்க.

(i) $a^2 + 4a - 12$, $a^2 - 5a + 6$ இவற்றின் மீ.பொ.வ $a - 2$

(ii) $x^4 - 27a^3x$, $(x - 3a)^2$ இவற்றின் மீ.பொ.வ $x - 3a$

தீர்வு:

(i)
$$f(x) = a^2 + 4a - 12$$
$$g(x) = a^2 - 5a + 6$$
கொ.ப: மீ.பொ.வ $= a - 2$

$f(x) \times g(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ

$$\therefore \text{ மீ.பொ.ம} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{மீ.பொ.வ}}$$
$$= \frac{(a^2 + 4a - 12)(a^2 - 5a + 6)}{a - 2}$$
$$= \frac{(a+6)(a-2)(a-3)(a-2)}{a-2}$$
$$\therefore \text{ மீ.பொ.ம} = (a-2)(a-3)(a+6)$$

(ii)
$$f(x) = x^4 - 27a^3x$$
$$= x(x^3 - 27a^3)$$
$$= x(x^3 - (3a)^3)$$
$$= x(x - 3a)(x^2 + 3ax + 9a^2)$$
$$g(x) = (x - 3a)^2 = (x - 3a)(x - 3a)$$
கொ.ப: மீ.பொ.வ $= (x - 3a)$

$f(x) \times g(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\therefore \text{ மீ.பொ.ம} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{மீ.பொ.வ}}$$
$$= \frac{x(x-3a)(x^2+3ax+9a^2)(x-3a)^2}{x-3a}$$
$$\therefore \text{ மீ.பொ.ம} = x(x^2 + 3ax + 9a^2)(x - 3a)^2$$

3. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ. காண்க.

(i) $12(x^4 - x^3)$, $8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ இவற்றின் மீ.பொ.ம $24x^3(x - 1)(x - 2)$

(ii) $(x^3 + y^3)$, $(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ இவற்றின் மீ.பொ.ம $(x^3 + y^3)(x^2 + xy + y^2)$

தீர்வு:

(i)
$$f(x) = 12(x^4 - x^3)$$
$$= 12x^3(x - 1)$$
$$g(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$$
$$= 8x^2(x^2 - 3x + 2)$$
$$= 8x^2(x - 1)(x - 2) \text{ என்க.}$$
மீ.பொ.ம $= 24x^3(x - 1)(x - 2)$

$f(x) \times g(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ என்பதை அறிவோம்.

$$\therefore \text{ மீ.பொ.வ} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{மீ.பொ.வ}}$$
$$= \frac{12x^3(x-1) \times 8x^2(x-1)(x-2)}{24x^3(x-1)(x-2)}$$
மீ.பொ.வ $= 4x^2(x - 1)$

(ii)
$$f(x) = x^3 + y^3$$
$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$g(x) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \text{ என்க}$$
கொ.ப: மீ.பொ.ம $= (x^3 + y^3)(x^2 + xy + y^2)$

$$\therefore \text{ மீ.பொ.வ} = \frac{f(x) \times g(x)}{\text{மீ.பொ.ம}}$$
$$= \frac{(x^3 + y^3)(x^4 + x^2y^2 + y^4)}{(x^3 + y^3)(x^2 + xy + y^2)}$$
$$= \frac{(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2}$$
$$= x^2 - xy + y^2$$

4. p (x), q (x) என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டறிந்து நிரப்புக.

	மீ.பொ.ம	மீ.பொ.வ	p (x)	q (x)
(i)	$a^3 - 10a^2 + 11a + 70$	$a - 7$	$a^2 - 12a + 35$	
(ii)	$(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$	$(x^2 - y^2)$		$(x^4 - y^4)(x^2 + y^2 - xy)$

தீர்வு:

(i) கொ.ப: மீ.பொ.ம $= a^3 - 10a^2 + 11a + 70$

மீ.பொ.வ $= a - 7$

$p(x) = a^2 - 12a + 35$

இப்போது $p(x) \times q(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ

$$\therefore q(x) = \frac{\text{மீ.பொ.ம} \times \text{மீ.பொ.வ}}{p(x)}$$
$$\therefore q(x) = \frac{(a^3 - 10a^2 + 11a + 70)(a - 7)}{a^2 - 12a + 35}$$
$$= \frac{(a-7)(a-5)(a+2)(a-7)}{(a-7)(a-5)}$$
$$= (a + 2)(a - 7)$$

(ii) கொ.ப: மீ.பொ.ம = $(x^2 + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

மீ.பொ.வ = $x^2 - y^2$

$q(x) = (x^4 - y^4)(x^2 + y^2 - xy)$

இப்போது, $p(x) \times q(x)$ = மீ.பொ.ம × மீ.பொ.வ

$$\therefore p(x) = \frac{\text{மீ.பொ.ம} \times \text{மீ.பொ.வ}}{q(x)}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)}{(x^4-y^4)(x^2+y^2-xy)}$$

$$= \frac{(x^4-y^4)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x^4-y^4)(x^2+y^2-xy)}$$

$= x^2 + xy + y$

விகிதமுறு கோவைகள்

முக்கிய குறிப்பு

- ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை $\frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0$ என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அதை விகிதமுறு கோவை என்கிறோம்.
- விகிதமுறு கோவை என்பது இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் விகிதாச்சாரம் ஆகும்.
- $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பதை [p(x), q(x)] ன் மீ.பொ.வ = 1 எனும்போது, சுருக்கப்பட்ட வடிவம் என்கிறோம்.
- சுருக்கப்பட்ட வடிவிலுள்ள விகிதமுறு கோவையை வரையறுக்கப்படாததாக மாற்றும் எண், அதன் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

3.13. விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவில் சுருக்குக.

(i) $\frac{x-3}{x^2-9}$ **(ii)** $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

தீர்வு:

(i) $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x+3}$

(ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)^2} = \frac{x-4}{x+4}$

3.14. பின்வரும் கோவைகளின் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு காண்க.

(i) $\frac{x+10}{8x}$ **(ii)** $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ **(iii)** $\frac{x}{x^2+1}$

தீர்வு:

(i) $\frac{x+10}{8x}$

$\frac{x+10}{8x}$ என்ற கோவையை $8x = 0$ (அ) $x = 0$ எனும்போது வரையறுக்க இயலாததாகிறது. ஆகவே விலக்கப்பட்ட மதிப்பு 0 அகும்.

(ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$

$\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ என்ற கோவையானது $8p^2 + 13p + 5 = 0$. அதாவது, $(8p + 5)(p + 1) = 0$ –விலிருந்து $p = \frac{-5}{8}$, $p = -1$ எனும்போது, கோவை வரையறுக்க இயலாததாகிறது. எனவே விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் $\frac{-5}{8}$ மற்றும் -1.

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$

இங்கு, அனைத்து x மதிப்புகளுக்கும் $x^2 \geq 0$.

எனவே $x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$. ஆகவே, எந்தவொரு x மதிப்புக்கும் $x^2 + 1 \neq 0$. எனவே, $\frac{x}{x^2+1}$ என்ற விகிதமுறு கோவைக்கு விலக்கப்பட்ட மெய் மதிப்புகள் ஏதுமில்லை.

சிந்தனைக் களம்

1. $x^2 - 1$ மற்றும் $x = \frac{\sin x}{\cos x}$ என்பவை விகிதமுறு கோவைகளா?

விடை: இல்லை

2. $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x^4+8x^2-9}$ என்ற கோவையின் விலக்கப்பட்ட மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை ____.

விடை: 2.

பயிற்சி 3.4

1. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக.

(i) $\frac{x^2-1}{x^2+x}$ (ii) $\frac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4}$

(iii) $\frac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x}$ (iv) $\frac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p}$

தீர்வு:

(i) $\frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}$

$= \frac{x-1}{x}$

(ii) $\frac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4} = \frac{(x-9)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x-9}{x-2}$

(iii) $\frac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x} = \frac{9x(x+9)}{x(x^2+8x-9)}$

$= \frac{9x(x+9)}{x(x+9)(x-1)}$

$= \frac{9}{x-1}$

(iv) $\frac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p} = \frac{(p-8)(p+5)}{2p(p^2-12p+32)}$

$= \frac{(p-8)(p+5)}{2p(p-8)(p-4)}$

$= \frac{p+5}{2p(p-4)}$

2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளுக்கு விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{y}{y^2-25}$ (ii) $\frac{t}{t^2-5t+6}$

(iii) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$ (iv) $\frac{x^3-27}{x^3+x^2-6x}$

தீர்வு:

(i) $\frac{y}{y^2-25} = \frac{y}{(y+5)(y-5)}$

y = – 5 மற்றும் y = 5 எனும்போது, கோவை வரையறுக்க இயலாததாகிறது.

∴ விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் = – 5, 5

(ii) $\frac{t}{t^2-5t+6} = \frac{t}{(t-2)(t-3)}$

t = 2 மற்றும் t = 3 எனும்போது, கோவை வரையறுக்க இயலாததாகிறது.

∴ விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள்2 மற்றும் 3

(iii) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x-1)}$

$= \frac{x+4}{x-1}$

x = 1 எனும்போது, கோவை வரையறுக்க இயலாததாகிறது.

∴ விலக்கப்பட்ட மதிப்பு 1.

(iv) $\frac{x^3-27}{x^3+x^2-6x} = \frac{x^3-3^3}{x(x^2+x-6)}$

$= \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x(x+3)(x-2)}$

x = 0, x = – 3 மற்றும் x = 2 எனும்போது, கோவை வரையறுக்க இயலாததாகிறது.

∴ விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் 0, – 3, 2

விகிதமுறு கோவைகள் மீதான செயல்கள்

முக்கிய குறிப்பு

- $\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{r(x)}{s(x)}$ என்பன இரு விகிதமுறு கோவைகள் எனில், அவற்றின் பெருக்கல் $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$
- $\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{r(x)}{s(x)}$ என்பன இரு விகிதமுறு கோவைகள் எனில், அவற்றின் வகுத்தல் $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x)}{q(x).r(x)}$
- இரு விகிதமுறு கோவைகளின் மீ.பொ.ம வைப் பயன்படுத்தி அவற்றின் கூட்டல் அல்லது கழித்தல் ஆகியவற்றின் சுருக்கப்பட்ட வடிவத்தைப் பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு

3.15 (i) $\frac{x^3}{9y^2}$ - ஐ $\frac{27y}{x^5}$ ஆல் பெருக்குக.

(ii) $\frac{x^4b^2}{x-1}$ - ஐ $\frac{x^2-1}{a^4b^3}$ ஆல் பெருக்குக.

தீர்வு:

(i) $\frac{x^3}{9y^2} \times \frac{27y}{x^5} = \frac{3}{x^2y}$

(ii) $\frac{x^4b^2}{x-1} \times \frac{x^2-1}{a^4b^3} = \frac{x^4 \times b^2}{x-1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{a^4 \times b^3}$

$= \frac{x^4(x+1)}{a^4b}$

3.16. பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\frac{14x^4}{y} \div \frac{7x}{3y^4}$

(ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4}$

(iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$

தீர்வு:

(i) $\frac{14x^4}{y} \div \frac{7x}{3y^4} = \frac{14x^4}{y} \times \frac{3y^4}{7x} = 6x^3y^3$

(ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)} \times \left(\frac{x+4}{x-4}\right)$

$= x + 4$

(iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$

$= \frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \times \frac{3x^2-11x-4}{8x^2+11x+3}$

$= \frac{(8x+3)(2x-1)}{(3x+1)(x-1)} \times \frac{(3x+1)(x-4)}{(8x+3)(x+1)}$

$= \frac{(2x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-9x+4}{x^2-1}$

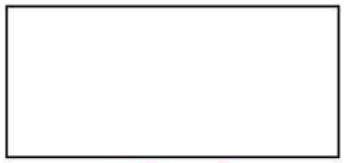
முன்னேற்றச் சோதனை

1. பின்வரும் படங்களில் விடுபட்ட கோவையைக் காண்க.

பரப்பு $= \frac{(x-4)(x+3)}{3x-12}$ கி.மீ^{2} அகலம் = ?

நீளம் $= \frac{x-3}{3}$ கி.மீ

விடை:



செவ்வகம்

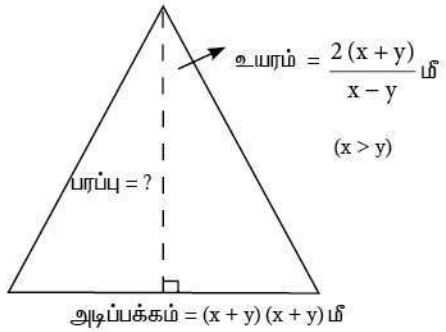
அகலம் $=$ $\frac{\text{பரப்பு}}{\text{நீளம்}}$

$= \frac{(x-4)(x+3)}{\frac{(3x-12)}{\frac{x-3}{3}}}$

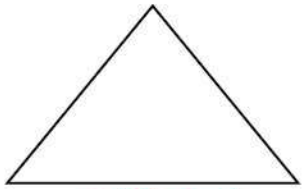
$= \frac{(x-4)(x+3)}{3(x-4)} \times \frac{3}{(x-3)}$

$= \frac{x+3}{x-3}$

2.



விடை:



முக்கோணம்

உயரம் h $= \frac{2(x+y)}{x-y}$ மீ

அடிப்பக்கம் b = (x + y) (x – y) மீ

பரப்பு = 1/2 bh

$= \frac{1}{2}(x+y)(x-y)\frac{2(x+y)}{x-y}$

$= (x+y)^2$ மீ^{2}

பயிற்சி 3.5

1. சுருக்குக.

(i) $\frac{4x^2y}{2z^2} \times \frac{6xz^3}{20y^4}$

(ii) $\frac{p^2-10p+21}{p-7} \times \frac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$

(iii) $\frac{5t^3}{4t-8} \times \frac{6t-12}{10t}$

தீர்வு:

(i) $\frac{4x^2y}{2z^2} \times \frac{6xz^3}{20y^4} = \frac{3x^3z}{5y^3}$

(ii) $\frac{p^2-10p+21}{p-7} \times \frac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$

$= \frac{(p-7)(p-3)}{(p-7)} \times \frac{(p+4)(p-3)}{(p-3)^2}$

$= p + 4$

(iii) $\frac{5t^3}{4t-8} \times \frac{6t-12}{10t} = \frac{5t^3}{4(t-2)} \times \frac{6(t-2)}{10t} = \frac{3}{4}t^2$

2. சுருக்குக.

(i) $\frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$

(ii) $\frac{x^3-y^3}{3x^2+9xy+6y^2} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

தீர்வு:

(i) $\frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$

$= \frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{(3x)^2-(4y)^2}{2x^2+8x-5x-20}$

$= \frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{(3x+4y)(3x-4y)}{(2x-5)(x+4)}$

$= \frac{3x-4y}{2x-5}$

(ii) $\frac{x^3-y^3}{3x^2+9xy+6y^2} \times \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(3x+6y)(x+y)} \times \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$

$= \frac{x^2+xy+y^2}{3x+6y}$

$= \frac{x^2+xy+y^2}{3(x+2y)}$

3. சுருக்குக.

(i) $\frac{2a^2+5a+3}{2a^2+7a+6} \div \frac{a^2+6a+5}{-5a^2-35a-50}$

(ii) $\frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \div \frac{b^2-49}{b^2-5b-14}$

(iii) $\frac{x+2}{4y} \div \frac{x^2-x-6}{12y^2}$

(iv) $\frac{12t^2-22t+8}{3t} \div \frac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$

தீர்வு:

(i) $\frac{2a^2+5a+3}{2a^2+7a+6} \div \frac{a^2+6a+5}{-5a^2-35a-50}$

$= \frac{2a^2+5a+3}{2a^2+7a+6} \times \frac{-5(a^2+7a+10)}{a^2+6a+5}$

$= \frac{(2a+3)(a+1)}{(2a+3)(a+2)} \times \frac{-5(a+5)(a+2)}{(a+5)(a+1)}$

$= -5$

(ii) $\frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \div \frac{b^2-49}{b^2-5b-14}$

$= \frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \times \frac{b^2-5b-14}{b^2-49}$

$= \frac{(b+7)(b-4)}{(b+2)^2} \times \frac{(b-7)(b+2)}{(b-7)(b+7)}$

$= \frac{b-4}{b+2}$

(iii) $\frac{x+2}{4y} \div \frac{x^2-x-6}{12y^2}$

$= \frac{x+2}{4y} \times \frac{12y^2}{x^2-x-6}$

$= \frac{x+2}{4y} \times \frac{12y^2}{(x-3)(x+2)}$

$$= \frac{3y}{x-3}$$

(iv) $\dfrac{12t^2-22t+8}{3t} \div \dfrac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$

$$= \frac{2(6t^2-11t+4)}{3t} \times \frac{2t(t+2)}{3t^2+2t-8}$$

$$= \frac{2(3t-4)(2t-1)}{3t} \times \frac{2t(t+2)}{(3t-4)(t+2)}$$

$$= \frac{4(2t-1)}{3}$$

4. $x = \dfrac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$ மற்றும் $y = \dfrac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4}$ எனில், x^2y^{-2} -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

கொ.ப: $x = \dfrac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$

$$= \frac{(a+4)(a-1)}{3(a^2-1)}$$

$$= \frac{(a+4)(a-1)}{3(a+1)(a-1)} = \frac{a+4}{3(a+1)}$$

$y = \dfrac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4} = \dfrac{(a+4)(a-2)}{2(a^2-a-2)}$

$$= \frac{(a+4)(a-2)}{2(a-2)(a+1)}$$

$$= \frac{(a+4)}{2(a+1)}$$

இப்போது, $x^2y^{-2} = \left(\dfrac{(a+4)}{3(a+1)}\right)^2 \times \left(\dfrac{a+4}{2(a+1)}\right)^{-2}$

$$= \left(\frac{a+4}{3(a+1)}\right)^2 \times \left(\frac{2(a+1)}{(a+4)}\right)^2$$

$$= \frac{(a+4)^2}{9(a+1)^2} \times \frac{4(a+1)^2}{(a+4)^2} = \frac{4}{9}$$

5. $p(x) = x^2 - 5x - 14$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க $\dfrac{x-7}{x+2}$ எனும் விடை கிடைக்கிறது எனில், $q(x)$- ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$p(x) = x^2 - 5x - 14$

$p(x) \div q(x) = \dfrac{x-7}{x+2}$

$(x^2-5x-14) \div q(x) = \dfrac{x-7}{x+2}$

$\therefore q(x) = (x^2-5x-14) \times \dfrac{(x+2)}{(x-7)}$

$$= (x-7)(x+2) \times \frac{(x+2)}{(x-7)}$$

$$= (x+2)^2$$

$q(x) = x^2 + 4x + 4$

விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல்

எடுத்துக்காட்டு

3.17 $\dfrac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28} - \dfrac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$ ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28} - \frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$$

$$= \frac{(x^2+20x+36)-(x^2+12x+4)}{x^2-3x-28}$$

$$= \frac{8x+32}{x^2-3x-28} = \frac{8(x+4)}{(x-7)(x+4)} = \frac{8}{x-7}$$

3.18. சுருக்குக:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-8x+15}$$

தீர்வு:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-8x+15}$$

$$= \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)} - \frac{1}{(x-5)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-5)+(x-3)(x-5)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{(x^2-6x+5)+(x^2-8x+15)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

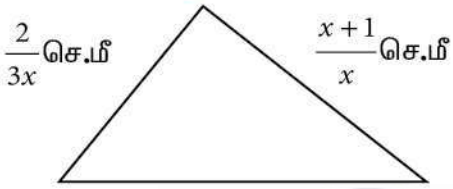
$$= \frac{x^2-11x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-9)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{(x-9)}{(x-1)(x-3)(x-5)}$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. முக்கோணத்தின் சுற்றளவுக்கான விகிதமுறு கோவையை எழுதிச் சுருக்குக.



விடை:

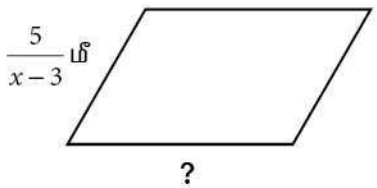
சுற்றளவு $= \frac{2}{3x}+\frac{x+1}{x}+\frac{6}{x^2}$

$= \frac{2(x)+(x+1)3x+6(3)}{3x^2}$

$= \frac{2x+3x^2+3x+18}{3x^2}$

$= \frac{3x^2+5x+18}{3x^2}$

2. சுற்றளவு $\frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$ ஆக உள்ள இணைகரத்தின் அடிப்பக்கம் காண்க.



விடை:

சுற்றளவு $= \frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$

$2(l+b) = \frac{4x^2+10x-50}{(x-3)(x+5)}$

$2\left(\frac{5}{x-3}+b\right) = \frac{2(2x-5)(x+5)}{(x-3)(x+5)}$

$b = \frac{2x-5}{x-3}-\frac{5}{x-3}$

$= \frac{2x-5-5}{x-3} = \frac{2x-10}{x-3}$

சிந்தனைக்களம்

சரியா தவறா எனக் கூறுக.

1. இரு விகிதமுறு கோவைகளின் கூடுதல் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு கோவையே.

விடை: சரி

2. இரு விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் எப்பொழுதும் ஒரு விகிதமுறு கோவையே.

விடை: சரி

பயிற்சி 3.6

1. கூட்டுக:

(i) $\frac{x(x+1)}{x-2}+\frac{x(1-x)}{x-2}$

(ii) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2}$

(iii) $\frac{x^3}{x-y}+\frac{y^3}{y-x}$

தீர்வு:

(i) $\frac{x(x+1)}{x-2}+\frac{x(1-x)}{x-2}$

$= \frac{x(x+1)+x(1-x)}{x-2}$

$= \frac{x[x+1+1-x]}{x-2}$

$= \frac{x(2)}{x-2} = \frac{2x}{x-2}$

(ii) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2}$

$= \frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}$

$= \frac{x^2-4+x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)}$

$= \frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}$

(iii) $\frac{x^3}{x-y}+\frac{y^3}{x-y}$

$$=\frac{x^3}{x-y}-\frac{y^3}{x-y}$$
$$=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}$$
$$=x^2+xy+y^2$$

2. கழிக்க

(i) $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4}-\frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$

(ii) $\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}$

தீர்வு:

(i) $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4}-\frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$

$$=\frac{(2x+1)(x-2)-(2x-1)(x-2)}{x-4}$$
$$=\frac{(x-2)(2x+1-2x+1)}{x-4}$$
$$=\frac{(x-2)(2)}{x-4}$$
$$=\frac{2(x-2)}{x-4}$$

(ii) $\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}$

$$=\frac{4x}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+1}{x-1}$$
$$=\frac{4x-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{4x-(x^2+2x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{4x-x^2-2x-1}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{-x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)}$$
$$=-\frac{(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=-\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=-\frac{(x-1)}{x+1}=\frac{1-x}{1+x}$$

3. $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$ **-லிருந்து** $\frac{1}{x^2+2}$ **-ஐக் கழிக்க.**

தீர்வு:

$$\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}-\frac{1}{x^2+2}=\frac{2x^3+x^2+3-(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{2x^3+x^2+3-x^2-2}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$$

4. $\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ **-லிருந்து எந்த விகிதிமுறு கோவையைக் கழித்தால்** $\frac{3}{x^2-2x+4}$ **என்ற கோவை கிடைக்கும்?**

தீர்வு:

$$\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}-f(x)=\frac{3}{x^2-2x+4}$$
$$\therefore f(x)=\frac{x^2+6x+8}{x^3+2^3}-\frac{3}{x^2-2x+4}$$
$$=\frac{(x+4)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}-\frac{3}{(x^2-2x+4)}$$
$$=\frac{x+4-3}{(x^2-2x+4)}=\frac{x+1}{x^2-2x+4}$$

5. $A=\frac{2x+1}{2x-1}$ **மற்றும்** $B=\frac{2x-1}{2x+1}$ **எனில்,** $\frac{1}{A-B}-\frac{2B}{A^2-B^2}$ **காண்க.**

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டது: $A=\frac{2x+1}{2x-1}$, $B=\frac{2x-1}{2x+1}$

கண்டறிய வேண்டியது, $\frac{1}{A-B}-\frac{2B}{A^2-B^2}$

$$\frac{1}{A-B}-\frac{2B}{A^2-B^2}=\frac{1}{A-B}-\frac{2B}{(A+B)(A-B)}$$
$$=\frac{A+B-2B}{(A+B)(A-B)}$$
$$=\frac{A-B}{(A+B)(A-B)}=\frac{1}{A+B}$$

இப்போது, $A + B = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1}$

$= \frac{(2x+1)^2 + (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}$

$= \frac{4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1}$

$A + B = \frac{8x^2 + 2}{4x^2 - 1} = \frac{2(4x^2 + 1)}{4x^2 - 1}$

$\therefore \frac{1}{A-B} - \frac{2B}{A^2 - B^2} = \frac{1}{A+B} = \frac{4x^2 - 1}{2(4x^2 + 1)}$

6. $A = \frac{x}{x+1}$ மற்றும் $B = \frac{1}{x+1}$ எனில்,

$\frac{(A+B)^2 + (A-B)^2}{A \div B} = \frac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு:

கொ.ப: $A = \frac{x}{x+1}$, $B = \frac{1}{x+1}$

நிரூபிக்க வேண்டியது :

$\frac{(A+B)^2 + (A-B)^2}{A \div B} = \frac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$

$\frac{(A+B)^2 + (A-B)^2}{A \div B} = \frac{A^2 + 2AB + B^2 + A^2 - 2AB + B^2}{A / B}$

$= \frac{2A^2 + 2B^2}{A / B}$

$= 2\frac{B}{A}(A^2 + B^2)$

இப்போது, $A^2 + B^2 = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

$= \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$

$\therefore 2\frac{B}{A}(A^2 + B^2) = 2\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}\left[\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right]$

$= 2\frac{(x^2+1)}{x(x+1)^2}$ நிறுவப்பட்டது.

7. ஒரு வேலையை 4மணி நேரத்தில் பாரி செய்கிறார். யுவன் அதே வேலையை 6 மணி நேரத்தில் செய்கிறார் எனில் இருவரும் சேர்ந்து அந்த வேலையைச் செய்து முடிக்க எத்தனை மணி நேரமாகும்?

தீர்வு:

'x' என்பது செய்த வேலையைக் குறிக்கும்.

பாரிக்கு 4 மணி நேரங்களும், யுவனுக்கு 6 மணி நேரங்களும் தேவைப்படுகிறது.

பாரி 1 மணி நேரத்தில் செய்த வேலை

$= \frac{1}{4}$ of $x = \frac{x}{4}$

யுவன் 1 மணி நேரத்தில் செய்த வேலை

$= \frac{1}{6}$ of $x = \frac{x}{6}$

$\therefore$ இருவரும் சேர்ந்து செய்த வேலை

$= \frac{x}{4} + \frac{x}{6}$

$= \frac{3x + 2x}{12} = \frac{5x}{12} = \frac{5}{12}$ of x

$\therefore$ இருவரும் சேர்ந்து வேலையை முடிக்க ஆகும் நேரம் $= \frac{12}{5}$மணி $= \frac{12}{5} \times 60 = 2$ மணி 24 நிமிடங்கள்

8. இனியா 50 கி.கி எடையுள்ள ஆப்பிள்கள் மற்றும் வாழைப்பழங்கள் வாங்கினார். ஒரு கிலோகிராமுக்கு ஆப்பிள்களின் விலை வாழைப்பழங்களின் விலையைப் போல இருமடங்கு ஆகும். வாங்கப்பட்ட ஆப்பிள்களின் விலை ₹ 1800 மற்றும் வாழைப்பழங்களின் விலை ₹ 600 எனில், இனியா வாங்கிய இருவகை பழங்களின் எடையைக் கிலோகிராமில் காண்க.

தீர்வு:

ஆப்பிள்களின் எடை 'x' கி.கி என்க.

வாழைப்பழங்களின் எடை 'y' கி.கி என்க.

கொ.ப.: $x + y = 50$ ... (1)

$\frac{1800}{x} = 2\left(\frac{600}{y}\right) \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{y}$

$3y = 2x$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}y$ ... (2)

(1) –ல் பிரதியிட,

$\frac{3}{2}y + y = 50$

$5y = 100$

$y = \frac{100}{5} = 20$

(2) –ல் பிரதியிட,

$x = \frac{3}{2}(20) = 30$

$\therefore$ இனியா, 30 கி.கி ஆப்பிள்களையும், 20 கி.கி வாழைப் பழங்களையும் வாங்கியுள்ளார்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் வர்க்கமூலம்

நினைவில் கொள்க

- ஓர் எண்ணின் வர்க்கமூலம் என்பது எந்த ஓர் எண்ணை இருமுறை பெருக்கினால் கொடுக்கப்பட்ட எண் வருமோ, அந்த எண் ஆகும்.
- $P(x)$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் $Q(x)$ எனில், $Q(x).Q(x) = P(x)$ என்பதாகும்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் என்பது காரணிப்படுத்துதல் மற்றும் வகுத்தல் முறையின் முலம் கண்டறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

3.19. கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $256\,(x-a)^8\,(x-b)^4\,(x-c)^{16}\,(x-d)^{20}$

(ii) $\dfrac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}$

தீர்வு :

(i) $\sqrt{256\,(x-a)^8\,(x-b)^4\,(x-c)^{16}\,(x-d)^{20}}$

$= 16|(x-a)^4\,(x-b)^2\,(x-c)^8\,(x-d)^{10}|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}} = \dfrac{4}{3}\left|\dfrac{a^4b^6c^8}{f^6g^2h^7}\right|$

3.20. கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 24x - 18y + 9$

(ii) $(6x^2 + x - 1)\,(3x^2 + 2x - 1)\,(2x^2 + 3x + 1)$

(iii) $\left[\sqrt{15}x^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{10})x + \sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2 + (2\sqrt{5}+1)x + 2\right]\left[\sqrt{3}x^2 + (\sqrt{2}+2\sqrt{3})x + 2\sqrt{2}\right]$

தீர்வு :

(i) $\sqrt{16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9}$

$= \sqrt{(4x)^2+(-3y)^2+(3)^2+2(4x)(-3y)+2(-3y)(3)+2(4x)(3)}$

$= \sqrt{(4x-3y+3)^2}$

$= |4x - 3y + 3|$

(ii) $\sqrt{(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)}$

$= \sqrt{(3x-1)(2x+1)(3x-1)(x+1)(2x+1)(x+1)}$

$= |(3x-1)\,(2x+1)\,(x+1)|$

(iii) முதலில் கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்பு கோவையைக் காரணிப்படுத்தலாம்.

$\sqrt{15}x^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x + \sqrt{2}$

$= \sqrt{15}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{10}x + \sqrt{2}$

$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{5}x+1\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{5}x+1\right)$

$= \left(\sqrt{5}x+1\right)\times\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$

$\sqrt{5}x^2 + \left(2\sqrt{5}+1\right)x + 2 = \sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{5}x + x + 2$

$= \sqrt{5}x(x+2) + 1(x+2)$

$= \left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)$

$\left[\sqrt{3}x^2 + \left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{2}\right]$

$= \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}$

$= x\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right) + 2\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$

$= (x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$

எனவே,

$\sqrt{\left[\sqrt{15}x^2 + \left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)x + \sqrt{2}\right]\left[\sqrt{5}x^2 + \left(2\sqrt{5}+1\right)x + 2\right]\left[\sqrt{3}x^2 + \left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{2}\right]}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}x+1\right)(x+2)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)}$

$= \left|\left(\sqrt{5}x+1\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)(x+2)\right|$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. $x^2 + 4x + 4$ என்பது ஒரு முழுவர்க்கமாகுமா?

விடை: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ என்பது ஒரு முழு வர்க்கம்.

2. $3\sqrt{x} = 9$ எனில் x-யின் மதிப்பு என்ன?

விடை: $3\sqrt{x} = 9$; $\sqrt{x} = 9/3 = 3$; $x = 9$

3. $361x^4y^2$ -யின் வர்க்க மூலம் _____.

விடை: $361\ x^4y^2$ ன் வர்க்க மூலம் $= |19\ x^2y|$

4. $\sqrt{a^2x^2+2abx+b^2}$ = _____.

விடை: $\sqrt{a^2x^2+2abx+b^2} = (ax+b)^2 = |ax+b|$

5. பல்லுறுப்பு கோவையானது முழுவர்க்கம் எனில், அதன் காரணிகள் _____ எண்ணிக்கையில் இடம்பெறும். (ஒற்றைப்படை/இரட்டைப்படை)

விடை: இரட்டைப்படை

பயிற்சி 3.7

1. பின்வருவனவற்றின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$

(ii) $\frac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$

(iii) $\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

தீர்வு:

(i) $\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$ ன் வர்க்கமூலம்

$$= \sqrt{\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}} = \sqrt{\frac{4y^8z^{12}}{x^4}}$$

$$= 2\left|\frac{y^4z^6}{x^2}\right|$$

(ii) $\frac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$

$$= \sqrt{\frac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}}$$

$7x^2+2\sqrt{14}x+2$

$$= 7x^2+\sqrt{14}x+\sqrt{14}x+2$$
$$= \sqrt{7}\sqrt{7}x^2+\sqrt{2}\sqrt{7}x+\sqrt{2}\sqrt{7}x+\sqrt{2}\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{7}x(\sqrt{7}x+\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{7}x+\sqrt{2})$$
$$= \left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)$$
$$= \left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)^2$$

$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

$$= x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$$
$$= x\left(x-\frac{1}{4}\right)-1/4\left(x-\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(x-\frac{1}{4}\right)^2$$

$\therefore \sqrt{\frac{7x^2+2\sqrt{14}x+2}{x^2-1/2\,x+\frac{1}{16}}}$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)^2}{(x-1/4)^2}}$$
$$= \sqrt{16\frac{\left(\sqrt{7}x+\sqrt{2}\right)^2}{(4x-1)^2}}$$
$$= 4\left|\frac{\sqrt{7}x+\sqrt{2}}{4x-1}\right|$$

(iii) $\frac{121\,(a+b)^8\,(x+y)^8\,(b-c)^8}{81\,(b-c)^4\,(a-b)^{12}\,(b-c)^4}$ ன் வர்க்கமூலம்

$$= \sqrt{\frac{121\,(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81\,(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{121\,(a+b)^8\,(x+y)^8}{81\,(a-b)^{12}}}$$
$$= \frac{11}{9}\left|\frac{(a+b)^4(x+y)^4}{(a-b)^6}\right|$$

2. கீழ்க்காணும் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க

(i) $4x^2 + 20x + 25$

(ii) $9x^2 - 24xy + 30xz - 40yz + 25z^2 + 16y^2$

(iii) $1+\frac{1}{x^6}+\frac{2}{x^3}$

(iv) $(4x^2 - 9x + 2)\,(7x^2 - 13x - 2)\,(28x^2 - 3x - 1)$

(v) $\left(2x^2+\frac{17}{6}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+4x+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x+2\right)$

தீர்வு:

(i) $4x^2 + 20x + 25$ ன் வர்க்கமூலம்

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} = \sqrt{4x^2 + 10x + 10x + 25}$$
$$= \sqrt{2x(2x + 5) + 5(2x + 5)}$$
$$= \sqrt{(2x + 5)(2x + 5)}$$
$$= \sqrt{(2x + 5)^2}$$
$$\therefore \sqrt{4x^2 + 20x + 25} = |2x + 5|$$

(ii) $9x^2 - 24xy + 30xz - 40yz + 25z^2 + 16y^2$ ன் வர்க்கமூலம்

உறுப்புகளை மாற்றி அமைக்க

$$9x^2 + 16y^2 + 25z^2 - 24xy - 40yz + 30xz$$
$$= (3x)^2 + (-4y)^2 + (5z)^2 + 2(3x)(-4y) + 2(-4y)(5z) + 2(3x)(5z)$$
$$= (3x - 4y + 5z)^2$$
$$\therefore \sqrt{9x^2 - 24xy + 30xz - 40yz + 25z^2 + 16y^2}$$
$$= \sqrt{(3x - 4y + 5z)^2}$$
$$= |3x - 4y + 5z|$$

(iii) $1 + \frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^3}$ ன் வர்க்க மூலம்

இப்போது $\sqrt{1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}} = \sqrt{(1)^2 + 2\left(\frac{1}{x^3}\right) + \left(\frac{1}{x^3}\right)^2}$

$$\therefore \sqrt{1 + \frac{1}{x^6} + \frac{2}{x^3}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2}$$
$$= \left|\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)\right|$$

(iv) $(4x^2 - 9x + 2)(7x^2 - 13x - 2)(28x^2 - 3x - 1)$ ன் வர்க்கமூலம்

$$4x^2 - 9x + 2 = 4x^2 - 8x - x + 2$$
$$= 4x(x - 2) - 1(x - 2)$$
$$= (4x - 1)(x - 2)$$
$$7x^2 - 13x - 2 = 7x^2 - 14x + x - 2$$
$$= 7x(x - 2) + 1(x - 2)$$
$$= (7x + 1)(x - 2)$$
$$28x^2 - 3x - 1 = 28x^2 - 7x + 4x - 1$$
$$= 7x(4x - 1) + 1(4x - 1)$$
$$= (7x + 1)(4x - 1)$$
$$\therefore \sqrt{(4x^2 - 9x + 2)(7x^2 - 13x - 2)(28x^2 - 3x - 1)}$$
$$= \sqrt{(4x - 1)(x - 2)(7x + 1)(x - 2)(7x + 1)(4x - 1)}$$
$$= \sqrt{(4x - 1)^2 (x - 2)^2 (7x + 1)^2}$$
$$= |(4x - 1)(x - 2)(7x + 1)|$$

(v) $\left(2x^2 + \frac{17}{6}x + 1\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + 4x + 2\right)\left(\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 2\right)$ -ன் வர்க்கமூலம்

$$2x^2 + \frac{17}{6}x + 1 = \frac{12x^2 + 17x + 6}{6}$$
$$= \frac{12x^2 + 9x + 8x + 6}{6}$$
$$= \frac{3x(4x + 3) + 2(4x + 3)}{6}$$
$$= \frac{(4x + 3)(3x + 2)}{6}$$

$$\frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 = \frac{3x^2 + 8x + 4}{2}$$
$$= \frac{3x^2 + 6x + 2x + 4}{2}$$
$$= \frac{3x(x + 2) + 2(x + 2)}{2}$$
$$= \frac{(x + 2)(3x + 2)}{2}$$

$$\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 2 = \frac{4x^2 + 11x + 6}{3}$$
$$= \frac{4x^2 + 8x + 3x + 6}{3}$$
$$= \frac{4x(x + 2) + 3(x + 2)}{3}$$
$$= \frac{(x + 2)(4x + 3)}{3}$$

$$\therefore \sqrt{\left(2x^2 + \frac{17}{6}x + 1\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + 4x + 2\right)\left(\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 2\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{(4x + 3)(3x + 2)}{6} \cdot \frac{(x + 2)(3x + 2)}{2} \cdot \frac{(x + 2)(4x + 3)}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{(4x + 3)^2 (x + 2)^2 (3x + 2)^2}{36}}$$
$$= \frac{1}{6}\left|(4x + 3)(x + 2)(3x + 2)\right|$$

வகுத்தல் முறையில் கோவையின் வர்க்கமூலம் காணல்

எடுத்துக்காட்டு

3.21. $64x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 2x + 1$ என்பதின் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

$8x^2 - x + 1$

$8x^2$ | $64x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 2x + 1$

$64x^4$ (–)

$16x^2 - x$ | $-16x^3 + 17x^2$

$-16x^3 + x^2$ (–)

$16x^2 - 2x + 1$ | $16x^2 - 2x + 1$

$16x^2 - 2x + 1$ (–)

0

எனவே, $\sqrt{64x^4 - 16x^3 + 17x^2 - 2x + 1} = |8x^2 - x + 1|$

3.22. $4\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} + 13 - 30\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

$2\frac{x}{y} + 5 - 3\frac{y}{x}$

$2\frac{x}{y}$ | $4\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} + 13 - 30\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$

$\frac{4x^2}{y^2}$ (–)

$4\frac{x}{y} + 5$ | $20\frac{x}{y} + 13$

$20\frac{x}{y} + 25$ (–)

$4\frac{x}{y} + 10 - \frac{3y}{x}$ | $-12 - 30\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$ (–)

$-12 - 30\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$

0

எனவே, $\sqrt{4\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} + 13 - 30\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}} = \left|2\frac{x}{y} + 5 - 3\frac{y}{x}\right|$

3.23. $9x^4 + 12x^3 + 28x^2 + ax + b$ ஆனது ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$3x^2 + 2x + 4$

$3x^2$ | $9x^4 + 12x^3 + 28x^2 + ax + b$

$9x^4$ (–)

$6x^2 + 2x$ | $12x^3 + 28x^2$

$12x^3 + 4x^2$ (–)

$6x^2 + 4x + 4$ | $24x^2 + ax + b$

$24x^2 + 16x + 16$ (–)

0

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரு முழு வர்க்கம் என்பதால், $a - 16 = 0$, $b - 16 = 0$

எனவே, $a = 16$, $b = 16$.

பயிற்சி 3.8

1. வகுத்தல் முறையில் பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$

(ii) $4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9$

(iii) $16x^4 + 8x^2 + 1$

(iv) $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$

தீர்வு :

(i) $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$

$x^2 - 6x + 3$

x^2 | $x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9$

x^4 (–)

$2x^2 - 6x$ | $-12x^3 + 42x^2$

$-12x^3 + 36x^2$ (–)

$2x^2 - 12x + 3$ | $6x^2 - 36x + 9$

$6x^2 - 36x + 9$ (–)

0

$\therefore \sqrt{x^4 - 12x^3 + 42x^2 - 36x + 9} = |x^2 - 6x + 3|$

(ii) $4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9$

$2x^2 - 7x - 3$

$2x^2$ | $4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9$
$4x^4$ (–)

$4x^2 - 7x$ | $-28x^3 + 37x^2$
$-28x^3 + 49x^2$ (–)

$4x^2 - 14x - 3$ | $-12x^2 + 42x + 9$
$-12x^2 + 42x + 9$ (–)

0

$\therefore \quad \sqrt{4x^4 - 28x^3 + 37x^2 + 42x + 9} = |2x^2 - 7x - 3|$

(iii) $16x^4 + 8x^2 + 1$

$4x^2 + 1$

$4x^2$ | $16x^4 + 8x^2 + 1$
$16x^4$ (–)

$8x^2 + 1$ | $8x^2 + 1$
$8x^2 + 1$ (–)

0

$\therefore \quad \sqrt{16x^4 + 8x^2 + 1} = |4x^2 + 1|$

(iv) $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$

$11x^2 - 9x - 12$

$11x^2$ | $121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144$
$121x^4$ (–)

$22x^2 - 9x$ | $-198x^3 - 183x^2$
$-198x^3 + 81x^2$ (–)

$22x^2 - 18x - 12$ | $-264x^2 + 216x + 144$
$-264x^2 + 216x + 144$ (–)

0

$\therefore \quad \sqrt{121x^4 - 198x^3 - 183x^2 + 216x + 144} = |11x^2 - 9x - 12|$

2. $\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 27 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ **என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் காண்க.**

தீர்வு :

$\frac{x}{y} - 5 + \frac{y}{x}$

$\frac{x}{y}$ | $\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 27 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$
$\frac{4x^2}{y^2}$ (–)

$2\frac{x}{y} - 5$ | $-10\frac{x}{y} + 27$
$-10\frac{x}{y} + 25$ (–)

$2\frac{x}{y} - 10 + \frac{y}{x}$ | $2 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$
$2 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ (–)

0

$\therefore \quad \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 27 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}} = \left|\frac{x}{y} - 5 + \frac{y}{x}\right|$

3. பின்வருபவை முழு வர்க்கப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் எனில், a மற்றும் b - யின் மதிப்பு காண்க.

(i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + bx + a$

(ii) $ax^4 + bx^3 + 361x^2 + 220x + 100$

தீர்வு :

(i)

$2x^2 - 3x + 7$

$2x^2$ | $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + bx + a$
$4x^4$ (–)

$4x^2 - 3x$ | $-12x^3 + 37x^2$
$-12x^3 + 9x^2$ (–)

$4x^2 - 6x + 7$ | $28x^2 + bx + a$
$28x^2 - 42x + 49$ (–)

0

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒரு முழு வர்க்கமாதலால்,

$b + 42 = 0, \; a - 49 = 0$

$\therefore \quad a = 49, \; b = -42$

(ii) $ax^4 + bx^3 + 361x^2 + 220x + 100$ என்பதை மாற்றி எழுத

$100 + 220x + 361x^2 + bx^3 + ax^4$

இப்போது, வர்க்கமூலம் காண

$10 + 11x + 12x^2$

10	$100 + 220x + 361x^2 + bx^3 + ax^4$
	100 (–)
$20 + 11x$	$220x + 361x^2$
	$220x + 121x^2$ (–)
$20 + 22x + 12x^2$	$240x^2 + bx^3 + ax^4$
	$240x^2 + 264x^3 + 144x^4$ (–)
	$(b - 26)x^3 + (a - 144)x^4$

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை முழு வர்க்கமாதலால்,

$b - 264 = 0, a - 144 = 0$

$\therefore$ $a = 144, b = 264$

4. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழுவர்க்கங்கள் எனில், m மற்றும் n -யின் மதிப்பு காண்க.

(i) $\frac{1}{x^4} - \frac{6}{x^3} + \frac{13}{x^2} + \frac{m}{x} + n$

(ii) $x^4 - 8x^3 + mx^2 + nx + 16$

தீர்வு :

(i)

$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$

$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^4} - \frac{6}{x^3} + \frac{13}{x^2} + \frac{m}{x} + n$
	$\frac{1}{x^4}$ (–)
$\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$	$-\frac{6}{x^3} + \frac{13}{x^2}$
	$-\frac{6}{x^3} + \frac{9}{x^2}$ (–)
$\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x} + 2$	$\frac{4}{x^2} + \frac{m}{x} + n$
	$\frac{4}{x^2} - \frac{12}{x} + 4$ (–)
	$(m + 12)\frac{1}{x} + (n - 4)$

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை முழு வர்க்கமாதலால்,

$m + 12 = 0 \qquad n - 4 = 0$

$\therefore$ $m = -12 \quad ; \quad n = 4$

(ii)

$x^2 - 4x + \left(\frac{m-16}{2}\right)$

x^2	$x^4 - 8x^3 + mx^2 + nx + 16$
	x^4 (–)
$2x^2 - 4x$	$-8x^3 + mx^2$
	$-8x^3 + 16x^2$ (–)
$2x^2 - 8x + \left(\frac{m-16}{2}\right)$	$(m - 16)x^2 + nx + 16$
	$(m - 16)x^2 - 4(m - 16)x + \left(\frac{m-16}{2}\right)^2$ (–)
	$[n + 4(m - 16)]x + 16 - \left(\frac{m-16}{2}\right)^2$

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை முழு வர்க்கமாதலால்,

$n + 4(m - 16) = 0$

மற்றும் $16 - \frac{(m-16)^2}{4} = 0$

$\therefore$ $64 - (m - 16)^2 = 0$

$(m - 16)^2 = 64$

$m - 16 = 8$

$m = 8 + 16 = 24$

$m = 24$

$\therefore$ $n + 4(24 - 16) = 0$

$n + 4(8) = 0$

$n + 32 = 0$

$n = -32$

$\therefore$ $m = 24, n = -32$

இருபடிச் சமன்பாடுகள்

நினைவில் கொள்க

- படி 2 ஐக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையை இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை என்கிறோம். மேலும் இது $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ எனும் வடிவிலுள்ளது. இதில் a, b, c என்பன மெய்யெண்கள்.
- $ax^2 + bx + c$ என்பதை பூச்சியமாக்கும் 'x' ன் மதிப்புகள் $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனப்படும்.
- α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில் $\alpha + \beta = -b/a$ மற்றும் $\alpha\beta = c/a$
- மூலங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $x^2 - ($மூலங்களின் கூடுதல்$)\, x +$ மூலங்களின் பெருக்கல் $= 0$.
- $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதை $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ எனவும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

3.24. $x^2 + 8x + 12$ என்ற இருபடி கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$p(x) = x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$

$p(-2) = 4 - 16 + 12 = 0$

$p(-6) = 36 - 48 + 12 = 0$

எனவே, $p(x) = x^2 + 8x + 12$ -யின் பூச்சியங்கள் -2 மற்றும் -6 ஆகும்.

3.25. மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் கீழ்க்காணுமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனில், அவற்றுக்குத் தகுந்த இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிக.

(i) 9, 14 (ii) $-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$

(iii) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$

தீர்வு :

(i) மூலங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், இருபடிச்சமன்பாட்டின் பொதுவடிவம்

$x^2 - ($மூலங்களின் கூடுதல்$)\, x +$ மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= 0$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

(ii) $x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0$

(iii) $x^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{10x^2 + 6x - 5}{10} = 0$

இதிலிருந்து, $10x^2 + 6x - 5 = 0$

3.26. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச்சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$ (ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$

தீர்வு :

α மற்றும் β என்பன கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

(i) $x^2 + 8x - 65 = 0$

$\alpha + \beta = -8$ மற்றும்

$\alpha\beta = -65$

(ii) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

$\alpha + \beta = -\frac{5}{2}$ மற்றும்

$\alpha\beta = \frac{7}{2}$

(iii) $kx^2 - k^2x - 2k^3 = 0$ இங்கு,

$a = k,\ b = -k^2\ \ c = -2k^3$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-k^2)}{k} = k$

மற்றும் $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$= \frac{-2k^3}{k} = -2k^2$

பயிற்சி 3.9

1. மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $-9, 20$ (ii) $\frac{5}{3}, 4$

(iii) $\frac{-3}{2}, -1$ (iv) $-(2-a)^2, (a+5)^2$

தீர்வு :

(i) மூலங்களின் கூடுதல் = – 9
மூலங்களின் பெருக்கல் = 20
இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்
x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் = 0
$x^2 + 9x + 20 = 0$

(ii) மூலங்களின் கூடுதல் = 5/3
மூலங்களின் பெருக்கல் = 4
இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்
x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் = 0
$\therefore x^2 - 5/3\, x + 4 = 0$
$3x^2 - 5x + 12 = 0$

(iii) மூலங்களின் கூடுதல் = – 3/2
மூலங்களின் பெருக்கல் = – 1
இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்
x^2 (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் = 0
$x^2 + 3/2\, x - 1 = 0$
$2x^2 + 3x - 2 = 0$

(iv) மூலங்களின் கூடுதல் = $-(2-a)^2$
மூலங்களின் பெருக்கல் = $(a+5)^2$
இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்
x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்)x + மூலங்களின் பெருக்கல் = 0
$\therefore x^2 + (2-a)^2 x + (a+5)^2 = 0$

2. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் காண்க.

(i) $x^2 + 3x - 28 = 0$ **(ii)** $x^2 + 3x = 0$

(iii) $3 + \frac{1}{a} = \frac{10}{a^2}$ **(iv)** $3y^2 - y - 4 = 0$

தீர்வு :

(i) $x^2 + 3x - 28 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட
$a = 1, b = 3, c = -28$

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $= -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \frac{c}{a} = -\frac{28}{1} = -28$

(ii) $x^2 + 3x = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட
$a = 1, b = 3, c = 0$

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $= -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$

(iii) $3 + \frac{1}{a} = \frac{10}{a^2}$

$3 + \frac{1}{a} - \frac{10}{a^2} = 0$

$3a^2 + a - 10 = 0$ என்பது 'a' ல் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு

$A = 3, B = 1, C = -10$

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $= -\frac{B}{A} = -\frac{1}{3}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \frac{C}{A} = -\frac{10}{3}$

(iv) $3y^2 - y - 4 = 0$ என்பது 'y' ல் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு
$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட
$a = 3, b = -1, c = -4$

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $= -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$

இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல்

நினைவில் கொள்க

- இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, கீழ்க்காணும் முறைகளைப் பயன்படுத்தலாம்.
  - (i) காரணிப்படுத்தல் முறை
  - (ii) வர்க்கப்பூர்த்தி முறை
  - (iii) சூத்திர முறை.
- $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரம், $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

எடுத்துக்காட்டு

3.27. **தீர்க்க:** $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

தீர்வு :

$2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 2x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 3$

(நடு உறுப்பைப் பிரிக்க)

காரணிகளை பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த

$(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x - \sqrt{3}) = 0$

மூலங்கள் சமம். எனவே,

$\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$

$\sqrt{2}x = \sqrt{3}$

எனவே, $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ என்பது தீர்வாகும்.

3.28. **தீர்க்க:** $2m^2 + 19m + 30 = 0$

தீர்வு :

$2m^2 + 19m + 30 = 2m^2 + 4m + 15m + 30$

$= 2m(m + 2) + 15(m + 2)$

$= (m + 2)(2m + 15)$

இப்பொழுது, $(m + 2)(2m + 15) = 0$ -லிருந்து,

காரணிகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த,

$m + 2 = 0$ -லிருந்து $m = -2$ அல்லது

$2m + 15 = 0$ -லிருந்து, $m = \frac{-15}{2}$

எனவே, மூலங்கள் -2 அல்லது $\frac{-15}{2}$.

இருபடிச் சமன்பாடு வடிவில் அமைந்திராத சில சமன்பாடுகளைப் பொருத்தமான பிரதியிடல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாடு வடிவத்திற்குச் சுருக்கித் தீர்வு காணலாம். இந்த வகையிலான எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளன.

3.29. **தீர்க்க:** $x^4 - 13x^2 + 42 = 0$

தீர்வு :

$x^2 = a$ என்க.

ஆகவே, $(x^2)^2 - 13x^2 + 42 = a^2 - 13a + 42$

$= (a - 7)(a - 6)$

ஆனால், $(a - 7)(a - 6) = 0$ ஆகும்.

$a = 7$ மற்றும் 6.

$a = x^2$, எனவே $x^2 = 7$ -லிருந்து $x = \pm\sqrt{7}$ மற்றும்

$x^2 = 6$ -லிருந்து $x = \pm\sqrt{6}$

எனவே, $x = \pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{6}$ மூலங்கள் ஆகும்.

3.30. **தீர்க்க:** $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 2\frac{1}{2}$

தீர்வு :

$y = \frac{x}{x-1}$ எனும்போது, $\frac{1}{y} = \frac{x-1}{x}$ எனக் கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் y-யின் மதிப்பைப் பிரதியிட, $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ கிடைக்கும்.

$2y^2 - 5y + 2 = 0$ -லிருந்து $y = \frac{1}{2}, 2$

$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$ மற்றும் $2x = x - 1$ -லிருந்து $x = -1$

$\frac{x}{x-1} = 2$ மற்றும் $x = 2x - 2$ -லிருந்து $x = 2$

எனவே, -1 மற்றும் 2 ஆகியவை மூலங்கள் ஆகும்.

பயிற்சி 3.10

1. காரணிப்படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $4x^2 - 7x - 2 = 0$ **(ii)** $3(p^2 - 6) = p(p + 5)$

(iii) $\sqrt{a(a-7)} = 3\sqrt{2}$ **(iv)** $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(v) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

தீர்வு :

(i) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

$4x^2 - 8x + x - 2 = 0$

$4x(x - 2) + 1(x - 2) = 0$

$(x - 2)(4x + 1) = 0$ $\quad 4x + 1 = 0$

$x - 2 = 0$ $\quad 4x = -1$

$x = 2, \quad x = -\frac{1}{4}$

$\therefore$ தீர்வு : $x = -\frac{1}{4}, 2$

(ii) $3(p^2 - 6) = p(p + 5)$

$3p^2 - 18 = p^2 + 5p$

$3p^2 - 18 - p^2 - 5p = 0$

$2p^2 - 5p - 18 = 0$

$2p^2 + 4p - 9p - 18 = 0$

$2p(p + 2) - 9(p + 2) = 0$

$(2p - 9)(p + 2) = 0$

$2p - 9 = 0, \quad p + 2 = 0$

$2p = 9, \quad p = -2$

$\therefore$ தீர்வு : $p = -2, 9/2$.

(iii) $\sqrt{a(a-7)} = 3\sqrt{2}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$a(a-7) = 9(2)$

$a^2 - 7a - 18 = 0$

$a^2 - 9a + 2a - 18 = 0$

$a(a-9) + 2(a-9) = 0$

$(a-9)(a+2) = 0$

தீர்வு: $a = 9, -2$

(iv) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + 2x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}\sqrt{2}x + 5x + 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}x(x+\sqrt{2}) + 5(x+\sqrt{2}) = 0$

$(x+\sqrt{2})(\sqrt{2}x+5) = 0$

$x+\sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{2}x+5 = 0$

$x = -\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}x = -5$

$x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

∴ தீர்வு: $x = -\sqrt{2}, -\frac{5}{\sqrt{2}}$

(v) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

$16x^2 - 8x + 1 = 0$

$16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$

$4x(4x-1) - 1(4x-1) = 0$

$(4x-1)(4x-1) = 0$

$4x - 1 = 0, \; 4x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{4}$

∴ தீர்வு: $x = \frac{1}{4}$ (இருமுறை)

2. n அணிகள் பங்குபெறும் ஒரு கையுந்து விளையாட்டு (Volley ball) போட்டியில் ஒவ்வோர் அணியும் மற்ற அனைத்து அணிகளோடும் விளையாட வேண்டும். 15 போட்டிகள் கொண்ட தொடரில் மொத்தப் போட்டிகளின் எண்ணிக்கை $G(n) = \frac{n^2-n}{2}$ எனில், பங்கேற்கும் அணிகளின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

தீர்வு :

கொ.ப: $G(n) = \frac{n^2-n}{2}$

மொத்தப் போட்டிகளின் எண்ணிக்கை = 15

$\therefore \frac{n^2-n}{2} = 15$

$n^2 - n = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

$(n-6)(n+5) = 0$

$n = 6, -5$

அணிகளின் எண்ணிக்கை குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.

$\therefore n = 6$

வர்க்கப்பூர்த்தி முறையில் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல்

எடுத்துக்காட்டு

3.31. **தீர்க்க: $x^2 - 3x - 2 = 0$**

தீர்வு :

$x^2 - 3x - 2 = 0$

$x^2 - 3x = 2$ (மாறிலியை வலப்புறம் மாற்றுக)

$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(\left[\frac{1}{2}(x\text{-ன் கெழு})\right]^2\text{-ஐ இருபுறமும் கூட்ட}\right)$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

(இடப்புறத்தை முழு வர்க்கமாக எழுத)

$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

(இருபுறமும் வர்க்கமூலம் காண)

$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ அல்லது $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

எனவே, $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ தீர்வுகளாகும்.

3.32. **தீர்க்க: $2x^2 - x - 1 = 0$**

தீர்வு :

$2x^2 - x - 1 = 0$

(x^2-யின் கெழுவை 1-ஆக மாற்ற, சமன்பாட்டை 2-ஆல் வகுக்கவும்)

$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$$x^2-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x-\frac{1}{4} = \pm\frac{3}{4} \Rightarrow x = 1, -\frac{1}{2}$$

3.33. **சூத்திர முறையில் $x^2 + 2x - 2 = 0$ -ஐத் தீர்க்கவும்.**

தீர்வு :

$x^2 + 2x - 2 = 0$ -ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ -உடன் ஒப்பிட,
$a = 1, b = 2, c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a, b மற்றும் c -யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

எனவே, $x = -1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}$

3.34. **சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்தி $2x^2 - 3x - 3 = 0$ -ஐத் தீர்க்க.**

தீர்வு :

$2x^2 - 3x - 3 = 0$ -ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட
$a = 2, b = -3, c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a, b மற்றும் c -யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட, $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

எனவே, $x = \dfrac{3+\sqrt{33}}{4}, \quad x = \dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$

3.35. **$3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ -ஐ சூத்திர முறையில் தீர்க்கவும்.**

தீர்வு :

$3p^2 + 2\sqrt{5}p - 5 = 0$ -ஐ $x^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 3, b = 2\sqrt{5}, c = -5.$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a, b மற்றும் c -யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட, $p = \dfrac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{(2\sqrt{5})^2-4(3)(-5)}}{2(3)}$

$$= \frac{-2\sqrt{5} \pm \sqrt{80}}{6} = \frac{-\sqrt{5} \pm 2\sqrt{5}}{3}$$

எனவே, $x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}, -\sqrt{5}$

3.36. **தீர்க்க: $pqx^2 - (p+q)^2 x + (p+q)^2 = 0$**

தீர்வு :

$pqx^2-(p+q)^2x+(p+q)^2=0$ -ஐ $ax^2+bx+c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = pq, b = -(p+q)^2, c = (p+q)^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a, b மற்றும் c -யின் மதிப்புகளைச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட,

$$x = \frac{-[-(p+q)^2] \pm \sqrt{[-(p+q)^2]^2-4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^4-4(pq)(p+q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2[(p+q)^2-4pq]}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p^2+q^2+2pq-4pq)}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm \sqrt{(p+q)^2(p-q)^2}}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)^2 \pm (p+q)(p-q)}{2pq}$$

$$= \frac{(p+q)\{(p+q) \pm (p-q)\}}{2pq}$$

எனவே $x = \dfrac{p+q}{2pq} \times 2p, \dfrac{p+q}{2pq} \times 2q$

$$\Rightarrow x = \frac{p+q}{q}, \frac{p+q}{p}$$

பயிற்சி 3.11

1. வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

(ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

தீர்வு :

(i) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$9x^2 - 12x = -4$ ['9' ஆல் வகுக்க]

$x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{4}{9}$

$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$

$\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right.$ ன் கெழுவை இருபுறமும் கூட்ட$\left.\right)$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$ (இருமுறை)

தீர்வு : $x = \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

$5x + 7 = (3x + 2)(x - 1)$

$5x + 7 = 3x^2 - 3x + 2x - 2$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

3 ஆல் வகுக்க

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x = 3$

$x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$

$(x - 1)^2 = 4$

$\therefore x - 1 = \pm 2$

$x - 1 = 2$, $x - 1 = -2$

$x = 2 + 1$ $x = -2 + 1$

$x = 3$ $x = -1$

$\therefore$ தீர்வு : $x = -1, 3$

2. சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்கக.

(i) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

(ii) $\sqrt{2}f^2 - 6f + 3\sqrt{2} = 0$

(iii) $3y^2 - 20y - 23 = 0$

(iv) $36y^2 - 12ay + (a^2 - b^2) = 0$

தீர்வு :

(i) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

$a = 2, b = -5, c = 2$

சூத்திரம் $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$= \frac{5+3}{4}, \frac{5-3}{4}$

$= \frac{8}{4}, \frac{2}{4}$

$\therefore$ தீர்வு : $x = 2, \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{2}f^2 - 6f + 3\sqrt{2} = 0$

$a = \sqrt{2}, b = -6, c = 3\sqrt{2}$

$\therefore f = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(\sqrt{2})(3\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2\sqrt{2}} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\therefore$ தீர்வு : $f = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(iii) $3y^2 - 20y - 23 = 0$

$a = 3, b = -20, c = -23$

$\therefore$ தீர்வு : $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(3)(-23)}}{2(3)}$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400+276}}{6}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{676}}{6}$$

$$= \frac{20 \pm 26}{6}$$

$$= \frac{20+26}{6}, \frac{20-26}{6}$$

$$\therefore y = \frac{46}{6}, -\frac{6}{6}$$

தீர்வு : $y = \frac{23}{3}, -1$

(iv) $36y^2 - 12ay + (a^2 - b^2) = 0$

$A = 36, B = -12a, C = a^2 - b^2$

$$\therefore y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{12a \pm \sqrt{(-12a)^2 - 4(36)(a^2 - b^2)}}{2(36)}$$

$$= \frac{12a \pm \sqrt{144a^2 - 144(a^2 - b^2)}}{72}$$

$$= \frac{12a \pm \sqrt{144a^2 - 144a^2 + 144b^2}}{72}$$

$$= \frac{12a \pm 12b}{72}$$

$$= \frac{12(a+b)}{72}, \frac{12(a-b)}{72}$$

$$\therefore \text{ தீர்வு : } y = \frac{a+b}{6}, \frac{a-b}{6}$$

3. சாய்வு தளத்தில் t–வினாடிகளில் ஒரு பந்து கடக்கும் தூரம் $d = t^2 - 0.75t$ அடிகளாகும். 11.25 அடி தொலைவைக் கடக்கப் பந்து எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தூரம் $d = t^2 - 0.75t$ மற்றும்

$t^2 - 0.75t = 11.25$

$\therefore t^2 - 0.75t - 11.25 = 0$

$a = 1, b = -0.75, c = -11.25$

சூத்திரம்,

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{0.75 \pm \sqrt{(-0.75)^2 - 4(1)(-11.25)}}{2(1)}$$

$$= \frac{0.75 \pm \sqrt{0.5625 + 45}}{2}$$

$$= \frac{0.75 \pm \sqrt{45.5625}}{2}$$

$$= \frac{0.75 \pm 6.75}{2}$$

$$= \frac{0.75+6.75}{2}, \frac{0.75-6.75}{2}$$

$$= \frac{7.5}{2}, -\frac{6}{2}$$

$= 3.75, -3$

$\therefore t = 3.75$ நொடிகள்.

[$\because$ நேரம் குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது, $t \neq -3$]

இருபடிச் சமன்பாடுகள் சார்ந்த கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணுதல்

எடுத்துக்காட்டு

3.37. குமரனின் தற்போதைய வயதின் இருமடங்கோடு ஒன்றைக் கூட்டினால் கிடைப்பது, குமரனின் இரண்டாண்டுகளுக்கு முந்தைய வயதையும் அவரின் 4 ஆண்டுகளுக்குப் பிந்தைய வயதையும் பெருக்கக் கிடைப்பதற்குச் சமம் எனில், அவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

தீர்வு :

குமரனின் தற்போதைய வயது x ஆண்டுகள் என்க.

2 ஆண்டுகளுக்கு முன் வயது = $(x - 2)$ ஆண்டுகள்.

4 ஆண்டுகளுக்கு பின் வயது = $(x + 4)$ ஆண்டுகள்.

கொடுத்த தகவல்படி, $(x - 2)(x + 4) = 1 + 2x$

$x^2 + 2x - 8 = 1 + 2x$

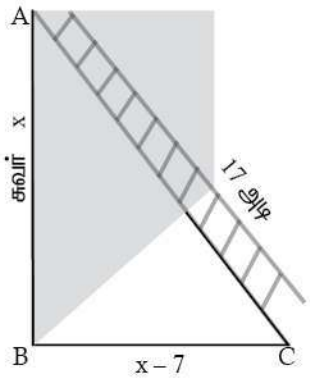
$\Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

வயது குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

எனவே, குமரனின் தற்போதைய வயது 3 ஆண்டுகள்.

3.38. 17 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணி ஒரு சுவரின் மீது சாய்ந்துள்ளது. தரை, ஏணி மற்றும் செங்குத்துச் சுவர் மூன்றும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன. சுவரின் அடியிலிருந்து ஏணியின் அடி முனை வரை உள்ள தூரம் ஏணியின் மேல் முனை சுவரைத் தொடும் உயரத்தைவிட 7 அடி குறைவு எனில், சுவரின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :



சுவரின் உயரம் AB = x அடி என்க
கொடுக்கப்பட்ட தகவலின்படி BC = (x – 7) அடி
செங்கோணமுக்கோணம் ABC, AC = 17 அடி
BC = (x – 7) அடி
பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(17)^2 = x^2 + (x-7)^2$;

$289 = x^2 + x^2 - 14x + 49$

$\Rightarrow \quad x^2 - 7x - 120 = 0$

$\Rightarrow (x-15)(x+8) = 0$

ஆகவே x = 15 (அ) – 8
உயரம் குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.
எனவே, சுவரின் உயரம் 5 அடி ஆகும்.

3.39. ஓர் இடத்தில் x^2 அன்னங்கள் கூட்டமாக இருந்தன. மேகங்கள் கூடியதால், 10x அன்னங்கள் ஏரிக்குச் சென்றன; எட்டில் ஒரு பங்கு தோட்டத்திற்குப் பறந்தன. மீதமுள்ள மூன்று ஜோடிகள் நீரில் விளையாடின எனில், மொத்த அன்னங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

தீர்வு : மந்தையில் மொத்தம் x^2 அன்னங்கள் உள்ளன.

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களின்படி,

$$x^2 - 10x - \frac{1}{8}x^2 = 6 \text{ -லிருந்து } 7x^2 - 80x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(7)(-48)}}{14}$$

$$= \frac{80 \pm 88}{14}$$

எனவே, $x = 12, -\frac{4}{7}$.

அன்னங்களின் எண்ணிக்கை $x = -\frac{4}{7}$ ஆக இருக்க முடியாது.
ஆகையால், x = 12. மொத்த அன்னங்களின் எண்ணிக்கை $x^2 = 144$ ஆகும்.

3.40. சென்னையிலிருந்து விருதாச்சலத்திற்கு 240 கி.மீ தூரத்தைக் கடக்க ஒரு பயணிகள் தொடர்வண்டிக்கு ஒரு விரைவு தொடர்வண்டியைவிட 1 மணி நேரம் கூடுதலாகத் தேவைப்படுகிறது. பயணிகள் தொடர்வண்டியின் வேகம், விரைவு தொடர்வண்டியின் வேகத்தைவிட 20 கி.மீ/மணி குறைவு எனில், இரு தொடர் வண்டிகளின் சராசரி வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

பயணிகள் தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் x கி.மீ/மணி ஆகும்.
தற்போது, விரைவு தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் (x + 20) கி.மீ/மணி ஆகும்.
240 கி.மீ கடக்கப் பயணிகள் தொடர்வண்டி

எடுக்கும் நேரம் = $\frac{240}{x}$ மணி

240 கி.மீ கடக்க விரைவு தொடர்வண்டி

எடுக்கும் நேரம் = $\frac{240}{x+20}$ மணி

கொடுக்கப்பட்ட தகவலின்படி, $\frac{240}{x} = \frac{240}{x+20} + 1$

$$240\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+20}\right] = 1$$

$$\Rightarrow 240\left[\frac{x+20-x}{x(x+20)}\right] = 1 \Rightarrow 4800 = (x^2 + 20x)$$

$$x^2 + 20x - 4800 = 0$$

$\Rightarrow (x+80)(x-60) = 0 \Rightarrow x = -80$ அல்லது 60
வேகம் ஒரு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.
எனவே, பயணிகள் தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் 60 கி.மீ/மணி மற்றும்
விரைவு தொடர்வண்டியின் சராசரி வேகம் 80 கி.மீ / மணி.

பயிற்சி 3.12

1. ஓர் எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் $\frac{24}{5}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

'x' என்பது ஓர் எண் என்க.

∴ இதன் தலைகீழி $\frac{1}{x}$

கொடுக்கப்பட்டது $x - \frac{1}{x} = \frac{24}{5}$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{24}{5}$$

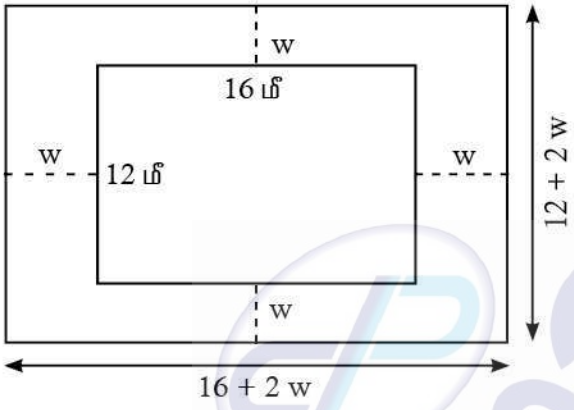
$$5x^2 - 5 = 24x$$

$$5x^2 - 24x - 5 = 0$$
$$5x^2 - 25x + x - 5 = 0$$
$$5x(x-5) + 1(x-5) = 0$$
$$(x-5)(5x+1) = 0$$
$$x = 5, -\frac{1}{5}$$

∴ அந்த எண் '5' அல்லது '$-1/5$'

2. 12 மீ × 16 மீ அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவப் பூங்காவைச் சுற்றி 'w' மீட்டர் அகலமுள்ள நடைபாதை அமைக்கப்படும்போது, அதன் மொத்தப் பரப்பு 285சதுர மீட்டராக அதிகரிக்கிறது. நடைபாதையின் அகலத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :



கொ.ப : பூங்காவின் நீளம் = 16 மீ
பூங்காவின் அகலம் = 12 மீ
நடைபாதையின் அகலம் = 'w' மீ
∴ படத்திலிருந்து
$(16 + 2w)(12 + 2w) = 285$ (கொ.ப)
$192 + 24w + 32w + 4w^2 - 285 = 0$
$4w^2 + 56w - 93 = 0$

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$w = \frac{-56 \pm \sqrt{(56)^2 - 4(4)(-93)}}{2(4)}$$
$$= \frac{-56 \pm \sqrt{4624}}{8}$$
$$= \frac{-56 \pm 68}{8}$$
$$= \frac{-56+68}{8}, \frac{-56-68}{8}$$

[குறை எண் சாத்தியமல்ல]

$$= \frac{12}{8} = 1.5$$

∴ நடைபாதையின் அகலம் 1.5 மீ

3. ஒரு பேருந்து 90 கி.மீ தொலைவைச் சீரான வேகத்தில் கடக்கிறது. அதன் வேகம் 15 கி.மீ/மணி அதிகரிக்கப்பட்டால், பயண நேரம் 30 நிமிடங்கள் குறைகிறது எனில், பேருந்தின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

பேருந்தின் வேகம் 'x' கி.மீ/மணி என்க.
எனில் அதிகரிக்கப்பட்ட வேகம் $(x + 15)$ கி.மீ/மணி

$$\text{பயண நேரம்} = \frac{90}{x} \text{ மணி,}$$
$$\text{புதிய நேரம்} = \frac{90}{x+15} \text{ மணி}$$

$$\left[\because \text{நேரம்} = \frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}}\right]$$

$$\therefore \text{கொ.ப} : \frac{90}{x} - \frac{90}{x+15} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\because 30 \text{ நிமிடங்கள்} = \frac{1}{2} \text{ மணி}\right]$$

$$90\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+15}\right] = \frac{1}{2}$$
$$90\left[\frac{x+15-x}{x(x+15)}\right] = \frac{1}{2}$$
$$\frac{90 \times 15}{x^2 + 15x} = \frac{1}{2}$$
$$x^2 + 15x = 2700$$
$$x^2 + 15x - 2700 = 0 \text{ காரணிப்படுத்த}$$
$$(x + 60)(x - 45) = 0$$
$$x = -60 \text{ மற்றும் } x = 45$$

$x = -60$ என்பது சாத்தியமல்ல
∴ பேருந்தின் வேகம் 45 கி.மீ/மணி.

4. ஒரு பெண்ணின் வயது அவரது சகோதரியின் வயதைப் போல இருமடங்கு ஆகும். ஐந்து ஆண்டுகளுக்குப் பின் இரு வயதுகளின் பெருக்கற்பலன் 375 எனில், சகோதரிகளின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

தீர்வு :

பெண்ணின் சகோதரியின் தற்போதைய வயது 'x' என்க.
∴ பெண்ணின் வயது 2x.
ஐந்து வருடங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் வயது $(x + 5)$ மற்றும் $(2x + 5)$

கொ.ப: $(x + 5)(2x + 5) = 375$
சுருக்க $2x^2 + 15x - 350 = 0$
$2x^2 - 20x + 35x - 350 = 0$
$2x(x - 10) + 35(x - 10) = 0$
$(x - 10)(2x + 35) = 0$

$$x = 10, -\frac{35}{2}$$

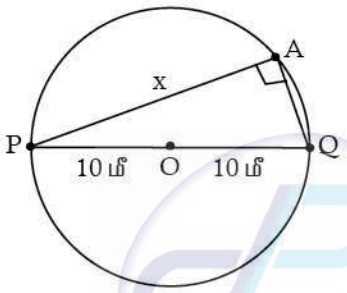
$$\therefore x = 10$$

$$\left[\because x = \frac{-35}{2} \text{ என்பது சாத்தியமல்ல}\right]$$

∴ பெண்ணின் தற்போதைய வயது 20 வருடங்கள் மற்றும் பெண்ணின் சகோதரியின் வயது 10 வருடங்கள்.

5. 20மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் கம்பம் ஒன்று பொருத்தப்பட வேண்டும். ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ள P மற்றும் Q எனும் கதவுகளில் இருந்து கம்பத்திற்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வித்தியாசம் 4 மீ உள்ளவாறு கம்பம் நடமுடியுமா? ஆம் எனில், இரு கதவுகளிலிருந்து கம்பத்தை எவ்வளவு தொலைவில் பொருத்த வேண்டும்?

தீர்வு :



'A' என்பது கம்பம் பொருத்தப்பட்ட இடம் என்க.
'P' மற்றும் 'Q' என்பன வட்டத்தின் இரு முனைகள்.

விட்டம் PQ = 20 மீ

$\therefore$ PO = OQ = 10 மீ

கொ.ப PA – QA = 4

'PA' என்பது 'x' என்க.

$\therefore$ QA = x – 4

படத்திலிருந்து, $PA^2 + QA^2 = PQ^2$

[ΔPAQ செங்கோண முக்கோணம். ஏனெனில் அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் செங்கோணம் அதாவது $\angle A = 90^\circ$]

$$x^2 + (x-4)^2 = (20)^2$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 400 = 0$$

$$2x^2 - 8x - 384 = 0$$

2 ஆல் வகுக்க

$$x^2 - 4x - 192 = 0$$

$$(x-16)(x+12) = 0$$

$$x = 16, -12$$

[x = – 12 சாத்தியமல்ல]

$\therefore$ x = 16

$\therefore$ PA = 16, எனில் QA = 16 – 4 = 12

$\therefore$ PA = 16 மீ, QA = 12 மீ

மேலும் கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து கம்பம் நடுவது சாத்தியம் என்பதாகிறது.

6. $2x^2$, எண்ணிக்கையுடைய கருப்பு தேனீக்களின் கூட்டத்திலிருந்து கூட்டத்தின் பாதியின் வர்க்கமூல எண்ணிக்கை கொண்ட தேனீக்கள் ஒரு மரத்துக்குச் செல்கின்றன. மீண்டும் கூட்டத்திலிருந்து ஒன்பதில் எட்டுப் பங்கு கொண்ட தேனீக்கள் அதே மரத்துக்குச் செல்கின்றன. மீதமுள்ள இரண்டு தேனீக்கள் மணம் கமழும் மலரில் சிக்கிக் கொண்டன எனில், மொத்தத் தேனீக்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

தீர்வு :

கொ.ப தேனீக்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 2x^2$

கூட்டத்தின் பாதியின் வர்க்கமூலம் $= \left(\frac{2x^2}{2}\right)^{1/2}$

ஒன்பதில் எட்டுப்பங்கு தேனீக்கள் $= \frac{8}{9}(2x^2)$

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து,

$$2x^2 - x - \frac{8}{9}(2x^2) = 2$$

$$18x^2 - 9x - 16x^2 = 18$$

$$2x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 3x - 18 = 0$$

$$2x(x-6) + 3(x-6) = 0$$

$$(x-6)(2x+3) = 0$$

$$x = 6, x = \frac{-3}{2} \left[\because x = -\frac{3}{2} \text{ சாத்தியமல்ல}\right]$$

$\therefore x = 6.$

∴ கூட்டத்திலுள்ள மொத்த தேனீக்களின் எண்ணிக்கை $= 2x^2 = 2(6)^2 = 72$

7. 70 மீ இடைப்பட்ட தொலைவில் உள்ள இரு அரங்குகளில் இசை ஒலிக்கப்படுகிறது. முதல் அரங்கில் 4 பாடகர்களும் இரண்டாம் அரங்கில் 9 பாடகர்களும் பாடுகிறார்கள். சம ஒலி அளவில் இசையைக் கேட்க விரும்பும் ஒரு நபர் இரு அரங்கங்களுக்கு இடையில் எங்கு நிற்க வேண்டும்? (குறிப்பு: ஒலி அளவுகளின் விகிதிமும், இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வர்க்கத்தின் விகிதமும் சமம்).

தீர்வு :

கொ.ப :

நபர்

4 பாடகர்கள் x — 70 – x — 9 பாடகர்கள்

முதல் அரங்கிலுள்ள பாடகர்களின் எண்ணிக்கை = 4

2 –வது அரங்கிலுள்ள பாடகர்களின் எண்ணிக்கை = 9

முதல் அரங்கிலிருந்து 'x' மீ தூரத்தில் நபர் நிற்கிறார் என்க.

$\therefore$ 2 –வது அரங்கிலிருந்து உள்ள தூரம் (70 – x) மீ

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து $\frac{4k}{9k} = \frac{x^2}{(70-x)^2}$

[$\because$ k என்பது மாறிலி]

$4(70-x)^2 = 9x^2$

$4(4900-140x+x^2) = 9x^2$

$19600-560x+4x^2 = 9x^2$

$5x^2+560x-19600 = 0$

5 ஆல் வகுக்க

$x^2+112x-3920 = 0$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-112\pm\sqrt{(112)^2-4(1)(-3920)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-112\pm\sqrt{28224}}{2}$$

$$= \frac{-112\pm168}{2}$$

$$= \frac{-112+168}{2}, \frac{-112-168}{2}$$

$$= \frac{56}{2}, -\frac{280}{2}$$

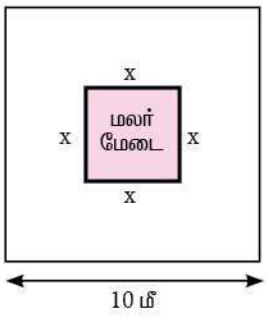
$= 28, -140$ (-140 என்பது சாத்தியமல்ல).

$\therefore x = 28$ மீ

$70-x = 70-28 = 42$ மீ

8. 10 மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவ நிலத்தின் நடுவில், ஒரு சதுர மலர் மேடையும் அதனைச் சுற்றிச் சீரான அகலமுள்ள சரளை பாதையும் அமைக்கப்படுகிறது. ஒரு சதுர மீட்டர் மேடை மற்றும் பாதை அமைக்க முறையே ₹ 3 மற்றும் ₹ 4 என்றவாறு மொத்தச் செலவு ₹ 364 எனில், சரளை பாதையின் அகலம் என்ன?

தீர்வு :



கொ.ப : சதுர வடிவ நிலத்தின் பக்கம் = 10 மீ

$\therefore$ நிலத்தின் பரப்பு $= (10)^2$

$= 100$ சதுர. மீ

மலர் மேடையின் பக்கம் 'x' மீ

மலர் மேடையின் பரப்பு $= x^2$

$\therefore$ சரளை பாதையின் பரப்பு $= 100-x^2$ மீ

கொ.ப : ஒரு சதுர மீட்டர் மேடை மற்றும் பாதை அமைக்க முறையே ₹ 3 மற்றும் ₹ 4 என்றவாறு மொத்த செலவு ₹ 364.

$\therefore 3x^2+4(100-x^2) = 364$

$3x^2+400-4x^2 = 364$

$x^2-36 = 0$

$x^2 = 36$

$x = \pm6$

[$\because x = -6$ என்பது சாத்தியமல்ல]

$\therefore x = 6$

$\therefore$ சரளைப்பாதையின் அகலம் $= \frac{10-6}{2}$

$= \frac{4}{2} = 2$ மீ

9. இரு பெண்கள் 100 முட்டைகளைச் சந்தைக்கு விற்பனைக்கு எடுத்துச் செல்கின்றனர். இருவரிடமும் சம எண்ணிக்கையில் முட்டைகள் இல்லை எனினும் முட்டைகள் விற்ற தொகை சமம் ஆகும். முதல் பெண், "உனது முட்டைகளை நான் விற்றிருந்தால் நான் ₹ 15 சம்பாதித்திருப்பேன்" என இரண்டாவது பெண்ணிடம் கூறினாள். அதற்கு "உனது முட்டைகளை நான் விற்று இருந்தால் ₹ $6\frac{2}{3}$ சம்பாதித்திருப்பேன்" என இரண்டாவது பெண் பதிலளித்தாள். தொடக்கத்தில் இருவரிடமும் இருந்த முட்டைகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

தீர்வு :

முதல் பெண்ணிடம் உள்ள முட்டைகள் 'x' என்க

$\therefore$ இரண்டாவது பெண்ணிடம் உள்ள முட்டைகள் "$(100-x)$"

முதல் பெண் விற்ற ஒரு முட்டையின் விலை 'a' எனவும், 2 –வது பெண் விற்ற ஒரு முட்டையின் விலை 'b' எனவும் கொள்க.

கொ.ப: $x > 100-x$

மற்றும் $a(100-x) = 15$, $bx = 6\frac{2}{3}$

$$a = \frac{15}{100-x}, \quad b = \frac{20}{3x}$$

கொ.ப. : முட்டைகள் விற்கப்பட்ட தொகை சமம்

$ax = (100-x)b$

$$\Rightarrow x = \frac{100b}{a+b}$$

'a' மற்றும் 'b' ன் மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$x = \frac{100\left(\frac{20}{3x}\right)}{\frac{15}{100-x}+\frac{20}{3x}}$$

$$x = \frac{2000(100-x)}{2000+25x}$$

$25(x+80)x = 25(80)(100-x)$

$x^2+80x = 8000-80x$

$x^2+160x-8000 = 0$

காரணிப்படுத்த $(x + 200)(x - 40) = 0$

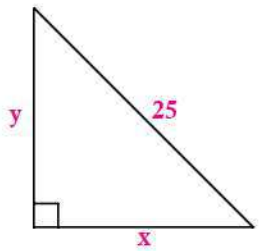
$x = 40$ [$x = -200$ என்பது சாத்தியமல்ல]

$\therefore 100 - x = 100 - 40 = 60$

∴ தொடக்கத்தில் இரு பெண்களிடமும் முறையே 40 மற்றும் 60 முட்டைகள் இருந்தன.

10. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் 25 செ.மீ மற்றும் அதன் சுற்றளவு 56 செ.மீ எனில், முக்கோணத்தின் சிறிய பக்கத்தின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :



கொ.ப: கர்ணம் = 25 செ.மீ

மற்ற பக்கங்கள் 'x' மற்றும் 'y' என்க

$\therefore x^2 + y^2 = 25^2$ ... (1)

சுற்றளவு = 56 செ.மீ

$x + y + 25 = 56$

$y = 56 - 25 - x$

$\Rightarrow y = 31 - x$

(1) –ல் பிரதியிட,

$x^2 + (31 - x)^2 = 625$

$x^2 + 961 - 62x + x^2 - 625 = 0$

$2x^2 - 62x + 336 = 0$

[$\because$ 2 ஆல் வகுக்க]

$x^2 - 31x + 168 = 0$

$x^2 - 24x - 7x + 168 = 0$

$x(x - 24) - 7(x - 24) = 0$

$(x - 24)(x - 7) = 0$

$x = 7, 24$

∴ முக்கோணத்தின் சிறிய பக்கம் 7 செ.மீ.

இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மை

நினைவில் கொள்க

- $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்பதற்கான சூத்திரம்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $b^2 - 4ac$ என்பது தன்மைக் காட்டி எனவும் Δ என்ற குறியீட்டாலும் குறிக்கப்படுகிறது.
- $\Delta > 0$ (அதாவது, $b^2 - 4ac > 0$) எனில், மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.
- $\Delta = 0$ (அதாவது, $b^2 - 4ac = 0$) எனில், மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.
- $\Delta < 0$ (அதாவது, $b^2 - 4ac < 0$) எனில், மூலங்கள் மெய் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு

3.41. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.

(i) $x^2 - x - 20 = 0$

(ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

(iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

தீர்வு :

(i) $x^2 - x - 20 = 0$

இங்கு, $a = 1, b = -1, c = -20$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-20) = 81$

$\Delta = 81 > 0$

எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை.

(ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

இங்கு, $a = 9, b = -24, c = 16$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-24)^2 - 4(9)(16) = 0$

$\Delta = 0$

எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

(iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

இங்கு, $a = 2, b = -2, c = 9$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(2)(9) = -68$

$\Delta = -68 < 0$

எனவே, இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை.

3.42. (i) இருபடிச் சமன்பாடு $kx^2 - (8k + 4)x + 81 = 0$ -யின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், 'k' - யின் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ -யின் மூலங்கள் மெய் இல்லை எனில், k- யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $kx^2 - (8k + 4) + 81 = 0$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

எனவே, $\Delta = 0$.

அதாவது, $b^2 - 4ac = 0$

இங்கு, $a = k,\ b = -(8k + 4),\ c = 81$

எனவே, $[-(8k + 4)]^2 - 4(k)(81) = 0$

$64k^2 + 64k + 16 - 324k = 0$

$64k^2 - 260k + 16 = 0$

4 ஆல் வகுக்க, $16k^2 - 65k + 4 = 0$

$(16k - 1)(k - 4) = 0$-லிருந்து

$$k = \frac{1}{16} \text{ அல்லது } k = 4$$

(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் இல்லை.

எனவே, $\Delta < 0$

அதாவது, $b^2 - 4ac < 0$

இங்கு, $a = k + 9,\ b = k + 1,\ c = 1$

எனவே, $(k + 1)^2 - 4(k + 9)(1) < 0$

$k^2 + 2k + 1 - 4k - 36 < 0$

$k^2 - 2k - 35 < 0$

$(k + 5)(k - 7) < 0$

எனவே, $-5 < k < 7$ $\{\because \alpha < \beta$ மற்றும் $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ எனில், $\alpha < x < \beta\}$

3.43. $x^2(p^2 + q^2) + 2x(pr + qs) + r^2 + s^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை எனக் காட்டுக. மேலும் $ps = qr$ எனில், மூலங்கள் மெய்யானவை மற்றும் சமம் என நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு,

$x^2(p^2 + q^2) + 2x(pr + qs) + r^2 + s^2 = 0$

இங்கு, $a = p^2 + q^2,\ b = 2(pr + qs),\ c = r^2 + s^2$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4ac$

$= [2(pr + qs)]^2 - 4(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$

$= 4[p^2r^2 + 2pqrs + q^2s^2 - p^2r^2 - p^2s^2 - q^2r^2 - q^2s^2]$

$= 4[-p^2s^2 + 2pqrs - q^2r^2]$

$= -4[(ps - qr)^2] < 0$ .....(1)

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$,

எனவே, மூலங்கள் மெய் இல்லை.

மேலும், $ps = qr$ எனில்,

$\Delta = -4[ps - qr]^2$

$= -4[qr - qr]^2 = 0$ ((1) -ஐப் பயன்படுத்தி).

ஆகவே, $\Delta = 0$. எனவே $ps = qr$ எனில், மூலங்கள் மெய்யாகவும், சமமாகவும் இருக்கும்.

சிந்தனைக் களம்

1. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவை முழு வர்க்கமாகுமாறு, விடுபட்ட கட்டங்களை நிரப்புக.

i) $x^2 + 14x +$ _____

விடை: 49

ii) $x^2 - 24x +$ _____

விடை: 144

iii) $p^2 + 2pq +$ _____

விடை: q^2

பயிற்சி 3.13

1. பின்வரும் இருபடிச்சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் கூறுக.

(i) $15x^2 + 11x + 2 = 0$

(ii) $x^2 - x - 1 = 0$

(iii) $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

(iv) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

(v) $9a^2b^2x^2 - 24abc\,dx + 16c^2d^2 = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

தீர்வு :

(i) $15x^2 + 11x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

$a = 15,\ b = 11,\ c = 2$

இப்போது, $b^2 - 4ac = (11)^2 - 4(15)(2)$

$= 121 - 120 = 1 > 0$

$\therefore$ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை.

(ii) $x^2 - x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

$a = 1,\ b = -1,\ c = -1$

$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1)$

$= 1 + 4 = 5 > 0$

$\therefore$ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை.

(iii) $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

$a = \sqrt{2}, b = -3, c = 3\sqrt{2}$

$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(\sqrt{2})(3\sqrt{2})$

$= 9 - 24 = -15 < 0$

∴ மூலங்கள் மெய் அல்ல.

(iv) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

$a = 9, b = -6\sqrt{2}, c = 2$

$b^2 - 4ac = (-6\sqrt{2})^2 - 4(9)(2)$

$= 72 - 72 = 0$

∴ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

(v) $9a^2b^2x^2 - 24abcdx + 16c^2d^2 = 0$

$A = 9a^2b^2, B = -24abcd, C = 16c^2d^2$

$B^2 - 4AC = (-24abcd)^2 - 4(9a^2b^2)(16c^2d^2)$

$= 576\ a^2b^2c^2d^2 - 576\ a^2b^2c^2d^2$

$= 0$

∴ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

2. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், 'k' -யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $(5k-6)x^2 + 2kx + 1 = 0$

(ii) $kx^2 + (6k+2)x + 16 = 0$

தீர்வு :

(i) $(5k-6)x^2 + 2kx + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

$a = 5k - 6, b = 2k, c = 1$

கொ.ப : மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

$\therefore b^2 - 4ac = 0$

$(2k)^2 - 4(5k-6)(1) = 0$

$4k^2 - 20k + 24 = 0$

4 ஆல் வகுக்க,

$k^2 - 5k + 6 = 0$

$(k-3)(k-2) = 0$

$k = 2, 3$

(ii) $kx^2 + (6k+2)x + 16 = 0$

$a = k, b = 6k + 2, c = 16$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

$\therefore b^2 - 4ac = 0$

$(6k+2)^2 - 4(k)(16) = 0$

$36k^2 + 24k + 4 - 64k = 0$

$36k^2 - 40k + 4 = 0$

4 ஆல் வகுக்க,

$9k^2 - 10k + 1 = 0$

$9k^2 - 9k - k + 1 = 0$

$9k(k-1) - 1(k-1) = 0$

$(k-1)(9k-1) = 0$

$k - 1 = 0, \quad 9k - 1 = 0$

$k = 1, \quad k = \frac{1}{9}$

$k = 1, \frac{1}{9}$

3. $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், b, a, c ஆகியவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$

$A = a - b, B = b - c, C = c - a$

கொ.ப : மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

$\therefore B^2 - 4AC = 0$

$(b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) = 0$

$b^2 - 2bc + c^2 - 4(ac - a^2 - bc + ab) = 0$

$b^2 - 2bc + c^2 - 4ac + 4a^2 + 4bc - 4ab = 0$

$4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 2bc - 4ac = 0$

$(2a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2(2a)(-b)$

$+ 2(-b)(-c) + 2(2a)(-c) = 0$

$(2a - b - c)^2 = 0$

$2a - b - c = 0$

$2a = b + c$

$a = \frac{b+c}{2}$

∴ b, a மற்றும் c என்பன கூட்டுத்தொடர் வரிசையை அமைக்கின்றன.

4. a மற்றும் b மெய் எண்கள் எனில், $(a-b)x^2 - 6(a+b)x - 9(a-b) = 0$ -யின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$(a-b)x^2 - 6(a+b)x - 9(a-b) = 0$

$Ax^2 + Bx + C = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$A = a - b, B = -6(a+b), C = -9(a-b)$

$B^2 - 4AC = [-6(a+b)]^2 - 4(a-b)(-9)(a-b)$

$= 36(a+b)^2 + 36(a-b)^2$

$= 36[(a+b)^2 + (a-b)^2]$

$= 36[a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2]$

$= 36(2a^2 + 2b^2) = 36 \times 2(a^2 + b^2)$

$= 72(a^2 + b^2)$

கொடுக்கப்பட்டது a, b என்பன மெய்.

$\therefore 72(a^2 + b^2) \geq 0$

∴ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமல்ல.

5. $(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + b^2 - ac = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் சமம் மற்றும் மெய் எனில், $a = 0$ அல்லது $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ என நிரூபி.

தீர்வு :

$(c^2 - ab)x^2 - 2(a^2 - bc)x + b^2 - ac = 0$

$Ax^2 + Bx + C = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$A = c^2 - ab, B = -2(a^2 - bc), C = b^2 - ac$

கொ.ப : மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

$\therefore B^2 - 4AC = 0$

$[-2(a^2 - bc)]^2 - 4(c^2 - ab)(b^2 - ac) = 0$

$4(a^2 - bc)^2 - 4(c^2 - ab)(b^2 - ac) = 0$

$4[a^4 - 2a^2bc + b^2c^2 - c^2b^2 + ac^3 + ab^3 - a^2bc] = 0$

$a^4 - 3a^2bc + ac^3 + ab^3 = 0$

$a(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 0$

$\therefore a = 0$ (அல்லது) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

நிறுவப்பட்டது.

இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கும், கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

முக்கிய குறிப்பு

α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்

மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + \beta = -b/a$

மூலங்களின் பெருக்கல் $\alpha\beta = c/a$

மேலும் சில முக்கிய முடிவுகள்

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta]$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)[(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta]$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2$$

$$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

எடுத்துக்காட்டு

3.44. $x^2 - 13x + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வித்தியாசம் 17 எனில், k -யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

$x^2 - 13x + k = 0$ இங்கு $a = 1, b = -13, c = k$

α மற்றும் β சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$= \frac{-(-13)}{1} = 13 \quad \ldots (1)$$

$$\alpha - \beta = 17 \quad \ldots (2)$$

(1) + (2) காண,

$2\alpha = 30$ கிடைக்கும்

எனவே $\alpha = 15$ ஐ (1) -ல் பிரதியிட,

$15 + \beta = 13$

$\beta = -2$

ஆனால், (2)-லிருந்து $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{k}{1}$

$15 \times (-2) = k$ எனவே $k = -30$

3.45. $x^2 + 7x + 10 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $(\alpha - \beta)$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$

(iii) $\alpha^3 - \beta^3$ (iv) $\alpha^4 + \beta^4$

(v) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$

தீர்வு :

$x^2 + 7x + 10 = 0$, இங்கு, $a = 1, b = 7, c = 10$

α மற்றும் β சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{1} = -7;$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

(i) $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$

$= \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 10} = \sqrt{9} = 3$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-7)^2 - 2 \times 10 = 29$

(iii) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
$= (3)^3+3(10)(3) = 117$

(iv) $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

(ii) -லிருந்து, $\alpha^2+\beta^2 = 29$

$= 29^2-2\times(10)^2 = 641$

(v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{49-20}{10} = \frac{29}{10}$

(vi) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$= \frac{(-343)-3(10\times(-7))}{10}$

$= \frac{-343+210}{10} = \frac{-133}{10}$

3.46. $3x^2+7x-2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ **(ii)** $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

தீர்வு :

$3x^2+7x-2=0$, இங்கு $a=3, b=7, c=-2$

α மற்றும் β சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$\therefore \alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{3}$;

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3}$

(i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \frac{\left(\frac{-7}{3}\right)^2-2\left(\frac{-2}{3}\right)}{\frac{-2}{3}} = \frac{-61}{6}$

(ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$= \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$= \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3-3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{-\frac{7}{3}} = \frac{67}{9}$

3.47. $2x^2-x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களையுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ **(ii)** $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$ **(iii)** $2\alpha+\beta, 2\beta+\alpha$

தீர்வு :

$2x^2-x-1=0$, இங்கு $a=2, b=-1, c=-1$

$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

(i) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

மூலங்களின் கூடுதல் $= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}$

$= \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

தேவையான சமன்பாடு, x^2- (மூலங்களின் கூடுதல்) $x+$ (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) $=0$

$x^2-(-1)x-2 = 0$ இதிலிருந்து $x^2+x-2=0$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $\alpha^2\beta, \beta^2\alpha$

மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $(\alpha^2\beta)\times(\beta^2\alpha) = \alpha^3\beta^3$

$= (\alpha\beta)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

தேவையான சமன்பாடு, x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + (மூலங்களின் பெக்கற்பலன்) = 0

$x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{8} = 0$ இதிலிருந்து $8x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii) $2\alpha+\beta, 2\beta+\alpha$

மூலங்களின் கூடுதல் $= 2\alpha+\beta+2\beta+\alpha$

$= 3(\alpha+\beta)$

$= 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்

$= (2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha)$

$= 4\alpha\beta+2\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta$

$= 5\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)$

$= 5\alpha\beta+2\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$

$= 5\left[-\frac{1}{2}\right]+2\left[\frac{1}{4}-2\times-\frac{1}{2}\right]$

$= 0$

தேவையான சமன்பாடு : x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) = 0

$x^2 - \frac{3}{2}x + 0 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0$

முன்னேற்றச் சோதனை

1.

இருபடிச் சமன்பாடு	இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (α மற்றும் β)	x^2 மற்றும் x –யின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி	மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha+\beta$	மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $\alpha\beta$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	முடிவு
$4x^2 - 9x + 2 = 0$							
$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2 = 0$							
$2x^2 - 15x - 27 = 0$							

விடை:

இருபடிச் சமன்பாடு	இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (α மற்றும் β)	x^2 மற்றும் x –யின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி	மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha+\beta$	மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $\alpha\beta$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	முடிவு
$4x^2 - 9x + 2 = 0$	$2, \frac{1}{4}$	4, –9, 2	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை
$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2 = 0$	$\frac{4}{5}, \frac{4}{5}$	$25, -\frac{8}{5}, \frac{16}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{25}$	மெய் மற்றும் சமம்
$2x^2 - 15x - 27 = 0$	$\frac{-3}{2}, 9$	2, – 15, – 27	$\frac{15}{2}$	$-\frac{27}{2}$	$\frac{15}{2}$	$-\frac{27}{2}$	மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை

பயிற்சி 3.14

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளை $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ வாயிலாக மாற்றி எழுதுக.

(i) $\frac{\alpha}{3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha}$ (ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}$

(iii) $(3\alpha-1)(3\beta-1)$ (iv) $\frac{\alpha+3}{\beta}+\frac{\beta+3}{\alpha}$

தீர்வு :

(i) $\frac{\alpha}{3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{3\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{3\alpha\beta}$

(ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$

(iii) $(3\alpha-1)(3\beta-1)=9\alpha\beta-3\alpha-3\beta+1$

$=9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1$

(iv) $\frac{\alpha+3}{\beta}+\frac{\beta+3}{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+3)+\beta(\beta+3)}{\alpha\beta}$

$=\frac{\alpha^2+3\alpha+\beta^2+3\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha^2+\beta^2)+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

2. $2x^2-7x+5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. [குறிப்பு: தீர்வு தேவையில்லை]

(i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}$

தீர்வு :

கொ.ப : சமன்பாடு $2x^2-7x+5=0$

$ax^2+bx+c=0$ உடன் ஒப்பிட

$a=2,\ b=-7,\ c=5$

α, β என்பன மூலங்கள்

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $=\alpha+\beta$

$=-\frac{b}{a}=\frac{7}{2}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $=\alpha\beta$

$=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$

(i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$

$=\frac{7/2}{5/2}=\frac{7}{5}$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{5}{2}}$

$=\frac{\frac{49}{4}-5}{\frac{5}{2}}=\left(\frac{49-20}{4}\right)\times\frac{2}{5}$

$=\frac{29}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{29}{10}$

(iii) $\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}=\frac{(\alpha+2)^2+(\beta+2)^2}{(\alpha+2)(\beta+2)}$

$=\frac{\alpha^2+4\alpha+4+\beta^2+4\beta+4}{\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4}$

$=\frac{(\alpha^2+\beta^2)+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}$

$=\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)+4\left(\frac{7}{2}\right)+8}{\left(\frac{5}{2}\right)+2\left(\frac{7}{2}\right)+4}$

$=\frac{\frac{49}{4}+17}{\frac{5}{2}+11}$

$=\frac{117}{4}\times\frac{2}{27}=\frac{117}{54}$

3. $x^2+6x-4=0$ -யின் மூலங்கள் α, β எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) α^2 மற்றும் β^2 **(ii)** $\frac{2}{\alpha}$ மற்றும் $\frac{2}{\beta}$

(iii) $\alpha^2\beta$ மற்றும் $\beta^2\alpha$

தீர்வு :

கொ.ப : சமன்பாடு $x^2 + 6x - 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 1, b = 6, c = -4$

α, β என்பன மூலங்கள்

மூலங்களின் கூடுதல் $= \alpha + \beta$

$= -\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \alpha\beta$

$= \frac{c}{a} = -\frac{4}{1} = -4$

(i)கொ.ப : மூலங்கள் α^2 மற்றும் β^2

மூலங்களின் கூடுதல் $= \alpha^2 + \beta^2$

$= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-6)^2 - 2(-4)$

$= 44$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \alpha^2\beta^2$

$= (\alpha\beta)^2$

$= (-4)^2 = 16$

∴ இருபடிச் சமன்பாடு :

x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் $= 0$

$x^2 - 44x + 16 = 0$

(ii)கொ.ப. : மூலங்கள் $\frac{2}{\alpha}$ மற்றும் $\frac{2}{\beta}$

மூலங்களின் கூடுதல் $= \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$

$= \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$= \frac{2(-6)}{-4} = 3$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{2}{\beta}\right)$

$= \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-4} = -1$

∴ இருபடிச் சமன்பாடு:

x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் $= 0$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

(iii) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $\alpha^2\beta$ மற்றும் $\beta^2\alpha$

மூலங்களின் கூடுதல் $= \alpha^2\beta + \beta^2\alpha$

$= \alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= (-4)(-6) = 24$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= (\alpha^2\beta)(\beta^2\alpha)$

$= \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3$

$= (-4)^3 = -64$

∴ இருபடிச் சமன்பாடு :

x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல்$= 0$

$x^2 - 24x - 64 = 0$

4. α, β என்பன $7x^2 + ax + 2 = 0$ -யின் மூலங்கள் மற்றும் $\beta - \alpha = \frac{-13}{7}$ எனில், a-யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப: சமன்பாடு $7x^2 + ax + 2 = 0$

$Ax^2 + Bx + C = 0$ உடன் ஒப்பிட

$A = 7, B = a, C = 2$

α , β என்பன மூலங்கள்

மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + \beta = -\frac{B}{A} = -\frac{a}{7}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $\alpha\beta = \frac{C}{A} = \frac{2}{7}$

மற்றும் கொடுக்கப்பட்டது $\beta - \alpha = \frac{-13}{7}$

$(\alpha+\beta)^2 - (\beta-\alpha)^2 = 4\alpha\beta$

$\left(\frac{-a}{7}\right)^2 - \left(\frac{-13}{7}\right)^2 = 4\left(\frac{2}{7}\right)$

$\frac{a^2}{49} - \frac{169}{49} = \frac{8}{7}$

$a^2 - 169 = \frac{8\times 49}{7}$

$a^2 - 169 = 56$

$a^2 = 56 + 169$

$= 225$

$a = \pm 15$

5. $2y^2 - ay + 64 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றவை போல இருமடங்கு எனில், a-யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப: சமன்பாடு $2y^2 - ay + 64 = 0$

$A = 2,\ B = -a,\ C = 64$

கொ.ப : ஒரு மூலம் மற்றதைப் போல் இரு மடங்கு. மூலங்களை 'α', '2α' என்க

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + 2\alpha = -\frac{B}{A}$

$$3\alpha = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{6}$$

மூலங்களின் பெருக்கல் $(\alpha)(2\alpha) = \frac{C}{A}$

$$2\alpha^2 = \frac{64}{2}$$

$$= 32$$

$$\alpha^2 = 16$$

$$\left(\frac{a}{6}\right)^2 = 16$$

$$\frac{a}{6} = \pm 4$$

$$\Rightarrow a = 24, -24$$

6. மெய்யெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட $3x^2 + kx + 81 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் வர்க்கம் எனில், k- யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப : சமன்பாடு $3x^2 + kx + 81 = 0$

$a = 3,$

$b = k,$

$c = 81$

கொ.ப. ஒரு மூலம் மற்றொன்றின் வர்க்கம்.

$\therefore$ மூலங்களை 'α' மற்றும் 'α^2' என்க

மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + \alpha^2 = -b/a$

$$= \frac{-k}{3}$$

மூலங்களின் பெருக்கல் $(\alpha)(\alpha^2) = c/a$

$$\alpha^3 = \frac{81}{3}$$

$$= 27$$

$$\therefore \alpha = 3$$

$\alpha + \alpha^2 = -k/3$ ல் பிரதியிட,

$$(3 + 9)\ 3 = -k$$

$$k = -36$$

இருபடிச் சமன்பாடுகளின் வரைபடங்கள்

எடுத்துக்காட்டு

3.48. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளின் தன்மையை வரைபடம் மூலம் ஆராய்க

(i) $x^2 + x - 12 = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

தீர்வு :

(i) $x^2 + x - 12 = 0$

படி 1: $y = x^2 + x - 12$ என்ற சமன்பாட்டின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

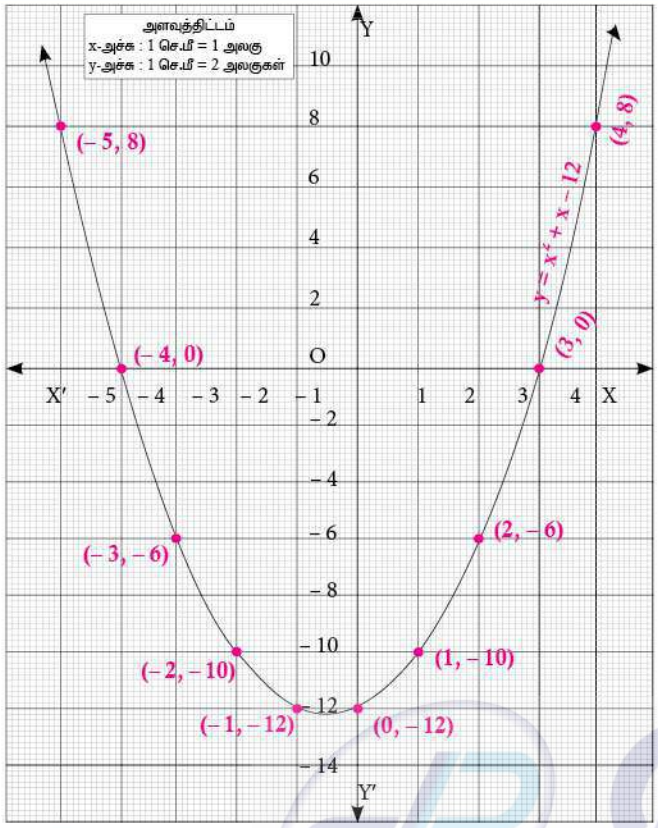
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	0	−6	−10	−12	−12	−10	−6	0	8

படி 2: (x, y) என்ற வரிசைச் சோடி உடைய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும்.

படி 3: பரவளையம் வரைந்து அது X-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

படி 4: பரவளையம் X-அச்சை (− 4, 0) மற்றும் (3, 0) என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இப்புள்ளிகளின் x − ஆயத் தொலைவுகள் − 4 மற்றும் 3.

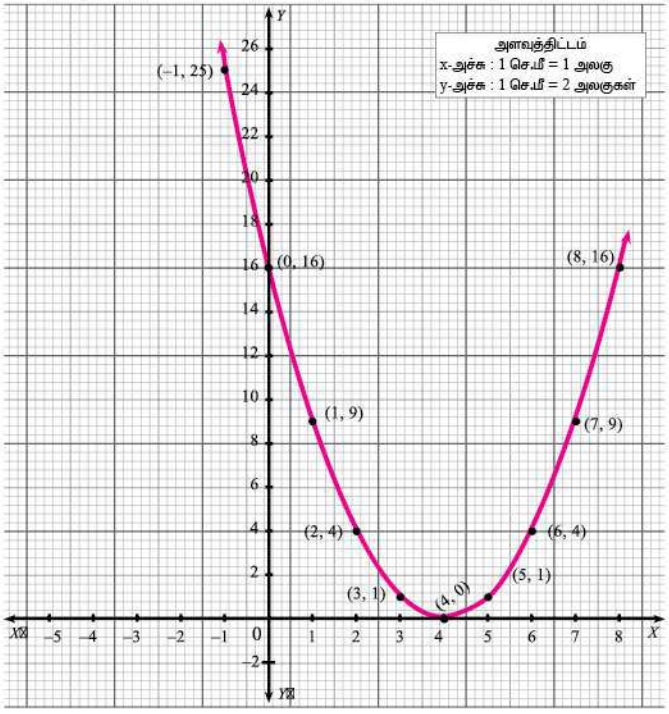
இங்கு $x^2 + x - 12 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாடு X-அச்சை இருவேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே, இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரு சமமற்ற மெய்யெண்களாக இருக்கும்.



(ii) $x^2 - 8x + 16 = 0$

படி 1: $y = x^2 - 8x + 16$ என்ற சமன்பாட்டின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

x	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16



படி 2: (x, y) என்ற வரிசை சோடி உடைய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும்.

படி 3: பரவளையம் வரைந்து அது X-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

படி 4: பரவளையம் X-அச்சை (4, 0) என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இப்புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவு 4.

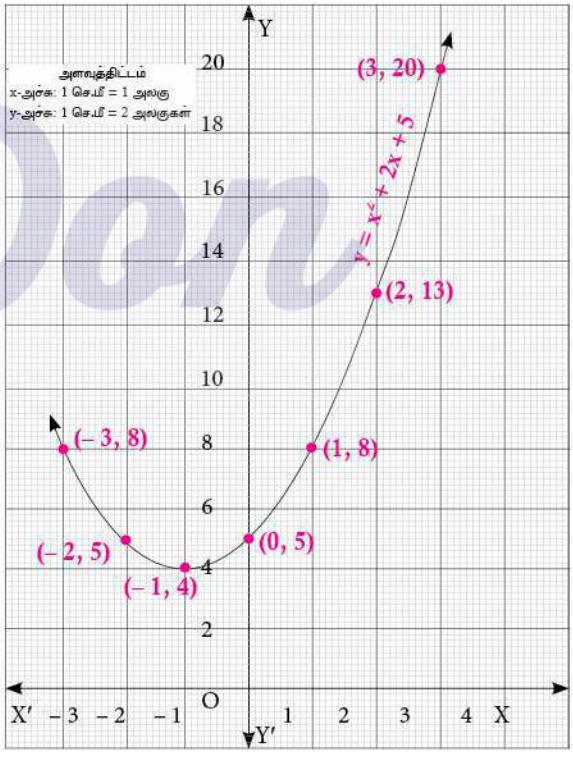
X-அச்சை ஒரே புள்ளியில் வெட்டுவதால் $x^2 - 8x + 16 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மற்றும் சமமான தீர்வுகள் உண்டு.

(iii) $x^2 + 2x + 5 = 0$

$y = x^2 + 2x + 5$ என்க.

படி 1: $y = x^2 + 2x + 5$ என்ற சமன்பாட்டின் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	5	4	5	8	13	20



படி 2: (x, y) என்ற வரிசைச் சோடி உடைய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

படி 3: இப்புள்ளிகளை நேர்கோடற்ற இழைவான வளைவரையில் (smooth curve) இணைத்துப் பெறப்பட்ட வளைவரை $y = x^2 + 2x + 5$ -ன் வரைபடம் ஆகும்.

படி 4: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் பரவளையமானது X-அச்சை எந்தப் புள்ளியிலும் வெட்டவில்லை/ தொட்டு செல்லவில்லை. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெண்யெண் மூலங்கள் இல்லை.

3.49. $y = 2x^2$ என்ற வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் $2x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

படி 1: $y = 2x^2$ -ன் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

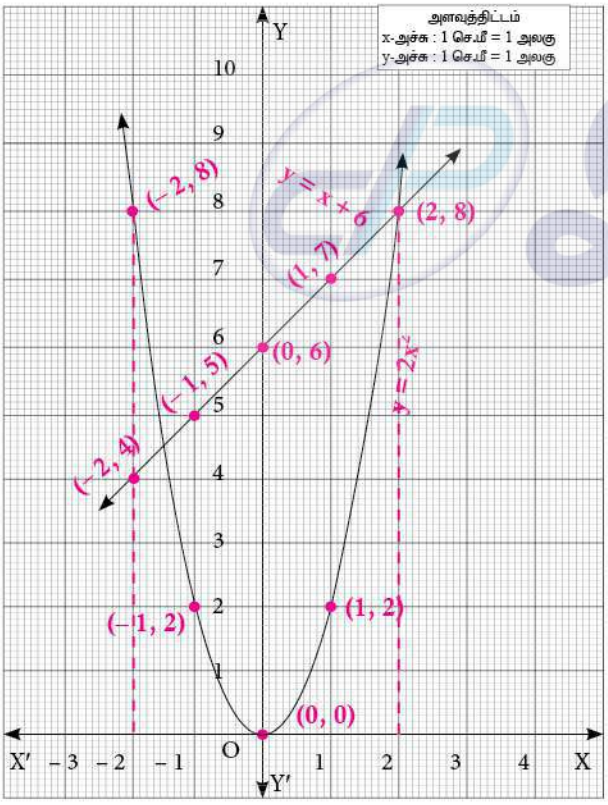
x	– 2	– 1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

படி 2: $2x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு, முதலில் $y = 2x^2$ -லிருந்து $2x^2 - x - 6 = 0$ ஐ கழிக்க வேண்டும்.

எனவே, $y = 2x^2$

$0 = 2x^2 - x - 6$ (–)

$y = x + 6$



$y = x + 6$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். $y = x + 6$ நேர்கோட்டின் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

x	– 2	– 1	0	1	2
y	4	5	6	7	8

படி 3: $y = 2x^2$ என்ற பரவளையம் மற்றும் $y = x + 6$ என்ற நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகள் (–1.5, 4.5) மற்றும் (2, 8).

படி 4: இப்புள்ளிகளின் x-ஆயத் தொலைவுகள் –1.5 மற்றும் 2 ஆகும்.

எனவே, சமன்பாடு $2x^2 - x - 6 = 0$ -யின் தீர்வுகள் –1.5 மற்றும் 2 ஆகும்.

3.50. $y = x^2 + 4x + 3$ -ன் வரைபடம் வரைந்து அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு :

படி 1: $y = x^2 + 4x + 3$ -ன் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2
y	3	0	– 1	0	3	8	15

படி 2: $x^2 + x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதற்கு, முதலில் $y = x^2 + 4x + 3$ -லிருந்து $x^2 + x + 1 = 0$ -ஐ கழிக்க வேண்டும்.

$y = x^2 + 4x + 3$

$0 = x^2 + x + 1$ (–)

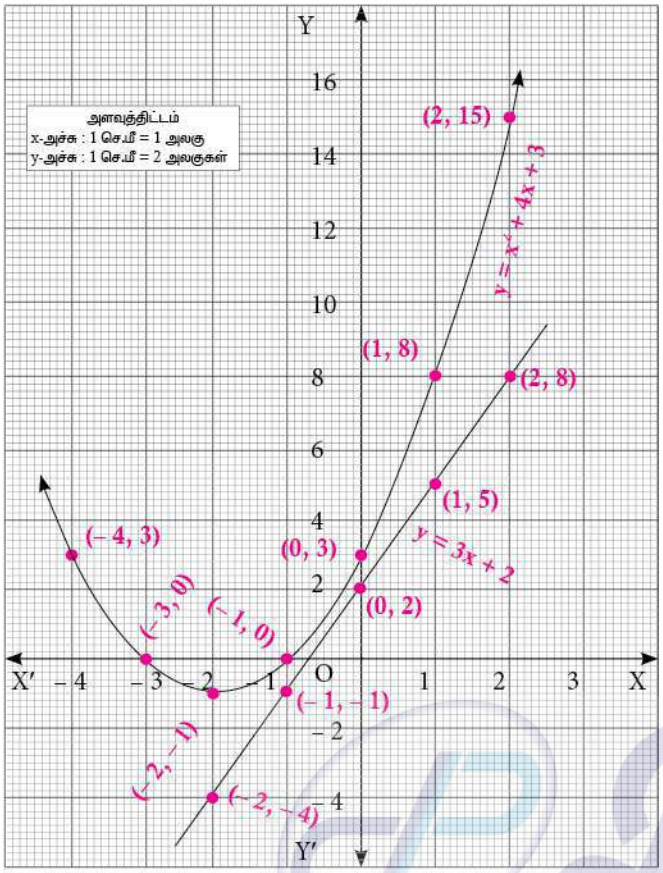
$y = 3x + 2$

இங்கு $y = 3x + 2$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். இதன் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

x	– 2	– 1	0	1	2
y	– 4	– 1	2	5	8

படி3: $y = 3x + 2$ என்ற நேர்கோட்டின் வரைபடம் $y = x^2 + 4x + 3$ என்ற பரவளையத்தை எந்த ஒரு புள்ளியிலும் வெட்டாமல்/தொடாமல் செல்கிறது.

எனவே, $x^2 + x + 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வுகள் இல்லை.

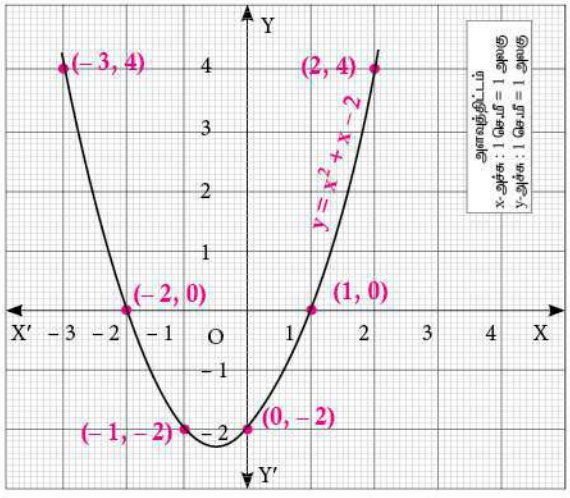


3.51. $y = x^2 + x - 2$-ன் வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் $x^2 + x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

படி 1: $y = x^2 + x - 2$ -ன் வரைபடம் வரைவதற்குக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணை மதிப்புகளைத் தயார் செய்க.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2
y	4	0	– 2	– 2	0	4



படி 2: $x^2 + x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்பதற்கு, $y = x^2 + x - 2$ - யிலிருந்து $x^2 + x - 2 = 0$ -ஐ கழிக்க வேண்டும்.

எனவே $y = x^2 + x - 2$

$0 = x^2 + x - 2$ (–)

$y = 0$

இங்கு, $y = 0$ என்பது X-அச்சு ஆகும்.

படி 3: $x^2 + x - 2$ என்ற பரவளையம் X-அச்சை $(-2, 0)$ மற்றும் $(1, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

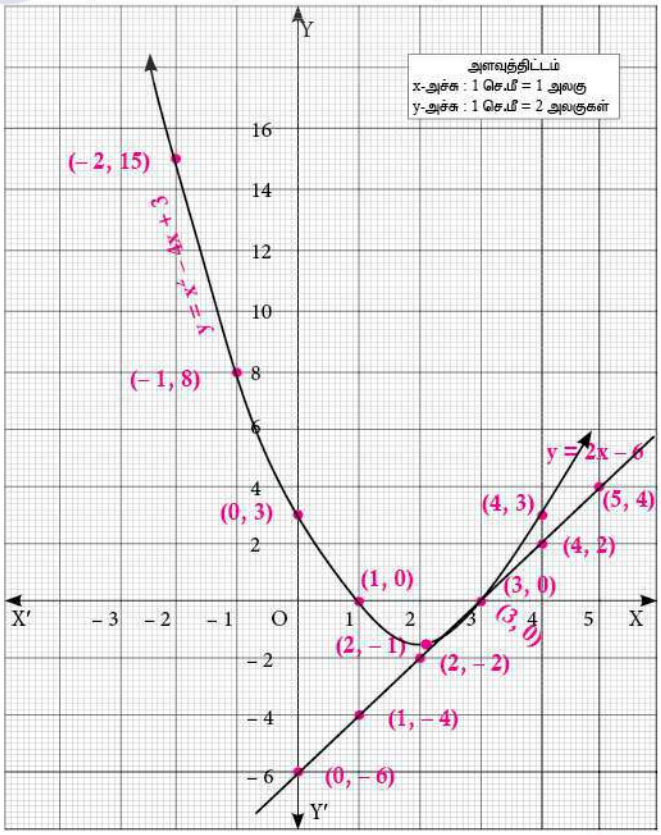
படி 4: இப்புள்ளிகளின் x -ஆயத்தொலைவுகள் – 2 மற்றும் 1 ஆகும். எனவே, சமன்பாடு $x^2 + x - 2 = 0$ -ன் தீர்வுகள் – 2 மற்றும் 1.

3.52. $y = x^2 - 4x + 3$ -யின் வரைபடம் வரைந்து அதன்மூலம் $x^2 - 6x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

படி 1: $y = x^2 - 4x + 3$ -யின் வரைபடம் வரைவதற்குக் கீழ்க்கண்ட மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

x	– 2	– 1	0	1	2	3	4
y	15	8	3	0	– 1	0	3



படி 2: $x^2 - 6x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்பதற்கு, $y = x^2 - 4x + 3$ - லிருந்து $x^2 - 6x + 9 = 0$ -ஐக் கழிக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{rl} \text{எனவே } y &= x^2 - 4x + 3 \\ 0 &= x^2 - 6x + 9 \quad (-) \\ \hline y &= 2x - 6 \end{array}$$

$y = 2x - 6$ என்பது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். $y = 2x - 6$ -யின் வரைபடம் வரைவதற்கு மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்த வேண்டும்.

x	0	1	2	3	4	5
y	– 6	– 4	– 2	0	2	4

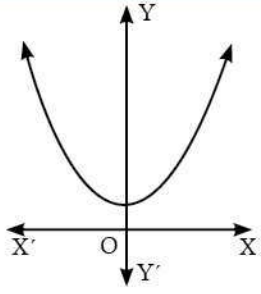
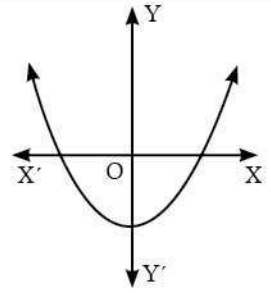
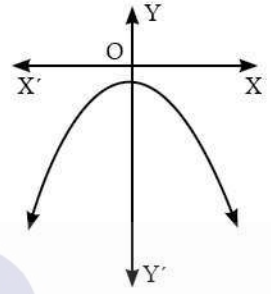
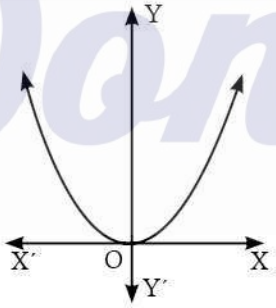
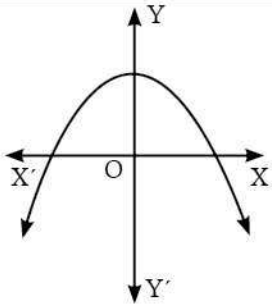
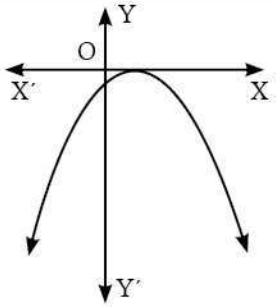
$y = 2x - 6$ என்ற பரவளையமும் $y = x^2 - 4x + 3$ என்ற நேர்கோடும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

படி 3: $y = x^2 - 4x + 3$ என்ற பரவளையமும் $y = 2x - 6$ என்ற நேர்கோடும் (3, 0) என்ற புள்ளியில் தொடுகின்றன.

எனவே, இதன் x-ஆயத் தொலைவு 3 என்பதே $x^2 - 6x + 9 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்களை X-அச்சை வெட்டும்போது உண்டாகும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் அதற்கு உண்டான தீர்வுகளின் தன்மையையும் இணைக்கவும்.

	வரைபடங்கள்	x-அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	தீர்வுகளின் தன்மை
1		2	மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள்
2		1	மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை.
3		2	மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை.
4		0	மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள்
5		0	மெய் மற்றும் சமம் இல்லாத மூலங்கள்
6		1	மெய் மற்றும் சமம் இல்லாத மூலங்கள்

விடை:

	புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	தீர்வுகளின் மூலங்களின் தன்மை
1	0	மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை
2	2	மெய் மற்றும் சமம் இல்லாத மூலங்கள்
3	0	மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை
4	1	மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள்
5	2	மெய் மற்றும் சமம் இல்லாத மூலங்கள்
6	1	மெய் மற்றும் சமமான மூலங்கள்

பயிற்சி 3.15

1. கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளின் வரைபடம் வரைக. அவற்றின் தீர்வுகளின் தன்மையைக் கூறுக.

(i) $x^2 - 9x + 20 = 0$

(ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(iii) $x^2 + x + 7 = 0$

(iv) $x^2 - 9 = 0$

(v) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(vi) $(2x - 3)(x + 2) = 0$

தீர்வு :

(i) $x^2 - 9x + 20 = 0$

$y = x^2 - 9x + 20$ என்க.

அட்டவணை மதிப்புகள்

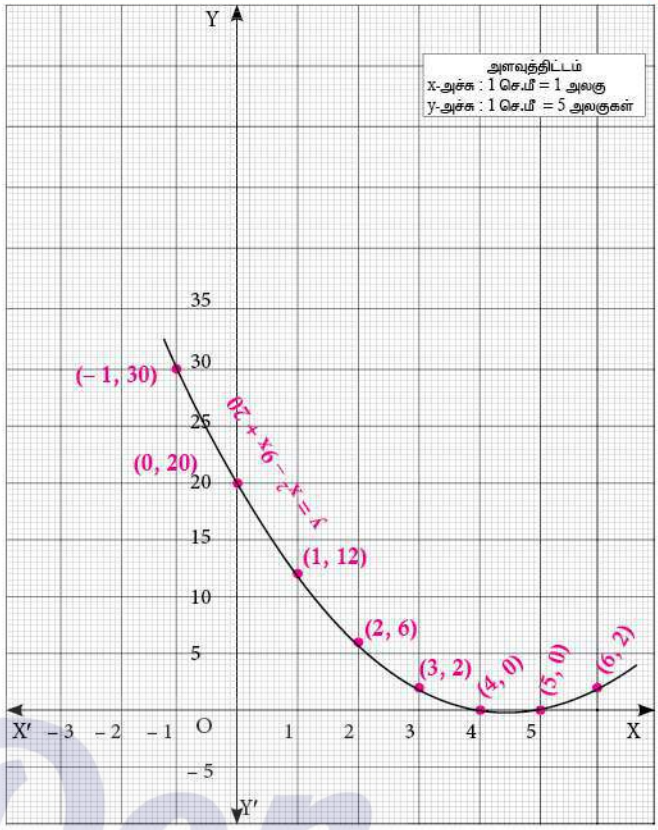
x	–1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	1	0	1	4	9	16	25	36
–9x	9	0	–9	–18	–27	–36	–45	–54
20	20	20	20	20	20	20	20	20
y	30	20	12	6	2	0	0	2

வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்க, நமக்குக் கிடைப்பது $y = x^2 - 9x + 20$

பரவளையம் X-அச்சை (4, 0) மற்றும் (5, 0) என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

எனவே, தீர்வு x = 4, 5

பரவளையம் X-அச்சை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.



(ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$y = x^2 - 4x + 4$ என்க.

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	– 2	– 1	0	1	2	3
x^2	4	1	0	1	4	9
– 4x	8	4	0	– 4	– 8	– 12
4	4	4	4	4	4	4
y	16	9	4	1	0	1

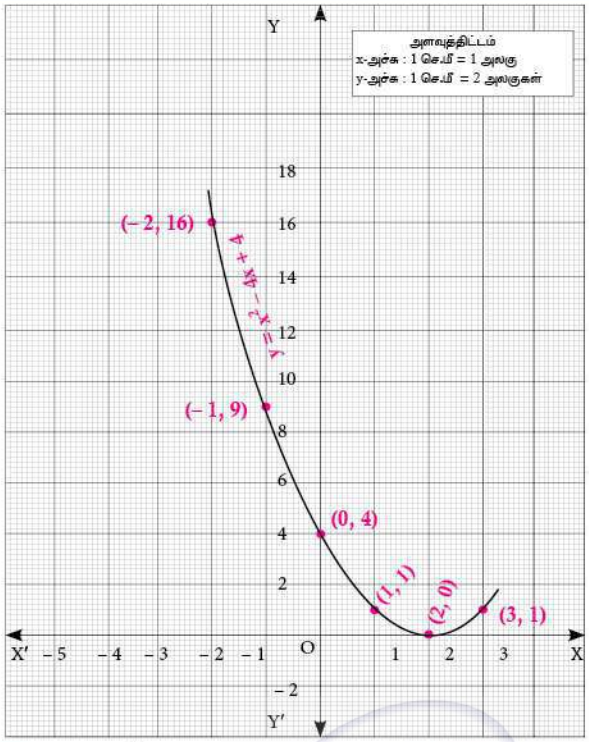
வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்க, நமக்குக் கிடைப்பது,

$y = x^2 - 4x + 4$

பரவளையம் X-அச்சை (2, 0) என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

எனவே, தீர்வு x = 2

பரவளையம் X-அச்சை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுவதால் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமானவை.

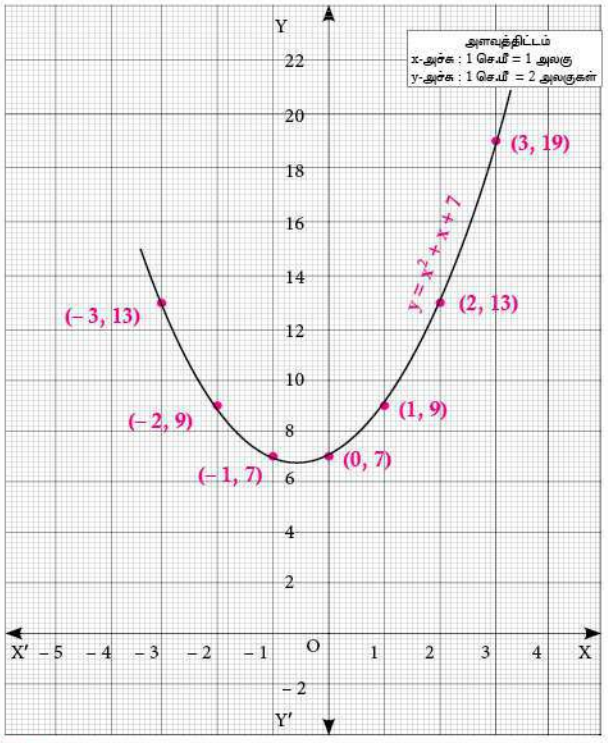


(iii) $x^2 + x + 7 = 0$

$y = x^2 + x + 7$ என்க.

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
7	7	7	7	7	7	7	7
y	13	9	7	7	9	13	19



வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்த பின் இணைக்க கிடைப்பது,

$y = x^2 + x + 7$

இங்கு பரவளையம் x - அச்சை வெட்டவில்லை. எனவே இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மூலங்கள் கிடையாது.

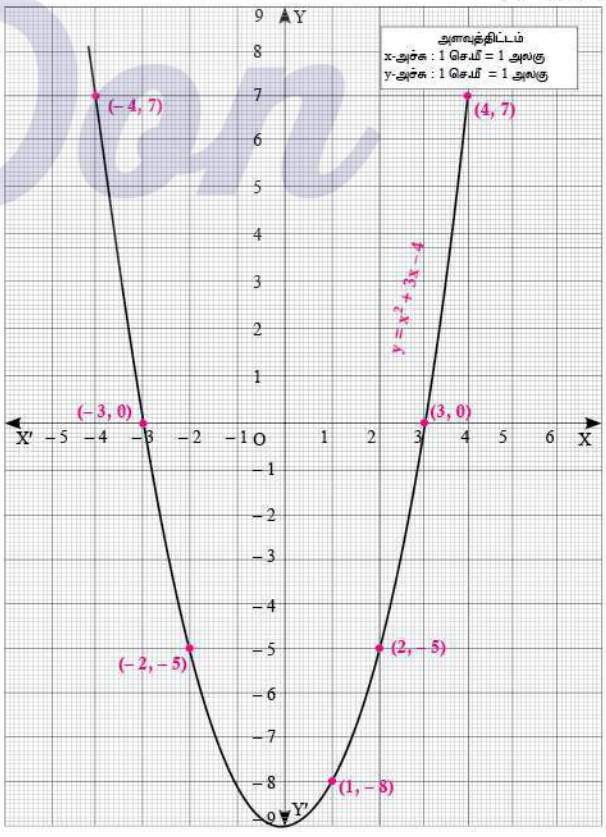
(iv) $x^2 - 9 = 0$

$y = x^2 - 9$ என்க

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	3	9	16
–9	–9	–9	–9	–9	–9	–9	–9	–9	–9
y	7	0	–5	–8	–9	–8	–5	0	7

வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட வேண்டிய புள்ளிகள் (– 4, 7), (– 3, 0) (– 2, – 5), (0, – 9), (1, – 8), (2, – 5), (3, 0), (4, 7)



வரைபடத்திலிருந்து $y = x^2 - 9$ என்ற வளைவரை X - அச்சை (– 3, 0) மற்றும் (3, 0) ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

∴ தீர்வு: $x = -3, 3$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமற்றவை.

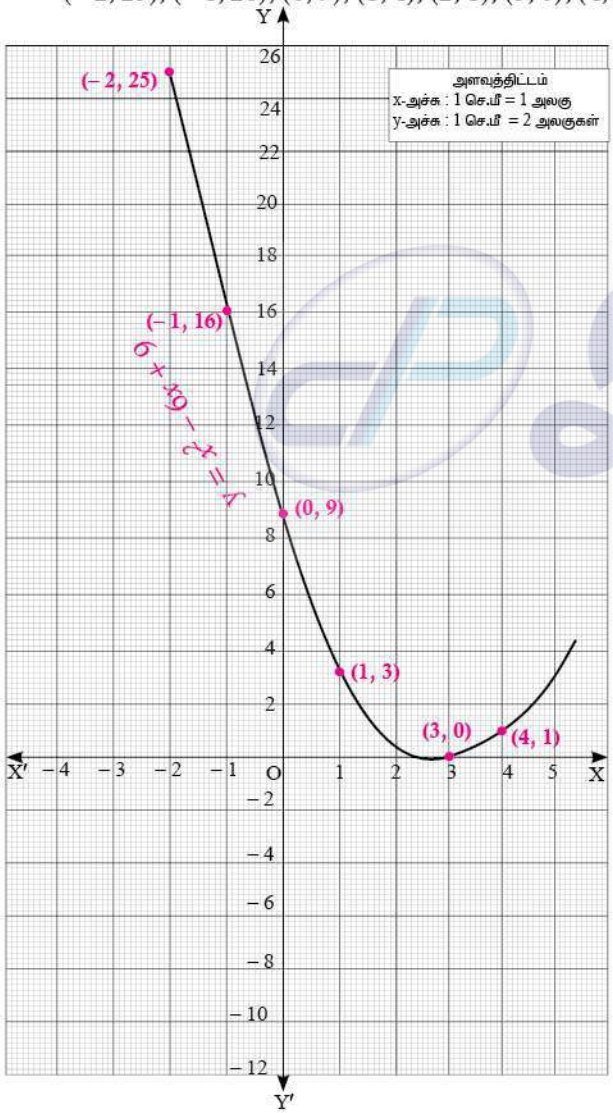
(v) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$y = x^2 - 6x + 9$ என்க.

அட்டவணை மதிப்புகள்:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
x^2	4	1	0	1	4	9	16
–6x	12	6	0	–6	–12	–18	–24
9	9	9	9	9	9	9	9
g	25	26	9	4	1	0	1

வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட வேண்டிய புள்ளிகள் (– 2, 25), (– 1, 26), (0, 9), (1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1)



வரைபடத்திலிருந்து, $y = x^2 - 6x + 9$ என்ற வளைவரை X - அச்சை (3, 0) என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

∴ தீர்வு: $x = 3, 3$

எனவே, மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

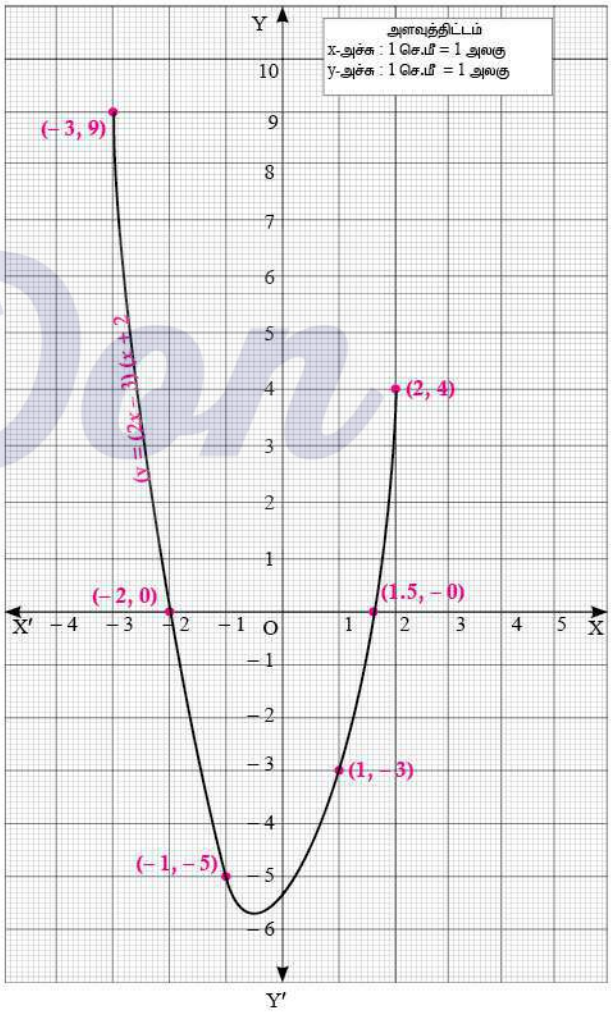
(vi) $(2x^2 - 3)(x + 2) = 0$

$y = (2x - 3)(x + 2)$

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	– 3	– 2	– 1	0	1	1.5	2
2x – 3	– 9	– 7	– 5	– 3	– 1	0	1
x + 2	– 1	0	1	2	3	3.5	4
y	9	0	– 5	– 6	– 3	0	4

வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட வேண்டிய புள்ளிகள் (– 3, 9), (– 2, 0) (– 1, – 5), (0, – 6), (1, – 3), (1.5, 0) மற்றும் (2, 4)



வரைபடத்திலிருந்து,

$y = (2x^2 - 3)$ (–2, 0) என்ற வளைவரை X - அச்சை (–2, 0) மற்றும் (1.5, 0) ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

∴ தீர்வு $x = -2, 3/2$

எனவே, மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமற்றவை.

2. $y = x^2 - 4$ வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - x - 12 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு : $y = x^2 - 4$

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
– 4	– 4	–4	– 4	– 4	– 4	– 4	– 4	– 4	– 4
y	12	5	0	– 3	– 4	– 3	0	5	12

வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்க, $y = x^2 - 4$ என்ற வளைவரை கிடைக்கிறது.

$x^2 - x - 12 = 0$, என்பதைத் தீர்க்க,

$y = x^2 - 4$ லிருந்து $x^2 - x - 12 = 0$ என்பதைக் கழிக்க.

$y = x^2 + 0x - 4$

$0 = x^2 - x - 12$

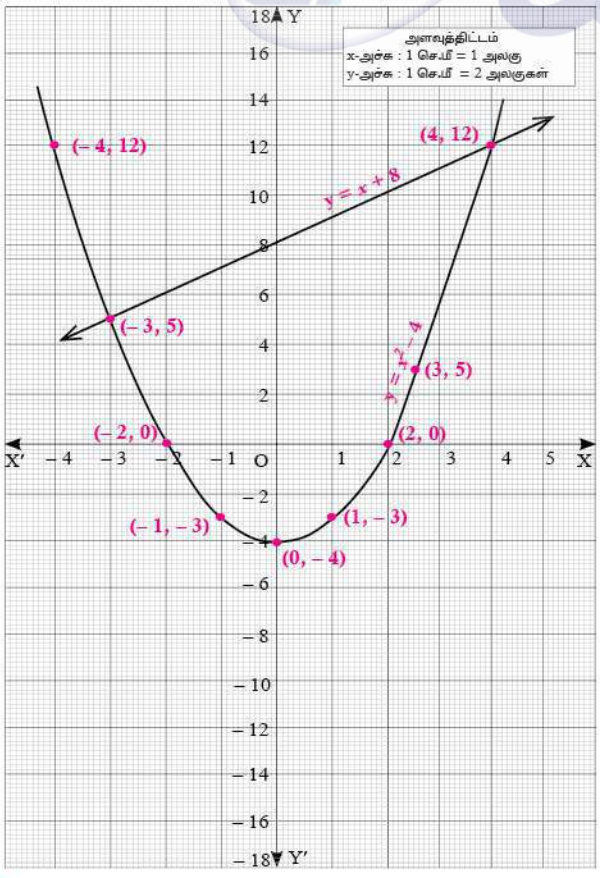
$y = x + 8$ என்ற சமன்பாடு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கிறது.

$y = x + 8$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கான வரைபடம் வரைய

x	-2	-1	0	1	2
y	6	7	8	9	10

நேர்க்கோடு, பரவளையத்தை (4, 12) மற்றும் (-3, 5) ஆகிய புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

தீர்வு : x = 4, -3



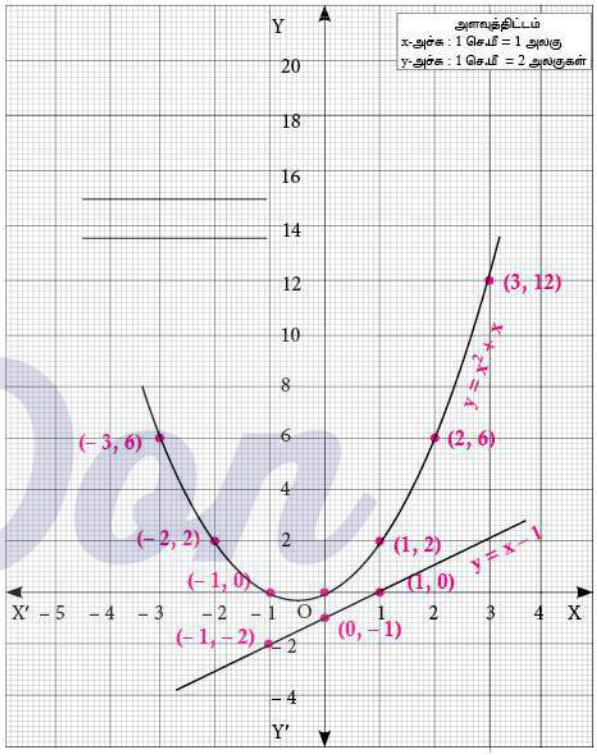
3. $y = x^2 + x$ -யின் வரைபடம் வரைந்து $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

$y = x^2 + x$

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
y	6	2	0	0	2	6	12



புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை இணைக்க $y = x^2 + x$ என்பதன் வரைபடம் கிடைக்கிறது.

இப்போது $y = x^2 + x$ லிருந்து $x^2 + 1 = 0$ என்பதைக் கழிக்க

$$\begin{array}{rl} \therefore\ y &= x^2 + x \\ 0 &= x^2 + 1 \quad (-) \\ \hline y &= x - 1 \end{array}$$

$y = x - 1$ என்பது ஒரு நேர்க்கோடு

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	0	1	–1
y	– 1	0	– 2

புள்ளிகளைக் குறித்து, அவற்றை இணைக்க நேர்கோடு கிடைக்கிறது. வரைபடத்திலிருந்து நேர்கோடு பரவளையத்தை வெட்டவில்லை என்பது தெரிகிறது. எனவே, இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு தீர்வுகள் கிடையாது.

4. $y = x^2 + 3x + 2$ -யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 2x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

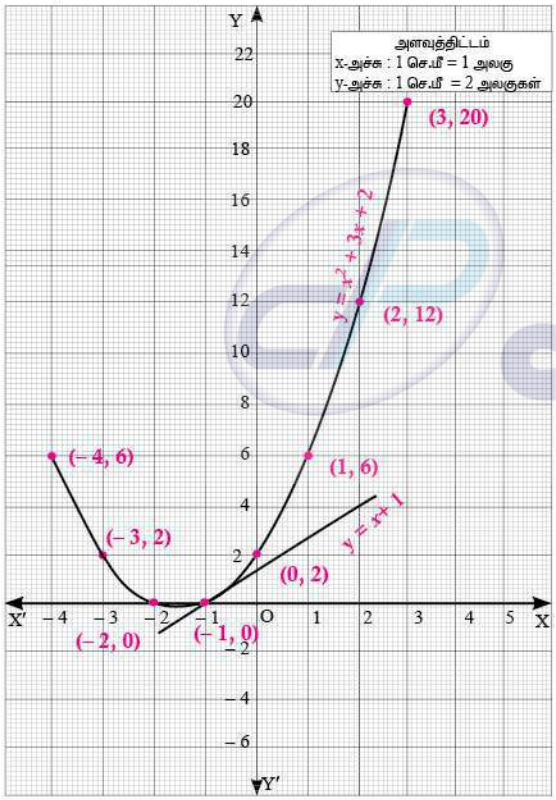
தீர்வு :

$y = x^2 + 3x + 2$

அட்டவணை மதிப்புகள்:

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
3x	–12	– 9	– 6	– 3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

வரைபடத்தில் குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள்
(– 3, 2), (– 2, 0) (– 1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12) மற்றும் (3, 20)



இப்போது, $y = x^2 + 3x + 2$

$x^2 + 2x + 1 = 0$, ஆகியவற்றைக் கழிக்க

$$y = x^2 + 3x + 2$$
$$0 = x^2 + 2x + 1$$
$$y = x + 1$$

$y = x + 1$ என்பது ஒரு நேர்க்கோடு

அட்டவணை

x	0	– 1	1
y	1	0	2

வளைவரை $y = x^2 + 3x + 2$ மற்றும் கோடு $y = x + 1$ என்பன $(-1, 0)$ புள்ளியில் வெட்டுகிறது. எனவே, $x^2 + 2x + 1 = 0$ ன் தீர்வு $x = -1, -1$ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

5. $y = x^2 + 3x - 4$ -யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 3x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

$y = x^2 + 3x - 4$

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
x^2	25	16	9	4	1	0	1	4
3x	–15	–12	–9	–6	–3	0	3	6
–4	–4	–4	–4	–4	–4	–4	–4	–4
y	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6

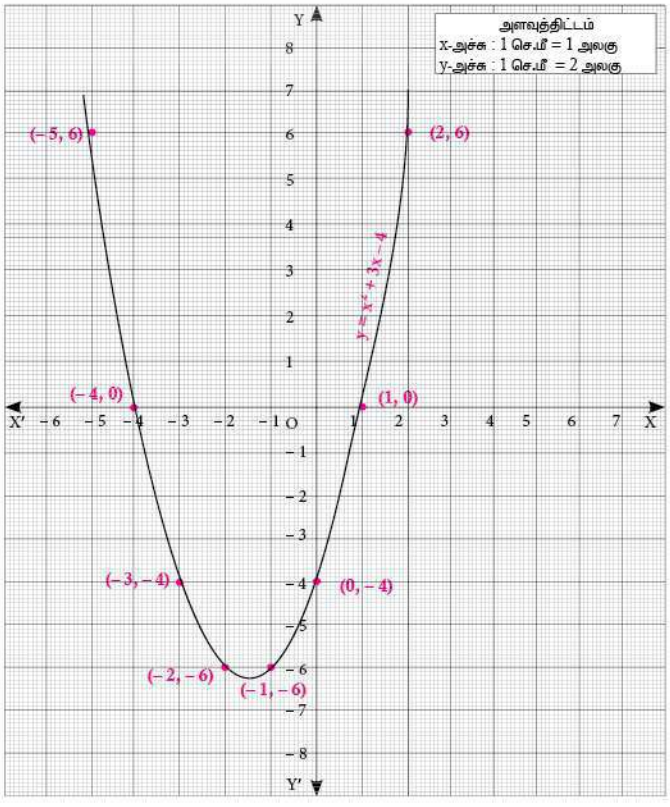
புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கக் கிடைப்பது $y = x^2 + 3x - 4$ என்ற பரவளையம்.

இப்போது $x^2 + 3x - 4 = 0$ லிருந்து $y = x^2 + 3x - 4$ என்பதைக் கழிக்க $y = x^2 + 3x - 4$

$$0 = x^2 + 3x - 4 \quad (-)$$
$$y = 0 \Rightarrow \text{X-அச்சு}$$

$y = x^2 + 3x - 4$ என்ற பரவளையம் X-அச்சை $(-4, 0)$, $(1, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

∴ தீர்வு: $x = -4, 1$



6. $y = x^2 - 5x - 6$ -யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - 5x - 14 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

$y = x^2 - 5x - 6$

அட்டவணை மதிப்புகள்

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49
−5x	10	5	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35
−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6	−6
y	8	0	−6	−10	−12	−12	−10	−6	0	8

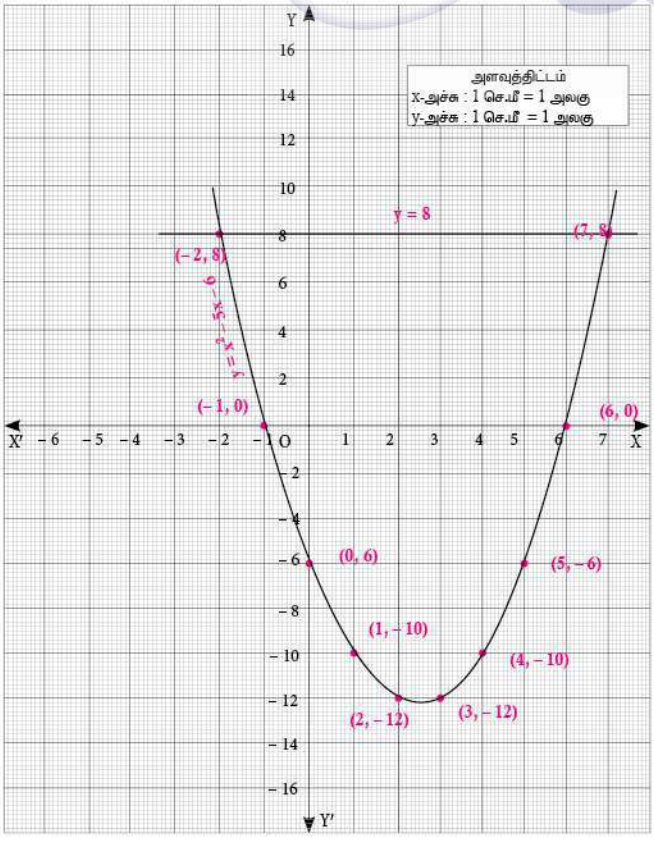
புள்ளிகள் வரைபடத்தில் குறிக்க $y = x^2 - 5x - 6$ என்ற பரவளையம் கிடைக்கிறது.

$y = x^2 - 5x - 6$ லிருந்து $x^2 - 5x - 14 = 0$ என்பதைக் கழிக்க

$$\begin{array}{rl} y &= x^2 - 5x - 6 \\ 0 &= x^2 - 5x - 14 \quad (-) \\ \hline y &= 8 \end{array}$$

$y = 8$ என்பது ஒரு நேர்கோடு

$y = 8$ என்ற நேர்கோடு $y = x^2 - 5x - 6$ என்ற பரவளையத்தை (− 2, 8) , (7, 8) ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ∴ தீர்வு: $x = -2, 7$



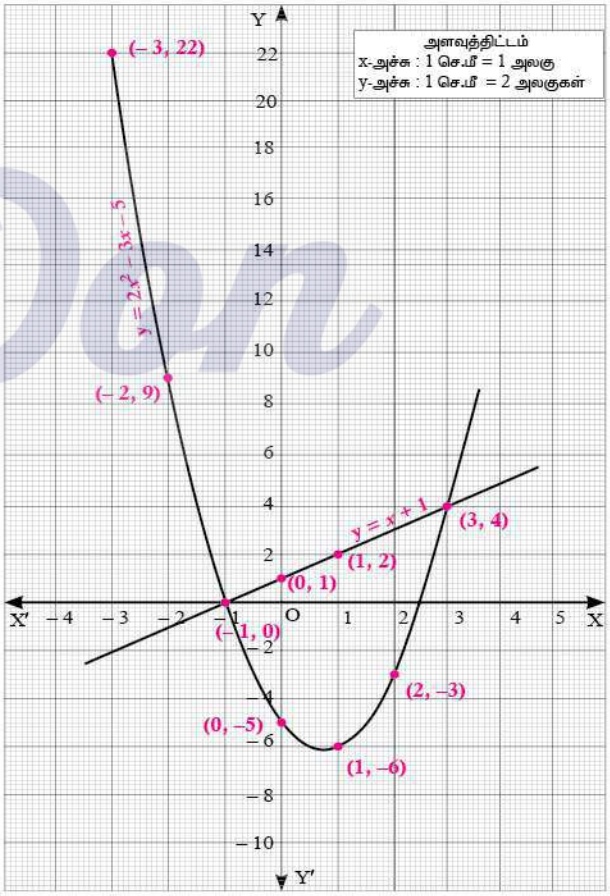
7. $y = 2x^2 - 3x - 5$ -யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $2x^2 - 4x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

அட்டவணை மதிப்புகள்:

x	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$-3x$	9	6	3	0	− 3	− 6	− 9
− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5
y	22	9	0	− 5	− 6	− 3	− 4

புள்ளிகள் (− 3, 22), (− 2, 9) (− 1, 0), (0, − 5), (1, − 6), (2, − 3) மற்றும் (3, − 4)



$y = 2x^2 - 3x - 5$ மற்றும் $2x^2 - 4x - 6 = 0$ ஆகியவற்றை கழிக்கக் கிடைப்பது

$$\begin{array}{rl} y &= 2x^2 - 3x - 5 \\ (-) \quad 0 &= 2x^2 - 4x - 6 \\ \hline y &= x + 1 \end{array}$$

அட்டவணை

x	0	− 1	1
y	3	0	6

$y = 2x^2 - 2x - 5$ என்ற வளைவரை $y = x + 1$ என்ற கோட்டை $(-1, 0)$ மற்றும் $(3, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

எனவே $2x^2 - 4x - 6 = 0$ (அல்லது) $x^2 - 2x - 3 = 0$ ன் தீர்வு $x = -1, 3$.

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமல்ல.

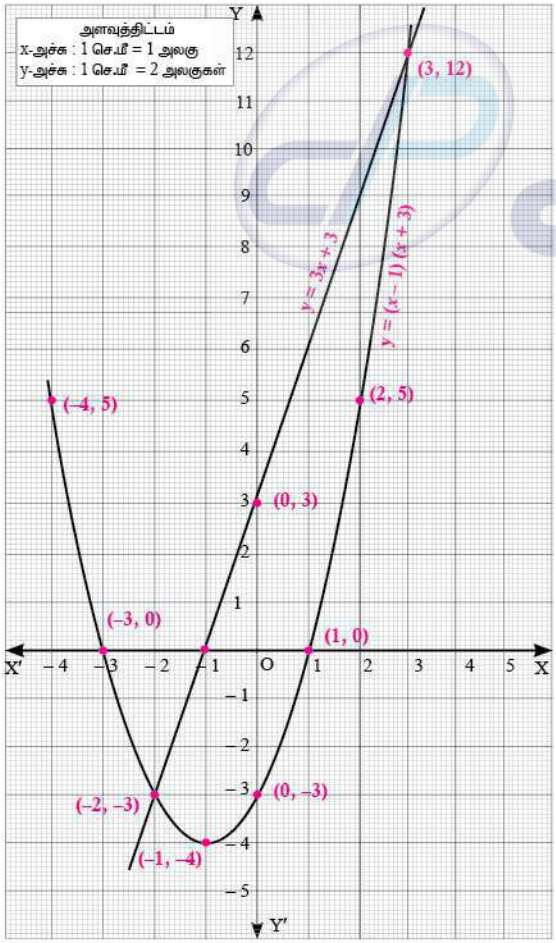
8. $y = (x - 1)(x + 3)$ -யின் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு:

அட்டவணை மதிப்புகள்:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x-1$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$x+3$	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

வரைபடத்தில் குறிக்கப்பட வேண்டிய புள்ளிகள் $(-4, 5), (-3, 0) (-2, -3), (-1, -4), (0, -3), (1, 0)$ மற்றும் $(2, 5)$



$y = x^2 + 3x - 3$ மற்றும் $x^2 - x - 6 = 0$ ஆகியவற்றைக் கழிக்கக் கிடைப்பது

$$\begin{array}{rl} & y = x^2 + 2x - 3 \\ (-) & 0 = x^2 - x - 6 \\ \hline & y = 3x + 3 \end{array}$$

அட்டவணை

x	0	-1	1
y	3	0	6

$y = x^2 + 2x - 3$ என்ற வளைவரை $y = 3x + 3$ என்ற கோட்டை $(-2, -3)$ மற்றும் $(3, 12)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

எனவே $x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = -2, 3$.

∴ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமல்ல.

அணிகள்

நினைவில் கொள்க

- எண்கள் மற்றும் மாறிகளைக் கொண்டு அமையும் செவ்வக அடுக்கு அமைப்பை 'அணி' என்கிறோம்.
- கிடைமட்ட அடுக்கு 'நிரை' எனவும், செங்குத்து அடுக்கு 'நிரல்' எனவும் அழைக்கப்படும்.
- அணியின் வரிசை = நிரைகளின் எண்ணிக்கை × நிரல்களின் எண்ணிக்கை = $m \times n$
- அணியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = mn.
- **நிரை அணி:** ஒரே ஒரு நிரையைக் கொண்ட அணி, நிரை அணி எனப்படும். எ.கா: $[8 \;\; 4 \;\; -1]$
- **நிரல் அணி:** ஒரே ஒரு நிரலைக் கொண்ட அணி, நிரல் அணி எனப்படும். எ.கா: $\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **சதுர அணி:** ஓர் அணியில் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும், நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் அது சதுர அணி எனப்படும். எ.கா $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix}$
- **மூலைவிட்ட அணி:** ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில், அது மூலைவிட்ட அணி எனப்படும். எ.கா : $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
- **திசையிலி அணி:** ஒரு மூலைவிட்ட அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருப்பின், அது திசையிலி அணி எனப்படும். $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
- **சமனி (அல்லது) அலகு அணி:**
  ஒரு திசையிலி அணியில், முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் '1' ஆக இருப்பின் அது சமனி அணி அல்லது அலகு அணி எனப்படும். மேலும் இது I எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
  எ.கா : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **பூச்சிய அணி (அல்லது) வெற்று அணி:**
  ஓர் அணியிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் அது பூச்சிய அணி அல்லது வெற்று அணி எனப்படும். எ.கா : $(0), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **முக்கோண அணி:**
  ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேலே உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் அது கீழ் முக்கோண அணி எனப்படும். எ.கா $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு கீழேயுள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியம் எனில் அது மேல் முக்கோண அணி எனப்படும். எ.கா: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

நிரை – நிரல் மாற்று அணி:

A என்ற அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றினால் கிடைப்பது A –யின் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். மேலும் இது A^T எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

எ.கா: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $(A^T)^T = A$.

சம அணிகள்:

A மற்றும் B ஆகியவற்றின் வரிசைகள் மற்றும் A யில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் B யில் உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுக்குச் சமம் எனில், A மற்றும் B என்பன சம அணிகள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

3.53. I, II, III என்ற மூன்று தொழிற்சாலைகளில் பணிபுரியும் ஆண்கள், பெண்கள் பற்றிய விவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்சாலை	ஆண்கள்	பெண்கள்
I	23	18
II	47	36
III	15	16

மேற்கண்ட தகவலை ஓர் அணி அமைப்பில் எழுதுக. இதில் இரண்டாவது நிரை மற்றும் முதலாவது நிரல் இடத்திலுள்ள உறுப்பு எதனைக் குறிக்கிறது?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களைக் கொண்டு 3×2 என்ற வரிசை கொண்ட அணியை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 47 & 36 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$$

இரண்டாவது நிரை மற்றும் முதல் நிரல் இடத்தில் உள்ள உறுப்பானது II-வது தொழிற்சாலையில் 47 ஆண்கள் பணிபுரியும் விவரத்தைக் குறிக்கிறது.

3.54. ஓர் அணியானது 16 உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அந்த அணிக்கு எத்தனை விதமான வரிசைகள் இருக்கும்?

தீர்வு :

ஓர் அணியின் வரிசை $m \times n$ எனில், அதற்கு mn உறுப்புகள் இருக்கும். 16 உறுப்புகளைக் கொண்ட அணிக்கு இருக்கக்கூடிய அனைத்து வரிசைகளையும் காண்போம்.

நிரை, நிரலைப் பெருக்கினால் 16கிடைக்கக்கூடிய இயல் எண்களின் சோடிகளைக் காண வேண்டும். அந்த விதமான வரிசைச் சோடிகள் (1, 16), (16, 1), (4, 4), (8, 2),(2, 8)

எனவே, நமக்குக் கிடைக்கும் அணியின் வரிசைகள் $1 \times 16, 16 \times 1, 4 \times 4, 2 \times 8, 8 \times 2$

3.55. $a_{ij} = i^2 j^2$ என்ற அமைப்பைக் கொண்ட 3×3 வரிசையுடைய அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

3×3 வரிசையுடைய அணியின் பொதுவடிவம்

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = i^2 j^2$

$a_{11} = 1^2 \times 1^2 = 1 \times 1 = 1$
$a_{12} = 1^2 \times 2^2 = 1 \times 4 = 4$
$a_{13} = 1^2 \times 3^2 = 1 \times 9 = 9$
$a_{21} = 2^2 \times 1^2 = 4 \times 1 = 4$
$a_{22} = 2^2 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$
$a_{23} = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$
$a_{31} = 3^2 \times 1^2 = 9 \times 1 = 9$
$a_{32} = 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$
$a_{33} = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81$

எனவே, தேவையான அணி

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix}$$

3.56. $\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணி சமன்பாட்டிலிருந்து a,b,c,d மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட அணிகள் சமம். எனவே ஒத்த உறுப்புகள் சமம்.

ஆகையால், $a - b = 1$ ... (1)

$2a + c = 5$ ... (2)

$2a - b = 0$ ... (3)

$3c + d = 2$ ... (4)

(3) -லிருந்து நாம் பெறுவது $2a - b = 0$

$2a = b$ ... (5)

$2a = b$ என்பதை (1) -யில் பிரதியிட, $a - 2a = 1$

இதிலிருந்து, $a = -1$

$a = -1$ என்பதை (5) -யில் பிரதியிட, $2(-1) = b$

இதிலிருந்து, $b = -2$

$a = -1$ என்பதை (2) -யில் பிரதியிட, $2(-1) + c = 5$

இதிலிருந்து, $c = 7$

$c = 7$ என்பதை (4) -யில் பிரதியிட, $3(7) + d = 2$

இதிலிருந்து, $d = -19$

எனவே, $a = -1, b = -2, c = 7, d = -19$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் இரண்டாவது நிரை மற்றும் மூன்றவாது நிரலில் உள்ள உறுப்பு எது?

விடை: $a_{23} = 5$

2. $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \tan\theta \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் வரிசை என்ன?

விடை: வரிசை = 3×1

3. கீழுள்ள அணியில் a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} என்பவை குறிக்கும் மதிப்புகளை எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & -4 & \sqrt{7} \\ 3 & 5/2 & 8 & 9 \\ 7 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

விடை: $a_{11} = 2$ $a_{22} = 9$ $a_{33} = 8$ $a_{44} = 4$

4. ஒரு நிரல் அணியில் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கை _____.

விடை: 1

5. ஒரு நிரை அணியில் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை _____.

விடை: 1

6. எந்தவோர் அலகு அணியிலும் மூலைவிட்டத்-திலில்லாத உறுப்புகள் _____ ஆகும்.

விடை: 0

7. 32 உறுப்புகளைக் கொண்ட சதுர அணி இருக்க முடியுமா?

விடை: இல்லை

பயிற்சி 3.16

1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியில்

(i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

(ii) அணியின் வரிசையைக் காண்க.

(iii) $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$ ஆகிய உறுப்புகளை எழுதுக.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 16

(ii) அணியின் வரிசை = நிரைகளின் எண்ணிக்கை × நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 4×4

(iii) $a_{22} = \sqrt{7}$, $a_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{24} = 5$, $a_{34} = 0$

$a_{43} = -11$, $a_{44} = 1$

2. 18 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்? ஓர் அணியின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 6 எனில், எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்?

தீர்வு :

கொ.ப : அணி A யில் 18 உறுப்புகள் உள்ளது.

$\therefore 1 \times 18, 18 \times 1, 9 \times 2, 2 \times 9, 6 \times 3, 3 \times 6$

ஆகிய வரிசைகள் இருக்க இயலும்.

அணியில் 6 உறுப்புகள் இருந்தால், அதன் வரிசை $1 \times 6, 6 \times 1, 2 \times 3, 3 \times 2$ என இருக்க இயலும்.

3. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு 3 × 3 வரிசையைக் கொண்ட அணி A = $[a_{ij}]$-யினைக் காண்க.

(i) $a_{ij} = |i - 2j|$ **(ii)** $a_{ij} = \frac{(i+j)^3}{3}$

தீர்வு :

(i) $a_{ij} = |i - 2j|$

அணியின் வரிசை 3 × 3 என்பதால், அதில் 9 உறுப்புகள் இருக்கும்.

$a_{11} = |1 - 2(1)| = |1 - 2| = |-1| = 1$

$a_{12} = |1 - 2(2)| = |1 - 4| = |-3| = 3$

$a_{13} = |1 - 2(3)| = |1 - 6| = |-5| = 5$

$a_{21} = |2 - 2(1)| = |2 - 2| = 0$

$a_{22} = |2 - 2(2)| = |2 - 4| = |-2| = 2$

$a_{23} = |2 - 2(3)| = |2 - 6| = |-4| = 4$

$a_{31} = |3 - 2(1)| = |3 - 2| = 1$

$a_{32} = |3 - 2(2)| = |3 - 4| = |-1| = 1$

$a_{33} = |3 - 2(3)| = |3 - 6| = |-3| = 3$

$$\therefore \text{அணி} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) $a_{ij} = \frac{(i+j)^3}{3}$

$a_{11} = \frac{(1+1)^3}{3} = \frac{(2)^3}{3} = 8/3$

$a_{12} = \frac{(1+2)^3}{3} = \frac{(3)^3}{3} = \frac{27}{3} = 9$

$a_{13} = \frac{(1+3)^3}{3} = \frac{(4)^3}{3} = \frac{64}{3}$

$a_{21} = \frac{(2+1)^3}{3} = \frac{(3)^3}{3} = \frac{27}{3} = 9$

$a_{22} = \frac{(2+2)^3}{3} = \frac{(4)^3}{3} = \frac{64}{3}$

$a_{23} = \frac{(2+3)^3}{3} = \frac{(5)^3}{3} = \frac{125}{3}$

$a_{31} = \frac{(3+1)^3}{3} = \frac{(4)^3}{3} = \frac{64}{3}$

$a_{32} = \frac{(3+2)^3}{3} = \frac{(5)^3}{3} = \frac{125}{3}$

$a_{33} = \frac{(3+3)^3}{3} = \frac{(6)^3}{3} = \frac{216}{3} = 72$

$$\therefore \text{அணி} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 9 & \frac{64}{3} \\ 9 & \frac{64}{3} & \frac{125}{3} \\ \frac{64}{3} & \frac{125}{3} & 72 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **எனில், A-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ **எனில், – A-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 3 \\ \sqrt{5} & -2 \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

$$(-A)^T = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{5} & -\sqrt{3} \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **எனில், $(A^T)^T = A$ என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{17} & 8 \\ 2 & 0.7 & 3 \\ 2 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & 5/2 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\therefore (A^T)^T = A$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

7. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளில் இருந்து x, y மற்றும் z -யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

தீர்வு :

(i) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த

$x = 3, y = 12, z = 3$

(ii) $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

$x + y = 6, \quad xy = 8, \quad 5 + z = 5$

$x + 8/x = 6 \quad y = 8/x \quad z = 5 - 5 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad z = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

$x = 4, 2$

$x = 4$ எனும்போது, $y = 2$

$x = 2$ எனும்போது, $y = 4$

$x = 4, y = 2, z = 0$ (அல்லது) $x = 2, y = 4, z = 0$

(iii) $\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$x + y + z = 9 \quad \ldots (1)$

$x + z = 5 \quad \ldots (2)$

$y + z = 7 \quad \ldots (3)$

$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2x + 2y + 3z = 21 \quad \ldots (4)$

$(1) \times 2 \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 18 \quad \ldots (5)$

$(4) - (5) \Rightarrow z = 3$

(3) ல் பிரதியிட,

$y + 3 = 7$

$y = 7 - 3 = 4$

$z = 3$ என (2) ல் பிரதியிட,

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3 = 2$

$\therefore \quad x = 2, y = 4, z = 3$

அணிகளின் மீதான செயல்கள்

நினைவில் கொள்க

- இரு அணிகளை கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ வேண்டுமெனில் ஒத்த வரிசையுடைய அணிகளில் ஒத்த உறுப்புகளை கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ வேண்டும்.
- ஓர் அணியை ஒரு திசையிலியால் (மாறிலி) பெருக்கும்போது, அவ்வணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் அந்த திசையிலியால் பெருக்க வேண்டும்.
- இரண்டு அணிகளின் பெருக்கல் என்பது முதல் அணியில் உள்ள நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், இரண்டாவது அணியில் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால் மட்டுமே சாத்தியம்.
- A என்ற அணியின் வரிசை $m \times n$ மற்றும் B என்ற அணியின் வரிசை $p \times q$ எனில் AB ஐக் காண $n = p$ மற்றும் BA ஐக் காண $q = m$ எனவும் இருத்தல் வேண்டும்.

  AB ன் வரிசை $= m \times q$

  BA ன் வரிசை $= p \times n$

எடுத்துக்காட்டு

3.57. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், $A + B$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+7 & 3+0 \\ 4+1 & 5+3 & 6+1 \\ 7+2 & 8+4 & 9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \\ 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

3.58. குழு 1, குழு 2, குழு 3 எனும் மூன்று குழுக்களில் உள்ள மாணவர்களுக்கு இரண்டு தேர்வுகள் நடத்தப்பட்டுத் தமிழ், ஆங்கிலம், அறிவியல் மற்றும் கணிதம் ஆகிய பாடங்களில் அவர்கள் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களை A மற்றும் B என்ற அணிகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், மூன்று குழுக்களில் உள்ள மாணவர்கள், இரண்டு தேர்வுகளிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களைக் காண்க.

$$A = \begin{matrix} \\ \text{குழு 1} \\ \text{குழு 2} \\ \text{குழு 3} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{தமிழ்} & \text{ஆங்கிலம்} & \text{அறிவியல்} & \text{கணிதம்} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 22 & 15 & 14 & 23 \\ 50 & 62 & 21 & 30 \\ 53 & 80 & 32 & 40 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} \\ \text{குழு 1} \\ \text{குழு 2} \\ \text{குழு 3} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{தமிழ்} & \text{ஆங்கிலம்} & \text{அறிவியல்} & \text{கணிதம்} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 38 & 15 & 40 \\ 18 & 12 & 17 & 80 \\ 81 & 47 & 52 & 18 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

தீர்வு :

மூன்று குழுவில் உள்ளவர்கள் இரண்டு தேர்வுகளிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களின் கூடுதலை அணி மூலம் எழுதினால்,

$$A + B = \begin{pmatrix} 22+20 & 15+38 & 14+15 & 23+40 \\ 50+18 & 62+12 & 21+17 & 30+80 \\ 53+81 & 80+47 & 32+52 & 40+18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 42 & 53 & 29 & 63 \\ 68 & 74 & 38 & 110 \\ 134 & 127 & 84 & 58 \end{pmatrix}$$

3.59. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $A + B$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

A மற்றும் B என்ற அணிகள் வேறுபட்ட வரிசைகளைக் கொண்டிருப்பதால் இவைகளைக் கூட்ட இயலாது.

3.60. $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ எனில்,

2A + B -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

அணி A -யும் அணி B -யும் 3 × 3 எனும் ஒரே வரிசை உடையதால் 2A + B -லிருந்து வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$2A + B = 2\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 16 & 12 \\ 2 & 6 & 18 \\ -8 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 11 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 27 & 9 \\ 1 & 8 & 22 \\ -1 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

3.61. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2} \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3 \\ 5 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ எனில்,

4A – 3B -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

அணி A -யும் அணி B -யும் 3 × 3 எனும் ஒரே வரிசை உடையதால் 4A -லிருந்து 3B -யின் கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$4A - 3B = 4\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2} \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3 \\ 5 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 16 & -8 \\ 2 & 3 & 4\sqrt{2} \\ 4 & 36 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -12 & 9 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{21}{2} & -9 \\ -15 & 18 & -27 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 41 & 4 & 1 \\ \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} & 4\sqrt{2}-9 \\ -11 & 54 & -11 \end{pmatrix}$$

3.62. **கீழ்க்கண்ட அணிச் சமன்பாட்டிலிருந்து a, b, c, d ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.**

$$\begin{pmatrix} d & 8 \\ 3b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ b & 4c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

தீர்வு :

வலப்பக்கத்தில் உள்ள இரு அணிகளையும், இடப்பக்கத்தில் உள்ள இரு அணிகளையும் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$\begin{pmatrix} d+3 & 8+a \\ 3b-2 & a-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a+1 \\ b-5 & 4c \end{pmatrix}$$

இரு அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகளைச் சமன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$d + 3 = 2$ இதிலிருந்து, $d = -1$

$8 + a = 2a + 1$ இதிலிருந்து, $a = 7$

$3b - 2 = b - 5$ இதிலிருந்து, $b = \frac{-3}{2}$

$a = 7$ என்பதை $a - 4 = 4c$ -யில் பிரதியிடக் கிடைப்பது, $c = \frac{3}{4}$

எனவே, $a = 7, b = -\frac{3}{2}, c = \frac{3}{4}, d = -1$

3.63. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.**

(i) $3A + 2B - C$ **(ii)** $\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}B$

தீர்வு :

(i) $3A + 2B - C$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 24 & 9 \\ 9 & 15 & 0 \\ 24 & 21 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -12 & -8 \\ 4 & 22 & -6 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 9 & 1 \\ 14 & 44 & -8 \\ 23 & 19 & 25 \end{pmatrix}$$

(ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B=\frac{1}{2}[A-3B]$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}8&-6&-4\\2&11&-3\\0&1&5\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&8&3\\3&5&0\\8&7&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-24&18&12\\-6&-33&9\\0&-3&-15\end{pmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-23&26&15\\-3&-28&9\\8&4&-9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{23}{2}&13&\frac{15}{2}\\-\frac{3}{2}&-14&\frac{9}{2}\\4&2&-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

பயிற்சி 3.17

1. $A=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&7\\3&3\\1&0\end{pmatrix}$ எனில்,

பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $A+B=B+A$

(ii) $A+(-A)=(-A)+A=O$.

தீர்வு :

$$A=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&7\\3&3\\1&0\end{pmatrix}$$

(i) $A+B=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&7\\3&3\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&16\\6&7\\9&-3\end{pmatrix}$

$$B+A=\begin{pmatrix}5&7\\3&3\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&16\\6&7\\9&-3\end{pmatrix}$$

$\therefore A+B=B+A$

(ii) $A=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}, -A=\begin{pmatrix}-1&-9\\-3&-4\\-8&3\end{pmatrix}$

$$A+(-A)=\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-9\\-3&-4\\-8&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

$$(-A)+A=\begin{pmatrix}-1&-9\\-3&-4\\-8&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&9\\3&4\\8&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

$\therefore A+(-A)=(-A)+A=O$

சரிபார்க்கப்பட்டது

2. $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&3&-8\\1&0&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&9&2\\-7&1&-1\end{pmatrix}$ மற்றும்

$C=\begin{pmatrix}8&3&4\\1&-2&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$ எனில், $A+(B+C)=(A+B)+C$

என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$$A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&3&-8\\1&0&-4\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&9&2\\-7&1&-1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}8&3&4\\1&-2&3\\2&4&-1\end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 9 & 9 \\ 4 & 10 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 3 & 12 & -6 \\ -6 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 3 & 12 & -6 \\ -6 & 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 9 & 9 \\ 4 & 10 & -3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$A + (B + C) = (A + B) + C$

சரிபார்க்கப்பட்டது.

3. $X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ எனில், X மற்றும் Y ஆகிய அணிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

$(1) + (2) \Rightarrow$ $2X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

(1) –ல் பிரதியிட,

$$Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3/2 & 9/2 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) B – 5A (ii) 3A – 9B

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(i) $B - 5A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 20 & 45 \\ 40 & 15 & 35 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -17 & -37 \\ -39 & -11 & -26 \end{pmatrix}$$

(ii) $3A - 9B = 3\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 12 & 27 \\ 24 & 9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 63 & 27 & 72 \\ 9 & 36 & 81 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -63 & -15 & -45 \\ 15 & -27 & -60 \end{pmatrix}$$

5. பின்வரும் அணிச் சமன்பாடுகளில் இருந்து x, y மற்றும் z -களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} x-3 & 3x-z \\ x+y+7 & x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} x & y-z & z+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

தீர்வு :

(i) $\begin{pmatrix} x-3 & 3x-z \\ x+y+7 & x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$x - 3 = 1$

$x = 1 + 3 = 4$

$3x - z = 0$

$3(4) - z = 0$

$12 = z$

$x + y + 7 = 1$

$4 + y + 7 = 1$

$y = -10$

$\therefore x = 4, y = -10, z = 12$

(ii) $\begin{pmatrix} x & y-z & z+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+y & y-z+4 & z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

$\therefore x + y = 4,\ y - z + 4 = 8,\ z + 6 = 16$

$z = 16 - 6 = 10$

$z = 10$ எனப் பிரதியிட,

$y - 10 + 4 = 8$

$y = 8 + 6 = 14$

$\therefore x + 14 = 4$

$x = 4 - 14 = -10$

$\therefore$ தீர்வு: $x = -10,\ y = 14,\ z = 10$

6. $x\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ எனில், x மற்றும் y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$x\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4x \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$4x - 2y = 4 \Rightarrow 2x - y = 2 \quad \ldots (1)$

$-3x + 3y = 6 \Rightarrow -x + y = 2 \quad \ldots (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow x = 4$

(2) ல் பிரதியிட,

$-4 + y = 2$

$y = 2 + 4 = 6$

$\therefore x = 4, y = 6$

7. $x\begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x^2+8 & 24 \\ 10 & 6x \end{pmatrix}$ என்ற அணிச் சமன்பாட்டில் x-ன் பூச்சியமற்ற மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$x\begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x^2+8 & 24 \\ 10 & 6x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x^2 & 2x \\ 3x & x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 10x \\ 8 & 8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2+16 & 48 \\ 20 & 12x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x^2+16 & 12x \\ 3x+8 & x^2+8x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^2+16 & 48 \\ 20 & 12x \end{pmatrix}$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$12x = 48$

$x = \frac{48}{12} = 4$

$3x + 8 = 20$

$3x = 20 - 8 = 12$

$x = \frac{12}{3} = 4$

$x^2 + 8x = 12x$

$x^2 + 8x - 12x = 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ (நிராகரிக்கப்பட்டது) மற்றும் $x = 4$

$\therefore$ பூச்சியமற்ற மதிப்பு $x = 4$

8. x, y -ஐத் தீர்க்க: $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

தீர்வு :

$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x^2-4x \\ y^2-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த

$$x^2 - 4x = 5$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$(x-5)(x+1) = 0$$
$$x = 5, -1$$
$$y^2 - 2y = 8$$
$$y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$(y-4)(y+2) = 0$$
$$y = 4, -2$$

அணிகளின் பெருக்கல்

எடுத்துக்காட்டு

3.64. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **எனில், AB -ஐக் காண்க.**

தீர்வு :

A என்ற அணியின் வரிசை 2×3 மற்றும் B என்ற அணியின் வரிசை 3×3 என்பதால் AB என்ற அணி வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் AB -யின் வரிசை 2×3 ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகள் $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (8+4+0) & (3+8+0) & (1+2+0) \\ (24+2+25) & (9+4+15) & (3+1+5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 51 & 28 & 9 \end{pmatrix}$$

3.65. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **எனில், AB மற்றும் BA காண்க. மேலும் AB = BA என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு :

A என்ற அணியின் வரிசை 2×2. B என்ற அணியின் வரிசை 2×2. எனவே, 2×2 என்ற வரிசையுடைய AB என்ற அணி வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1 & 0+3 \\ 2+3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+0 & 2+0 \\ 2+3 & 1+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

எனவே, $AB \neq BA$

3.66. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ **மற்றும்** $B = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ **எனில், அணியின் பெருக்கலைப் பொறுத்து A மற்றும் B என்ற அணிகளுக்குப் பரிமாற்று விதி உண்மை எனக் காட்டுக.**

தீர்வு :

AB = BA என நிரூபிக்க வேண்டும்.

இடப்பக்கம்:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+4 & 4\sqrt{2}-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

வலப்பக்கம்:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+4 & -4\sqrt{2}+4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{2} & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

எனவே, இடப்பக்கம் = வலப்பக்கம்

அதாவது, AB = BA.

3.67. தீர்க்க $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{2\times 1}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

அணியின் பெருக்கலைப் பொறுத்து,

$$\begin{pmatrix}2x+y\\ x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

$2x + y = 4$ ... (1)

$x + 2y = 5$ ... (2)

(1) – 2 × (2) எனில்,

$$\begin{array}{r} 2x+y=4\ (-)\\ \underline{2x+4y=10}\\ -3y=-6 \end{array} \Rightarrow y=2$$

$y = 2$ என்பதை (1) -யில் பிரதியிட,

$2x + 2 = 4$ -லிருந்து $x = 1$

எனவே $x = 1, y = 2$

3.68. $A = (1\ -1\ \ 2), B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ மற்றும் $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

எனில் (AB) C = A (BC) எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

இடப்பக்கம் :

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 3}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$=(1-2+2 \quad -1-1+6)$$

$$=(1\quad 4)$$

$$(AB)\,C=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}_{1\times 2}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$=(1+8 \quad 2-4)=(9\quad -2) \qquad \ldots (1)$$

வலப்பக்கம் :

$$BC=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}_{3\times 2}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$=\begin{pmatrix}1-2 & 2+1\\ 2+2 & 4-1\\ 1+6 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 3\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}_{1\times 3}\times\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 3\\ 7 & -1\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$=(-1-4+14 \quad 3-3-2)$$

$$=(9\quad -2) \qquad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து , (AB) C = A (BC)

3.69. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ **எனில்,**

A (B + C) = AB + AC என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

இடப்பக்கம் :

$$B+C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6-1 & 8+4\\ 6-3 & -8+12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 12\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \ldots (1)$$

வலப்பக்கம் :

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-4 & 2+2\\ -1-12 & -2+6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -13 & 4\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7+3 & 6+2\\ 7+9 & -6+6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 16 & 0\end{pmatrix}$$

எனவே, $AB + AC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(1), (2) லிருந்து, $A(B + C) = AB + AC$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

3.70. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

இடப்பக்கம் :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+0 & -1+8+2 \\ 4+1+0 & -2-4+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

வலப்பக்கம் :

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+0 & 4+1+0 \\ -1+8+2 & -2-4+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1), (2) - லிருந்து $(AB)^T = B^T A^T$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 3.18

1. A, B என்ற அணிகள் கீழ்க்கண்டவாறு இருப்பின் AB -யின் வரிசையைக் காண்க.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
A –யின் வரிசைகள்	3 × 3	4 × 3	4 × 2	4 × 5	1 × 1
B –யின் வரிசைகள்	3 × 3	3 × 2	2 × 2	5 × 1	1 × 3

தீர்வு :

(i) A –ன் வரிசை = 3 × 3, B –ன் வரிசை = 3 × 3
∴ AB –ன் வரிசை = 3 × 3

(ii) A –ன் வரிசை = 4 × 3, B –ன் வரிசை = 3 × 2
∴ AB –ன் வரிசை = 4 × 2

(iii) A –ன் வரிசை = 4 × 2, B –ன் வரிசை = 2 × 2
∴ AB –ன் வரிசை = 4 × 2

(iv) A –ன் வரிசை = 4 × 5, B –ன் வரிசை = 5 × 1
∴ AB –ன் வரிசை = 4 × 1

(v) A –ன் வரிசை = 1 × 1, B –ன் வரிசை = 1 × 3
∴ AB –ன் வரிசை = 1 × 3

2. அணி A -யின் வரிசை p × q மற்றும் B -யின் வரிசை q × r இரு அணிகளையும் பெருக்க முடியும் எனில், AB மற்றும் BA ஆகியவற்றின் வரிசையைக் காண்க.

தீர்வு :

A –ன் வரிசை = p × q

B –ன் வரிசை = q × r

A –ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = B –ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

q = q

∴ 'AB' என்பது சாத்தியம்

AB ன் வரிசை = A ன் நிரைகள் × B ன் நிரல்கள்

= p × r

B–ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை ≠ A –ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

அதாவது, r ≠ q

∴ BA என்பது சாத்தியமல்ல.

3. அணி A -யில் 'a' நிரைகளும் 'a + 3' நிரல்களும் மற்றும் அணி B -யில் 'b' நிரைகளும் '17 – b' நிரல்களும் உள்ளன. பெருக்கல் அணிகள் AB மற்றும் BA -ஐக் காண முடியும் எனில், a மற்றும் b -யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப : A –ல் நிரைகளின் எண்ணிக்கை 'a' மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை 'a + 3'

B –ல் 'b' நிரைகளும் '17–b' நிரல்களும் உள்ளன.

AB மற்றும் BA என்பன உள்ளதால்

AB க்கு, A ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = B –ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

$$\therefore \quad a + 3 = b$$

BA க்கு, B ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = A ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை

$$\therefore 17 - b = a$$
$$17 - (a + 3) = a$$
$$17 - a - 3 = a$$
$$2a = 14$$
$$a = 7$$
$$\therefore \quad b = a + 3 = 7 + 3 = 10$$
$$\therefore \quad a = 7, b = 10.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ **எனில், AB மற்றும் BA -ஐக் காண்க. மேலும், AB = BA என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2+10 & -6+25 \\ 4+6 & -12+15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-12 & 5-9 \\ 4+20 & 10+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 24 & 25 \end{pmatrix}$$
$$\therefore AB \neq BA$$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **எனில், A (B + C) = AB + AC -ஐச் சரிபார்க்கவும்.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-3 & 2+18 & 4+15 \\ 10+1 & 10-6 & 20-5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+9 & -1+15 & 2+6 \\ 5-3 & -5-5 & 10-2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 2 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-12 & 3+3 & 2+9 \\ 5+4 & 15-1 & 10-3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -11 & 6 & 11 \\ 9 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 2 & -10 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 6 & 11 \\ 9 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \ldots(2)$$

(1), (2) லிருந்து,

$\therefore$ A (B + C) = AB + AC , சரிபார்க்கப்பட்டது.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ **எனில், இவ்விரு அணிகளுக்கும் பரிமாற்றுப் பண்பு AB = BA உண்மை என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-6 & -2+2 \\ 3-3 & -6+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-6 & 2-2 \\ -3+3 & -6+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$\therefore AB = BA$

நிறுவப்பட்டது.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(i) A(BC) = (AB)C

(ii) (A – B)C = AC – BC

(iii) $(A - B)^T = A^T - B^T$

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 2+5 & 0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+14 & 0+20 \\ 8+21 & 0+30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 20 \\ 29 & 30 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2 & 0+10 \\ 4+3 & 0+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+10 & 0+20 \\ 14+15 & 0+30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 20 \\ 29 & 30 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$A(BC) = (AB)C$

நிறுவப்பட்டது.

(ii) $(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6+2 & 0+4 \\ 0-2 & 0-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 & 0+4 \\ 2+3 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 2+5 & 0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$AC - BC = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(A - B)\,C = AC - BC$ நிறுவப்பட்டது.

(iii) $(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(A - B)^T = A^T - B^T$ நிறுவப்பட்டது.

8. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$ **எனில்,** $A^2 + B^2 = I$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B.B$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2\theta + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

இப்போது, $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 + 0 \\ 0 + 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

நிறுவப்பட்டது.

9. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ **எனில்,** $AA^T = I$ **எனக் காட்டுக.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

$$= I$$

$\therefore AA^T = I$ நிறுவப்பட்டது.

10. $A^2 = I$ **எனில்,** $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ **என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25-24 & -20+20 \\ 30-30 & -24+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore A^2 = I$

நிறுவப்பட்டது.

11. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **எனில்,**

$A^2 - (a + d) A = (bc - ad)I_2$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a + d) A = (a + d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$A^2 - (a + d) A$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \quad ...(1)$$

இப்போது $(bc - ad) I_2 = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$A^2 - (a + d) A = (bc - ad) I_2$

நிறுவப்பட்டது.

12. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **எனில்,**

$(AB)^T = B^T A^T$ **என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+2+45 & 35+4-9 \\ 1+2+40 & 7+4-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 52 & 30 \\ 43 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 52 & 43 \\ 30 & 3 \end{pmatrix} \quad ...(1)$$

$$B^TA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+2+45 & 1+2+40 \\ 35+4-9 & 7+4-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 52 & 43 \\ 30 & 3 \end{pmatrix} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$(AB)^T = B^TA^T$

நிறுவப்பட்டது.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **எனில்,** $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A.A$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5A = 5\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$7I_2 = 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 5A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 3.19

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்:

1. மூன்று மாறிகளில் அமைந்த மூன்று நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வுகள் இல்லையெனில், அத்தொகுப்பில் உள்ள தளங்கள்

(1) ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன
(2) ஒரே ஒரு கோட்டில் வெட்டுகின்றன
(3) ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும்
(4) ஒன்றையொன்று வெட்டாது **[விடை : (4)]**

2. $x + y - 3z = -6$, $-7y + 7z = 7$, $3z = 9$ என்ற தொகுப்பின் தீர்வு

(1) $x = 1, y = 2, z = 3$
(2) $x = -1, y = 2, z = 3$
(3) $x = -1, y = -2, z = 3$
(4) $x = 1, y = 2, z = 3$ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$$x + y - 3z = -6 \quad \ldots (1)$$
$$-7y + 7z = 7 \quad \ldots (2)$$
$$3z = 9 \Rightarrow z = 3 \quad \ldots (3)$$
$$(2) \Rightarrow -7y + 7z = 7 \quad (\div 7)$$
$$-y + z = 1$$
$$-y + 3 = 1$$
$$y = 3 - 1 = 2$$

(1) ல் பிரதியிட,

$$x + 2 - 3(3) = -6$$
$$x + 2 - 9 = -6$$
$$x = -6 + 7 = 1$$

$\therefore$ தீர்வு: $x = 1, y = 2, z = 3$

3. $x^2 - 2x - 24$ மற்றும் $x^2 - kx - 6$ -யின் மீ.பொ.வ. $(x - 6)$ எனில், k -யின் மதிப்பு

(1) 3 (2) 5
(3) 6 (4) 8 **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$x^2 - kx - 6$ மற்றும் $x^2 - 2x - 24$ ன் மீ.பொ.வ $(x - 6)$

$\therefore x^2 - kx - 6$ என்பது $(x - 6)$ ஆல் வகுபடும்.

$$(6)^2 - k(6) - 6 = 0$$
$$\Rightarrow 36 - 6k - 6 = 0$$
$$6k = 30$$
$$\Rightarrow k = \frac{30}{6} = 5$$

4. $\frac{3y-3}{y} \div \frac{7y-7}{3y^2}$ என்பது

(1) $\frac{9y}{7}$ (2) $\frac{9y^3}{(21y-21)}$
(3) $\frac{21y^2-42y+21}{3y^3}$ (4) $\frac{7(y^2-2y+1)}{y^2}$ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$$\frac{3y-3}{y} \div \frac{7y-7}{3y^2} = \frac{3(y-1)}{y} \times \frac{3y^2}{7(y-1)} = \frac{9y}{7}$$

5. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது $y^2 + \frac{1}{y^2}$ -க்குச் சமம் இல்லை?

(1) $\frac{y^4+1}{y^2}$ (2) $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2$
(3) $\left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2$ (4) $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$y^2 + \frac{1}{y^2}$ என்பது $\left(y + \frac{1}{y}\right)^2$ க்கு சமமல்ல.

அதாவது, $y^2 + \frac{1}{y^2} \neq y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$

6. $\frac{x}{x^2-25} - \frac{8}{x^2+6x+5}$ -யின் சுருங்கிய வடிவம்

(1) $\frac{x^2-7x+40}{(x-5)(x+5)}$ (2) $\frac{x^2+7x+40}{(x-5)(x+5)(x+1)}$
(3) $\frac{x^2-7x+40}{(x^2-25)(x+1)}$ (4) $\frac{x^2+10}{(x^2-25)(x+1)}$ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$$\frac{x}{x^2-25} - \frac{8}{x^2+6x+5} = \frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{8}{(x+5)(x+1)}$$

$$= \frac{x(x+1)-8(x-5)}{(x+5)(x-5)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+x-8x+40}{(x+5)(x-5)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2-7x+40}{(x^2-25)(x+1)}$$

7. $\frac{256x^8y^4z^{10}}{25x^6y^6z^6}$ -யின் வர்க்கமூலம்

(1) $\frac{16}{5}\left|\frac{x^2z^4}{y^2}\right|$ (2) $16\left|\frac{y^2}{x^2z^4}\right|$

(3) $\frac{16}{5}\left|\frac{y}{xz^2}\right|$ (4) $\frac{16}{5}\left|\frac{xz^2}{y}\right|$ **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

$$\sqrt{\frac{256\,x^8\,y^4\,z^{10}}{25\,x^6\,y^6\,z^6}} = \frac{16}{5}\left|\frac{x^4\,y^2\,z^5}{x^3\,y^3\,z^3}\right| = \frac{16}{5}\left|\frac{x\,z^2}{y}\right|$$

8. $x^4 + 64$ முழு வர்க்கமாக மாற்ற அதனுடன் பின்வருவனவற்றுள் எதைக் கூட்ட வேண்டும்?

(1) $4x^2$ (2) $16x^2$

(3) $8x^2$ (4) $-8x^2$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$$x^4 + 64 + 16x^2 = x^4 + 16x^2 + 64$$
$$= (x^2)^2 + 2(8)(x^2) + (8)^2$$
$$= (x^2+8)^2$$

9. $(2x-1)^2 = 9$ -யின் தீர்வு

(1) -1 (2) 2

(3) $-1, 2$ (4) இதில் எதுவும் இல்லை **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

$(2x-1)^2 = 9$

$2x-1 = \pm 3$

$2x-1 = 3$ $\quad$ $2x-1 = -3$

$2x = 4$ $\quad$ $2x = -2$

$x = 2$ $\quad$ $x = -1$

தீர்வு: $x = -1, 2$

10. $4x^4 - 24x^3 + 76x^2 + ax + b$ ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், a மற்றும் b -யின் மதிப்பு

(1) 100, 120 (2) 10, 12

(3) -120, 100 (4) 12, 10 **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$\sqrt{4x^4 - 24x^3 + 76x^2 + ax + b}$

$2x^2$ | $4x^4 - 24x^3 + 76x^2 + ax + b$ — quotient: $2x^2 - 6x + 10$

$4x^4$

$(-)$

$4x^2 - 6x$ | $-24x^3 + 76x^2$

$-24x^3 + 36x^2$

$(+)\quad(-)$

$4x^2 - 12x + 10$ | $40x^2 + ax + b$

$40x^2 - 120x + 100$

$(-)\quad(+)\quad(-)$

0

$\therefore a = -120, b = 100$

11. $q^2x^2 + p^2x + r^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வர்க்கங்கள், $qx^2 + px + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், q, p, r என்பன

(1) ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

(2) ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

(3) கூட்டுத்தொடர் வரிசை மற்றும் பெருக்குத் தொடர்வரிசை இரண்டிலும் உள்ளன.

(4) இதில் எதுவும் இல்லை **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

α, β என்பன $qx^2 + px + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + \beta = \frac{-p}{q}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $\alpha\beta = \frac{r}{q}$

α^2, β^2 என்பன $q^2x^2 + p^2x + r^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{-p^2}{q^2}$

ஆனால் $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$\therefore \left(\frac{-p}{q}\right)^2 - \frac{2r}{q} = \frac{-p^2}{q^2}$$

$$\frac{p^2}{q^2} + \frac{p^2}{q^2} = \frac{2r}{q}$$

$$\frac{2p^2}{q^2} = \frac{2r}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{r}{q}$$

$p^2 = qr \Rightarrow p$ என்பது பெருக்குச் சராசரி மற்றும் q, p, r ஆகியன பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமையும்.

12. ஒரு நேரிய பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடம் ஒரு

(1) நேர்கோடு (2) வட்டம்
(3) பரவளையம் (4) அதிபரவளையம்

[விடை : (1)]

13. $x^2 + 4x + 4$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை X அச்சோடு வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 0 (2) 1
(3) 0 அல்லது 1 (4) 2 **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x + 2)^2 = 0$$
$$x = -2 \text{ (இருமுறை)}$$

மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.
∴ X-அச்சுடன் வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 1.

14. கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$ -க்கான நிரை நிரல் மாற்று அணியின் வரிசை

(1) 2×3 (2) 3×2
(3) 3×4 (4) 4×3 **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$, A ன் வரிசை $= 3 \times 4$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \\ 5 & 6 & 13 \\ 7 & 8 & 15 \end{pmatrix}$, A^Tன் வரிசை $= 4 \times 3$

15. A என்ற அணியின் வரிசை 2×3, B என்ற அணியின் வரிசை 3×4 எனில், AB என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 4
(3) 2 (5) 5 **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

A ன் வரிசை $= 2 \times 3$
B ன் வரிசை $= 3 \times 4$
AB ன் வரிசை $= 2 \times 4$
AB ல் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 4

16. நிரல்கள் மற்றும் நிரைகள் சம எண்ணிக்கையில்லாத அணி

(1) மூலைவிட்ட அணி
(2) செவ்வக அணி
(3) சதுர அணி
(4) அலகு அணி **[விடை: (2)]**

17. ஒரு நிரல் அணியின், நிரை நிரல் மாற்று அணி

(1) அலகு அணி
(2) மூலைவிட்ட அணி
(3) நிரல் அணி
(4) நிரை அணி **[விடை : (4)]**

18. $2X + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், X என்ற அணியைக் காண்க.

(1) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $2x + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

$$2x = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$
$$x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ஆகிய அணிகளைக் கொண்டு எவ்வகை அணிகளைக் கணக்கிட முடியும்? (i) A^2 (ii) B^2 (iii) AB (iv) BA

(1) (i), (ii) மட்டும் (2) (ii), (iii) மட்டும்
(3) (ii), (iv) மட்டும் (4) அனைத்தும்

[விடை: (3)]

தீர்வு :

A ன் வரிசை= 3×2
B ன் வரிசை = 3×3

(i) A என்பது சதுர அணி அல்லாததால் A^2 சாத்தியமல்ல.

(ii) B என்பது சதுர அணி என்பதால் B^2 சாத்தியம்.

(iii) AB என்பது சாத்தியமல்ல. ஏனெனில் A –ல் நிரல்களின் எண்ணிக்கை ≠ B – ல் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

(iv) BA என்பது சாத்தியமாகிறது. ஏனெனில் B ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = A ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றுள் எவை சரி?

(i) $AB + C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **(ii)** $BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

(iii) $BA + C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $(AB)C = \begin{bmatrix} -8 & 20 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$

(1) (i) மற்றும் (ii) மட்டும்
(2) (ii) மற்றும் (iii) மட்டும்
(3) (iii) மற்றும் (iv) மட்டும்
(3) அனைத்தும் [விடை : 1]

தீர்வு :

$$AB + C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

அலகுப்பயிற்சி – 3

1. தீர்க்க

$\frac{1}{3}(x + y - 5) = y - z = 2x - 11 = 9 - (x + 2z)$.

தீர்வு :

$$\frac{1}{3}(x + y - 5) = y - z$$
$$x + y - 5 = 3y - 3z$$
$$\Rightarrow x - 2y + 3z = 5 \quad \ldots (1)$$
$$y - z = 2x - 11$$
$$\Rightarrow 2x - y + z = 11 \quad \ldots (2)$$
$$2x - 11 = 9 - (x + 2z)$$
$$2x + x + 2z = 9 + 11$$
$$3x + 2z = 20 \quad \ldots (3)$$

(1) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$(2) \times 2 \Rightarrow \quad 4x - 2y + 2z = 22 \quad \ldots (4)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x - 2y + 3z = 5$

$(4) - (1) \Rightarrow \quad\quad 3x - z = 17 \quad \ldots (5)$

இப்போது, (3) , (5) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$$3x + 2z = 20 \quad \ldots (3)$$
$$3x - z = 17 \quad (5)$$

$(3)-(5) \Rightarrow \quad 3z = 3$

$$z = 3/3 = 1$$

$z = 1$ என (3) ல் பிரதியிட,

$$3x + 2(1) = 20$$
$$3x = 20 - 2 = 18$$
$$x = \frac{18}{3} = 6$$

$x = 6, z = 1$ என (1) ல் பிரதியிட, $\quad \ldots (1)$

$$6 - 2y + 3(1) = 5$$
$$6 + 3 - 5 = 2y$$
$$4 = 2y$$
$$y = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ தீர்வு : $x = 6, y = 2, z = 1$

2. ஒரு பள்ளியில் A, B மற்றும் C என்ற மூன்று பிரிவுகளில் 150 மாணவர்கள் புதிதாகச் சேர்க்கப்படுகின்றனர். பிரிவு A -யிலிருந்து பிரிவு C -க்கு 6 மாணவர்கள் மாற்றப்பட்டால், இரு பிரிவுகளிலும் சமமான மாணவர்கள் இருப்பர். C பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் 4 மடங்கு மற்றும் A பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கை இவற்றின் வித்தியாசம் B பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் எனில், மூன்று பிரிவுகளில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

A, B, C ஆகிய பிரிவுகளில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை 'x' , 'y' , 'z' என்க.

$\therefore$ கொ.ப : $x + y + z = 150$ ... (1)

$x - 6 = z + 6$

$x - z = 12$ ... (2)

$4z = x + y$

$x + y - 4z = 0$ ... (3)

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$x + y + z = 150$ ... (1)

$x + y - 4z = 0$ ... (3)

(1) – (3) $\Rightarrow$ $5z = 150$

$z = \frac{150}{5} = 30$

(2) ல் பிரதியிட,

$x - 30 = 12$

$x = 30 + 12$

$x = 42$

$x = 42, z = 30$ என (1) ல் பிரதியிட,

$42 + y + 30 = 150$

$y = 150 - 72$

$y = 78$

$\therefore$ A, B மற்றும் C ஆகிய பிரிவுகளில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை முறையே 42, 78, 30.

3. ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின், பத்தாம் இட மற்றும் நூறாம் இட இலக்கங்களை இடமாற்றுவதன் மூலம் கிடைக்கும் புதிய எண், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் மும்மடங்கைவிட 54 அதிகம். கொடுக்கப்பட்ட எண்ணோடு 198 -ஐ கூட்டினால் இலக்கங்கள் இட-வலப்பக்கமாக வரிசை மாறும். ஒன்றாம் இட இலக்கத்தைவிட அதிகமுள்ள பத்தாம் இட இலக்கத்தின் இரு மடங்கு, நூறாம் இட இலக்கத்தை விட அதிகமுள்ள பத்தாம் இட இலக்கத்திற்குச் சமம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

100' ஆம் இட இலக்கம் 'x'

10'ஆம் இட இலக்கம்'y'

ஒன்றாம் இட இலக்கம் 'z' என்க.

கொ.ப : $100y + 10x + z - 54 = 3(100x + 10y + z)$

சுருக்க $290x - 70y + 2z = -54$ (÷ 2)

$145x - 35y + z = -27$ ...(1)

$100x + 10y + z + 198 = 100z + 10y + x$

சுருக்க $99x - 99z = -198$ (÷ 99)

$x - z = -2$ ...(2)

$y = x + 2(y - z)$

$\Rightarrow x + y - 2z = 0$ ...(3)

(1) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$145x - 35y + z = -27$ ...(1)

(3) × 35 $\Rightarrow$ $35x + 35y - 70z = 0$ ...(4)

(1) + (4) $\Rightarrow$ $180x - 69z = -27$ ...(5)

(5) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$180x - 69z = -27$

(2) × 69 $\Rightarrow$ $69x - 69z = -138$ ...(6)

(5) – (6) $\Rightarrow$ $111x = 111$

$x = \frac{111}{111} = 1$

$x = 1$ என (2) ல் பிரதியிட,

$1 - z = -2$

$z = 1 + 2 = 3$

$x = 1, z = 3$ என (3) ல் பிரதியிட,

$1 + y - 6 = 0$

$y = 5$

$\therefore$ தீர்வு : $x = 1, y = 5, z = 3$.

மூன்று இலக்க எண் 153

4. $xy(k^2 + 1) + k(x^2 + y^2)$ மற்றும் $xy(k^2 - 1) + k(x^2 - y^2)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம. காண்க.

தீர்வு :

$xy(k^2 + 1) + k(x^2 + y^2)$

காரணிப்படுத்த $xyk^2 + xy + kx^2 + ky^2$

$= xyk^2 + ky^2 + kx^2 + xy$

$= ky(kx + y) + x(kx + y)$

$= (kx + y)(ky + x)$

மற்றும் $xy(k^2 - 1) + k(x^2 - y^2)$

$= xyk^2 - xy + kx^2 - ky^2$

$= xyk^2 + kx^2 - xy - ky^2$

$= kx(ky + x) - y(x + ky)$

$= (kx - y)(ky + x)$

$\therefore$ மீ.பொ.ம $= (ky + x)(kx + y)(kx - y)$

$= (ky + x)(k^2x^2 - y^2)$

5. வகுத்தல் படிமுறையைப் பயன்படுத்தி $2x^4 + 13x^3 + 27x^2 + 23x + 7$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $x^2 + 2x + 1$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ. காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = 2x^4 + 13x^3 + 27x^2 + 23x + 7$
$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$h(x) = x^2 + 2x + 1$ என்க.

இங்கு குறைந்த வரிசையை உடைய பல்லுறுப்புக் கோவை $h(x)$ ஆகும்.

$f(x)$ ஐ $h(x)$ ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 9x + 7 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & 2x^4 + 13x^3 + 27x^2 + 23x + 7 \\ & 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 \quad (-) \\ \hline & 9x^3 + 25x^2 + 23x \\ & 9x^3 + 18x^2 + 9x \quad (-) \\ \hline & 7x^2 + 14x + 7 \\ & 7x^2 + 14x + 7 \quad (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

மீதி பூச்சியம் வருவதால், $h(x)$ என்பது $f(x)$ மற்றும் $h(x)$ ன் மீ.பொ.வ ஆகும்.

இப்போது $g(x)$ ஐ $h(x)$ ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{r|l} & x + 1 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ & x^3 + 2x^2 + x \quad (-) \\ \hline & x^2 + 2x + 1 \\ & x^2 + 2x + 1 \quad (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

மீதி பூச்சியம் வருவதால், $h(x)$ என்பது $g(x)$ மற்றும் $h(x)$ ன் மீ.பொ.வ ஆகும்.

$h(x)$ என்பது $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றை முழுமையாக வகுக்கிறது.

$\therefore$ மீ.பொ.வ $= x^2 + 2x + 1$

6. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவில் சுருக்குக.

(i) $\dfrac{x^{3a} - 8}{x^{2a} + 2x^a + 4}$ **(ii)** $\dfrac{10x^3 - 25x^2 + 4x - 10}{-4 - 10x^2}$

தீர்வு :

(i) $\dfrac{x^{3a} - 8}{x^{2a} + 2x^a + 4}$

$$= \frac{(x^a)^3 - (2)^3}{x^{2a} + 2x^a + 4}$$

$$= \frac{(x^a - 2)(x^{2a} + 2x^a + 4)}{x^{2a} + 2x^a + 4}$$

$[a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2]$

$$= x^a - 2$$

(ii) $\dfrac{10x^3 - 25x^2 + 4x - 10}{-4 - 10x^2}$

$$= \frac{10x^2(x - 5/2) + 4(x - 5/2)}{-(4 + 10x^2)}$$

$$= \frac{(x - 5/2)(10x^2 + 4)}{-(4 + 10x^2)}$$

$$= -(x - 5/2)$$

$$= 5/2 - x$$

7. சுருக்குக : $\dfrac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q + r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q + r}} \times \left(1 + \dfrac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}\right)$

தீர்வு :

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q + r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q + r}} \times \left(1 + \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}\right)$$

$$= \frac{\frac{q + r + p}{p(q + r)}}{\frac{q + r - p}{p(q + r)}} \times \left[\frac{2qr + q^2 + r^2 - p^2}{2qr}\right]$$

$$= \frac{p + q + r}{q + r - p} \times \left[\frac{(q + r)^2 - p^2}{2qr}\right]$$

$$= \frac{p + q + r}{q + r - p} \times \frac{[(q + r + p)(q + r - p)}{2qr}$$

$$= \frac{(p + q + r)^2}{2qr} = \frac{1}{2qr}$$

8. அருள், இரவி மற்றும் இராம் மூவரும் இணைந்து ஒரு கடையை 6 மணி நேரத்தில் சுத்தம் செய்கின்றனர். தனித்தனியாகச் சுத்தம் செய்தால் அருளைப் போல இருமடங்கு நேரம் இரவி எடுத்துக் கொள்கிறார், மேலும் இராம், அருளின் நேரத்தைப்போல மும்மடங்கு எடுத்துக்கொள்கிறார் எனில், மூவரும் தனித்தனியாக எவ்வளவு நேரம் எடுத்துக் கொள்வார்கள்?

தீர்வு :

கொ.ப : அருள், ரவி மற்றும் ராம் ஆகியோர் கடையை 6 மணி நேரத்தில் சுத்தம் செய்கின்றனர். அருள், ரவி மற்றும் ராம் ஆகியோர் 1 மணி நேரத்தில் செய்த வேலை 1/6

∴ அருள், ரவி மற்றும் ராம் ஆகியோர் எடுத்துக்கொண்ட நேரம் முறையே x, y, z என்க.

∴ அருள் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் = $\frac{1}{x}$

∴ரவி எடுத்துக் கொண்ட நேரம் = $\frac{1}{y}$

∴ ராம் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் = $\frac{1}{z}$

கொ.ப : y = 2x மற்றும் z = 3x

∴ 1 மணி நேரத்தில் செய்த வேலை

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{6+3+2}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = 11$$

$$\therefore y = 22, z = 33.$$

∴ மூன்று பேரும் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் முறையே 11 மணி நேரம், 22 மணி நேரம் மற்றும் 33 மணி நேரம்.

9. $289x^4 - 612x^3 + 970x^2 - 684x + 361$ -யின் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

$17x^2 - 18x + 19$

$17x^2$	$289x^4 - 612x^3 + 970x^2 - 684x + 361$
	$289x^4$ (–)
$34x^2 - 18x$	$-612x^3 + 970x^2$
	$-612x^3 + 324x^2$ (–)
$34x^2 - 36x + 19$	$646x^2 - 684x + 361$
	$646x^2 - 684x + 361$ (–)
	0

$$\therefore \sqrt{289x^4 - 612x^3 + 970x^2 - 684x + 361} = |17x^2 - 18x + 19|$$

10. தீர்க்க $\sqrt{y+1} + \sqrt{2y-5} = 3$

தீர்வு :

$$\sqrt{2y-5} = 3 - \sqrt{y+1}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\left(\sqrt{2y-5}\right)^2 = \left(3-\sqrt{y+1}\right)^2$$

$$2y - 5 = 9 + y + 1 - 2(3)\sqrt{y+1}$$

$$2y - 5 = y + 10 - 6\sqrt{y+1}$$

$$2y - y - 5 - 10 = -6\sqrt{y+1}$$

$$y - 15 = -6\sqrt{y+1}$$

மீண்டும் இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$(y-15)^2 = \left(-6\sqrt{y+1}\right)^2$$

$$y^2 - 30y + 225 = 36(y+1)$$

$$y^2 - 30y + 225 = 36y + 36$$

$$y^2 - 30y - 36y + 225 - 36 = 0$$

$$y^2 - 66y + 189 = 0$$

காரணிப்படுத்த, $(y - 63)(y - 3) = 0$

$$\therefore y = 3, 63$$

11. 36 கி.மீ தூரத்தை ஒரு படகு நீரோட்டத்தின் திசையில் கடக்கும் நேரத்தைவிட எதிர்திசையில் கடக்கும் நேரம் 1.6 மணி நேரம் அதிகமாக எடுத்துக்கொள்கிறது. நீரோட்டத்தின் வேகம் 4 கி.மீ மணி / எனில், அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் என்ன?

தீர்வு :

அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் 'x' கி.மீ/மணி என்க.

நீரோட்டத்தின் வேகம் = 4 கி.மீ/மணி

நீரோட்டத்தின் திசையில் படகின் வேகம் = அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் – நீரோட்டத்தின் வேகம்.

∴ நீரோட்டத்தின் திசையில் படகின் வேகம் = $(x - 4)$ கி.மீ/மணி

எதிர்த் திசையில் படகின் வேகம் = அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் + நீரோட்டத்தின் வேகம்.

= $(x + 4)$ கி.மீ/மணி

நீரோட்டத்தின் திசையில் கடக்கும் நேரம் = எதிர்த் திசையில் கடக்கும் நேரம் + 1.6 மணி நேரம்

$$\therefore \frac{\text{நீரோட்டத்தின் திசையில் கடந்த தூரம்}}{\text{நீரோட்டத்தின் வேகம்}} = \frac{\text{எதிர் திசையில் கடந்த தூரம்}}{\text{எதிர் வேகம்}} + 1.6 \text{ மணி நேரம்}$$

$$\frac{36}{x-4} = \frac{36}{x+4} + 1.6$$

$$\frac{36}{x-4}-\frac{36}{x+4} = 1.6$$

$$36\left[\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}\right] = 1.6$$

$$36\left[\frac{x+4-x+4}{(x-4)(x+4)}\right] = 1.6$$

$$\frac{36(8)}{x^2-16} = 1.6$$

$$\Rightarrow x^2-16 = \frac{288}{1.6}$$

$$x^2 - 16 = 180$$

$$x^2 = 180 + 16$$

$$x^2 = 196$$

$$x = 14$$

∴ அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் மணிக்கு 14 கி.மீ

12. 320 மீ சுற்றளவும் 4800 ச.மீ பரப்பளவும் கொண்ட செவ்வக வடிவப் பூங்காவை அமைக்க முடியுமா? ஆம் எனில், அதன் நீளம், அகலம் காண்க.

தீர்வு :

செவ்வக வடிவப் பூங்காவின் நீளம் 'x' மீ, அகலம் 'y' மீ என்க.

கொ.ப : சுற்றளவு = 320 மீ

அதாவது, $2(x+y) = 320$

$$x + y = 160$$

$$y = 160 - x$$

கொ.ப : பரப்பளவு = 4800 ச.மீ

$$xy = 4800$$

$$x(160 - x) = 4800$$

$$160x - x^2 = 4800$$

$$x^2 - 160x + 4800 = 0$$

காரணிப்படுத்த, $(x - 120)(x - 40) = 0$

$\Rightarrow x - 120 = 0$ மற்றும் $x - 40 = 0$

$\Rightarrow x = 120$ மற்றும் $x = 40$

∴ பூங்காவின் நீளம் = 120 மீ

மற்றும் பூங்காவின் அகலம் = 40 மீ.

13. ஒரு கடிகாரத்தில் பிற்பகல் 2 மணியிலிருந்து t நிமிடங்களுக்குப் பிறகு 3 மணியை அடைவதற்குரிய கால அளவானது $\frac{t^2}{4}$ -ஐ விட மூன்று நிமிடங்கள் குறைவு எனில், t -யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப. : கடிகாரத்தின் நிமிடமுள் 3 மணியை அடைவதற்கான கால அளவு $\frac{t^2}{4} - 3$.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து,

$$\frac{t^2}{4} - 3 = 60 - T$$

[∵ பிற்பகல் 2 மணியிலிருந்து 3 மணிவரை = 1 மணிநேரம் = 60 நிமிடங்கள்]

$$t^2 - 12 = 4(60 - t)$$

$$t^2 - 12 = 240 - 4t$$

$$t^2 + 4t - 252 = 0$$

காரணிப்படுத்த, $(t + 18)(t - 14) = 0$

$t = -18$ மற்றும் $t = 14$

$t = -18$ நேரம் குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.

∴ $t = 14$ நிமிடங்கள்

14. ஓர் அரங்கில், ஒரு வரிசையில் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை அந்த அரங்கில் உள்ள மொத்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம். ஒவ்வொரு வரிசையில் உள்ள இருக்கைகளை 5 குறைத்து மொத்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கையை இரட்டிப்பாக்கினால் அரங்கில் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை முன்பைவிட 375 அதிகரிக்கும். அரங்கில் துவக்கத்தில் இருந்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

வரிசைகளின் எண்ணிக்கையை 'x' என்க மற்றும் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கையும் 'x' ஆகும்.

∴ மொத்த இருக்கைகள் = $x.x = x^2$

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து

$$x^2 + 375 = 2x(x - 5)$$

$$x^2 + 375 = 2x^2 - 10x$$

சுருக்கக் கிடைப்பது, $2x^2 - x^2 - 10x - 375 = 0$

$$x^2 - 10x - 375 = 0$$

காரணிப்படுத்த, $(x - 25)(x + 15) = 0$

$x - 25 = 0, \quad x + 15 = 0$

$x = 25, \quad x = -15$

'x' என்பது குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.

∴ அரங்கத்தில் துவக்கத்தில் இருந்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கை 25.

15. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க.

(i) $\alpha+2, \beta+2$ **(ii)** $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \frac{\beta-1}{\beta+1}$

தீர்வு :

கொ.ப α மற்றும் β என்பன $f(x) = x^2 - 2x + 3$ –ன் மூலங்கள்

இங்கு $a = 1, b = -2, c = 3.$

மூலங்களின் கூட்டல்

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

மூலங்களின் பெருக்கல்

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

(i) $\alpha+2, \beta+2$ என்பன மூலங்கள்

மூலங்களின் கூடுதல் $= \alpha+2+\beta+2$

$= \alpha+\beta+4$

$= 2+4 = 6$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= (\alpha+2)(\beta+2)$

$= \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$= 3+2(2)+4$

$= 3+4+4 = 11$

∴ பல்லுறுப்புக் கோவை:

x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + (மூலங்களின் பெருக்கல்) $= 0$

$x^2 - 6x + 11 = 0$

(ii) $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \frac{\beta-1}{\beta+1}$ என்பன கூடுதல்

மூலங்களின் கூடுதல் $= \frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}$

$= \frac{(\alpha-1)(\beta+1)+(\beta-1)(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$= \frac{2\alpha\beta-2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$

$= \frac{2(3)-2}{3+2+1}$

$= \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)$

$= \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$

$= \frac{3-2+1}{3+2+1}$

$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

∴ பல்லுறுப்புக் கோவை

x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + (மூலங்களின் பெருக்கல்) $= 0$

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

சுருக்கக் கிடைப்பது, $3x^2 - 2x + 1 = 0$

16. $x^2 + px - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் -4 மற்றும் $x^2 + px + q = 0$ -யின் மூலங்கள் சமம் எனில், p மற்றும் q -யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப : -4 என்பது $x^2 + px - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம்

$\therefore (-4)^2 + p(-4) - 4 = 0$

$16 - 4p - 4 = 0$

$\Rightarrow 4p = 12$

$p = \frac{12}{4} = 3$ மற்றும்

$x^2 + px + q = 0$ என்பது சமமான மூலங்களைப் பெற்றுள்ளது.

∴ தன்மை காட்டி $b^2 - 4ac = 0$

$[\because a = 1, b = p, c = q]$

$p^2 - 4(1)(q) = 0$

$(3)^2 - 4q = 0$

$4q = 9$

$q = \frac{9}{4}$

$\therefore p = 3, \quad q = \frac{9}{4}$

17. செந்தில், இரவி என்ற இரு விவசாயிகள் அரிசி, கோதுமை மற்றும் கேழ்வரகு ஆகிய மூன்று தானியங்களைப் பயிரிட்டனர். ஏப்ரல் மாதத்தில் இருவருக்குமான தானியங்களின் விற்பனை விலை கீழ்க்கண்ட அணியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஏப்ரல் மாத விற்பனை (ரூபாயில்)

$$A = \begin{pmatrix} \text{அரிசி} & \text{கோதுமை} & \text{கேழ்வரகு} \\ 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{செந்தில்} \\ \text{இரவி} \end{matrix}$$

மேலும் மே மாத விலை ஏப்ரல் மாத விலையின் இருமடங்கு எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.

(i) ஏப்ரல், மே மாத மாதங்களின் சராசரி விற்பனை யாது?

(ii) இதேபோல் விலை தொடர்ந்து வரும் மாதங்களில் ஏற்றமடைந்தால் ஆகஸ்ட் மாத விலையைக் காண்க.

தீர்வு :

ஏப்ரல் மாத விற்பனை

$$A = \begin{matrix} \\ \text{செந்தில்} \\ \text{ரவி} \end{matrix}\begin{matrix} \begin{pmatrix} \text{அரிசி} & \text{கோதுமை} & \text{கேழ்வரகு} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

கொ.ப.: மே மாத விற்பனை ஏப்ரல் மாத விற்பனையைப் போல் இரு மடங்கு

$\therefore$ மே மாத விற்பனை

$$= \begin{pmatrix} 1000 & 2000 & 3000 \\ 5000 & 3000 & 1000 \end{pmatrix}$$

(i) ஏப்ரல், மே மாதங்களின் சராசரி விற்பனை

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 500+1000 & 1000+2000 & 1500+3000 \\ 2500+5000 & 1500+3000 & 500+1000 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1500 & 3000 & 4500 \\ 7500 & 4500 & 1500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 750 & 1500 & 2250 \\ 3750 & 2250 & 750 \end{pmatrix}$$

(ii) ஏப்ரல் மாத விற்பனை

$$= \begin{pmatrix} 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{pmatrix}$$

மே மாத விற்பனை

$$= \begin{pmatrix} 1000 & 2000 & 3000 \\ 5000 & 3000 & 1000 \end{pmatrix}$$

இதேபோல், ஆகஸ்ட் மாத விற்பனை

$$= \begin{pmatrix} 8000 & 16000 & 24000 \\ 40000 & 24000 & 8000 \end{pmatrix}$$

18. $\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} x & -\cos\theta \\ \cos\theta & x \end{pmatrix} = I_2$ எனில், x-ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\sin\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & x\sin\theta \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta + x\sin\theta & \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & x\sin\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\sin\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & x\sin\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$x\sin\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$x\sin\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$x = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore x = \sin\theta$$

19. $A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $BA = C^2$ எனில், p, q -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0 & 0-2q \\ p+0 & 0+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2q \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = C.C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-4 & -4-4 \\ 4+4 & -4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

கொ.ப : $BA = C^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2q \\ p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore -2q = -8$$

$$q = \frac{8}{2} = 4$$

$$p = 8$$

20. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $CD - AB = 0$ எனுமாறு அணி D -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

Aன் வரிசை $= 2 \times 2$

Bன் வரிசை $= 2 \times 2$

$\therefore$ AB ன் வரிசை = CD ன் வரிசை

Cன் வரிசை $= 2 \times 2$

மற்றும் $CD - AB = 0$

$\therefore$ CD ன் வரிசை $= 2 \times 2$

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{என்க}$$

கொ.ப.: $CD - AB = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+6c & 3b+6d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18+0 & 9+0 \\ 24+40 & 12+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+6c-18 & 3b+6d-9 \\ a+c-64 & b+d-37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$3a + 6c - 18 = 0$

$3a + 6c = 18 \quad (\div 3)$

$a + 2c = 6 \quad \ldots(1)$

$a + c - 64 = 0$

$a + c = 64 \quad \ldots(2)$

$3b + 6d - 9 = 0$

$3b + 6d = 9 \quad (\div 3)$

$b + 2d = 3 \quad \ldots(3)$

$b + d - 37 = 0$

$b + d = 37 \quad \ldots(4)$

சமன்பாடுகள் (1) , (2) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$a + 2c = 6 \quad (1)$

$a + c = 64 \quad (2)$

(1) – (2) $\Rightarrow$ $c = -58$

(2) ல் பிரதியிட,

$a - 58 = 64$

$a = 64 + 58 = 122$

சமன்பாடுகள் (3) , (4) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$b + 2d = 3 \quad (3)$

$b + d = 37 \quad (4)$

(3) – (4) $\Rightarrow$ $d = -34$

(4) ல் பிரதியிட,

$b - 34 = 37$

$b = 37 + 34 = 71$

$\therefore$ அணி $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 122 & 71 \\ -58 & -34 \end{pmatrix}$$

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்:

மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

1. $(x + 2) + 2(x - 1) = 4x - 3$ ல் x ன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3

(3) – 2 (4) – 3 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$(x + 2) + 2(x - 1) = 4x - 3$

$x + 2 + 2x - 2 = 4x - 3$

$3x = 4x - 3$

$4x - 3x = 3$

$x = 3$

2. தீர்க்க : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x + 2$

(1) 4 (2) 8

(3) – 4 (4) – 8 **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{4} - x - x^2 - \frac{9}{4} + 3x = x + 2$$

சுருக்கக் கிடைப்பது, $2x - 2 = x + 2$

$x = 4$

3. x நபர்கள் ஒரு வேலையை y நாட்களில் செய்கிறார்கள் எனில், z நபர்கள் எவ்வளவு நாட்களில் அதே வேலையைச் செய்து முடிப்பார்கள்?

(1) $\frac{xz}{y}$ (2) $\frac{xy}{z}$

(3) $\frac{yz}{x}$ (4) xyz **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

x நபர்கள் y நாட்களில் வேலை செய்ய முடியும்

1 நபர் xy நாட்களில் வேலை செய்ய முடியும்

$\therefore$ z நபர்கள் $\frac{xy}{z}$ நாட்களில் வேலை செய்ய முடியும்.

4. $\frac{5}{y}-\frac{2}{x}=\frac{7}{6}$ மற்றும் $\frac{36}{x}-\frac{24}{y}=1$ எனில் x , y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(1) x = 4, y = 3 (2) x = – 4, y = 3

(3) x = – 4, y = – 3 (4) x = 4, y = – 3

[விடை: (1)]

தீர்வு :

$(1) \times 18 \Rightarrow \quad \frac{-36}{x}+\frac{90}{y} = 21$

$(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{x}-\frac{24}{y} = 1$

கூட்டக் கிடைப்பது $\frac{66}{y} = 22$

$y = 3$

(2) ல் பிரதியிட கிடைப்பது, x = 4; y = 3

5. 3x + 2y = 8 மற்றும் 6x + 4y = p என்ற சமன்பாடுகள் எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது எனில், p ன் மதிப்பைக் காண்க.

(1) 3 (2) 16

(3) 5 (4) 6 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$a_1x + b_1y = c_1$ மற்றும் $a_2x + b_2y = c_2$ என்பன இரு சமன்பாடுகள் எனில் $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ என்பது எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கும் என்பது சரி.

$\therefore \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{8}{p}$

$p = 16$

6. 4x + my + 9 = 0 மற்றும் 3x + 4y + 18 = 0 என்ற சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வைக் கொண்டிருப்பின் 'm' ன் மதிப்பைக் காண்க.

(1) $m \neq 16$ (2) $m \neq 15$

(3) $m \neq \frac{16}{3}$ (4) $m \neq \frac{15}{4}$ **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

ஒரே ஒரு தீர்வுக்கு, $a_1b_2 \neq b_1a_2$

$4 \times 4 \neq 3m$

$3m \neq 16$

$m \neq \frac{16}{3}$

7. இரண்டு எண்களின் கூடுதல் 640 மற்றும் அவற்றின் வித்தியாசம் 280 எனில், அந்த எண்கள் யாவை?

(1) 140, 500 (2) 180, 460

(3) 130, 510 (4) 150, 490 **[Ans : (2)]**

தீர்வு :

x , y என்பன இரு எண்கள் என்க.

கொ.ப : $x + y = 640$ ... (1)

$x - y = 280$ ... (2)

கூட்ட $2x = 920$

$\Rightarrow x = 460$

(1) ல் பிரதியிட, $460 + y = 640$

$y = 640 - 460 = 180$

8. 15 ஆண்கள் மற்றும் 8 பெண்களின் மொத்த சம்பளம் ₹ 3050. 5 பெண்கள் மற்றும் 3 ஆண்களின் சம்பளத்திற்குள்ள வித்தியாசம் ₹ 50 எனில், 3 ஆண்கள் மற்றும் 5 பெண்கள் ஆகியோரின் சம்பளத்தின் கூடுதலைக் காண்க.

(1) ₹ 900 (2) ₹ 850

(3) ₹ 950 (4) ₹ 1000 **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

ஓர் ஆணின் சம்பளம் 'x' மற்றும் பெண்ணின் சம்பளம் 'y' என்க.

கொ.ப : $15x + 8y = 3050$ ... (1)

$3x - 5y = -50$ ... (2)

$(2) \times 5 \Rightarrow 15x - 25y = -250$

$15x + 8y = 3050$

கழிக்க, $-33y = -3300$

$y = 100$

(2) ல் பிரதியிட, $3x - 500 = -50$

$3x = 450$

$x = 150$

மொத்த சம்பளம் = $3(150) + 5(100)$

$= 450 + 500 = ₹ 950$

9. $x + y + z = 2$, $6x - 4y + 5z = 31$ மற்றும் $5x + 2y + 2z = 13$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வைக் காண்க.

(1) $(3, -2, 1)$ (2) $(2, -3, 1)$
(3) $(1, 2, 3)$ (4) $(-1, -2, -3)$

[விடை: (1)]

தீர்வு :

$(3, -2, 1)$ என்பது அனைத்து சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்கிறது.

10. $4x + 2y - 4z = -18$, $8x - 2y - 5z = -18$ மற்றும் $-16x - 2y - z = -2$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வைக் காண்க.

(1) $(1, 0, 4)$ (2) $(4, 0, 1)$
(3) $(0, -1, -4)$ (4) $(0, -1, 4)$ **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

$(0, -1, 4)$ என்பது அனைத்து சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்கிறது.

மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம

11. இரண்டு எண்களின் மீ.பொ.வ. 36 மற்றும் அவற்றின் மீ.பொ.ம. என்பது 648 எனில், அந்த எண்களின் பெருக்கற்பலன்

(1) 23328 (2) 648
(3) 3888 (4) 23348 **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

இரு எண்களின் பெருக்கற்பலன் = மீ.பொ.வ × மீ.பொ.ம
$= 36 \times 648$
$= 23328$

12. $10(x^2 + x - 20)$, $15(x^2 - 3x - 4)$ மற்றும் $20(x^2 + 2x + 1)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ

(1) $5(x - 4)$ (2) 5
(3) $5(x + 1)$ (4) $5(x + 1)(x - 1)$

[விடை : (2)]

தீர்வு :

10, 15 மற்றும் 20 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 5

இப்போது $x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$
$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$
$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
$\therefore$ மீ.பொ.வ = 5

13. $a^2 + 3a + 2$, $a^2 + 5a + 6$ மற்றும் $a^2 + 4a + 4$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம.

(1) $(a + 2)^2 (a + 3)$
(2) $(a + 2)^2 (a + 1)$
(3) $(a + 2)^2 (a + 3)(a + 1)$
(4) $(a + 3)(a + 2)(a + 1)$ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$a^2 + 3a + 2 = (a + 2)(a + 1)$
$a^2 + 5a + 6 = (a + 3)(a + 2)$
$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$
மீ.பொ.ம = $(a + 2)^2 (a + 3)(a + 1)$

14. 5 மணிகள் முறையே 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 நொடிகளில் ஒலிக்கத் தொடங்கினால் 5 மணிகளும் 1 மணிநேரத்தில் ஒன்றாக எத்தனை முறை ஒலிக்கும்?

(1) 71 முறைகள் (2) 60 முறைகள்
(3) 59 முறைகள் (4) 61 முறைகள்

[விடை : (2)]

தீர்வு :

2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 ன் மீ.பொ.ம = 60 நொடிகள்
= 1 நிமிடம்

எனவே, 1 நிமிடத்திற்கு ஒரு முறையும், 1 மணி நேரத்தில் 60 முறையும் அவை ஒலிக்கின்றன.

15. $x^2 - \frac{1}{x^2}$, $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ மற்றும் $x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x - \frac{3}{x}$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ

(1) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (2) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)$
(3) $x - \frac{1}{x}$ (4) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2x\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x - \frac{3}{x} = x^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$$

$\therefore$ மீ.பொ.வ $= \left(x - \frac{1}{x}\right)$

16. $x + 2$ மற்றும் $(x + 2)^2 (x - 2)$ ஆகியவை முறையே இரு கோவைகளின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம எனில், அந்தக் கோவைகள்

(1) $(x + 2), (x - 2)$ (2) $(x + 2)^2, (x^2 - 4)$

(3) $(x + 2), (x^2 - 4)$ (4) $(x + 2)^2, (x - 2)$

[விடை : (2)]

தீர்வு :

மீ.பொ.வ $= x + 2$

மீ.பொ.ம $= (x + 2)^2 (x - 2)$

$$\frac{\text{மீ.பொ.ம}}{\text{மீ.பொ.வ}} = \frac{(x+2)^2 (x-2)}{(x+2)}$$

$$= (x + 2) (x - 2)$$

தேவையான கோவைகள் $(x + 2)$ $(x + 2)$ மற்றும் $(x + 2)(x - 2)$

அதாவது, $(x + 2)^2$ மற்றும் $(x^2 - 4)$

17. $x^2 + 3x + 2$ மற்றும் $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ

(1) $x + 1$ (2) $x + 2$

(3) $(x + 1)(x + 2)$ (4) $(x + 1)(x - 1)$

[விடை : (1)]

தீர்வு :

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

$(x + 1)$ என்பது $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ ன் காரணி

$(x + 2)$ என்பது வகுத்தி அல்ல.

$\therefore$ $(x + 1)$ என்பது பொது வகுத்தி.

18. 3 மீ, 5 மீ, 10 மீ மற்றும் 90 மீ நீளமுள்ள துணிகளை அளக்கப் பயன்படும் மீப்பெரு அளவு கொண்ட நாடாவின் நீளம்

(1) 30 (2) 50

(3) 90 (4) 100 [விடை: (3)]

தீர்வு :

3, 5, 10 மற்றும் 90 ன் மீ.பொ.ம 90

19. இரண்டு எண்களின் மீ.பொ.ம $(a + b)$ மற்றும் மீ.பொ.வ $k(a - b)$. இதில் ஒரு எண் k எனில், மற்றொரு எண்

(1) $\frac{ka}{b}$ (2) kab

(3) $a^2 - b^2$ (4) $\frac{ka + b}{ka - b}$ [விடை: (3)]

தீர்வு :

$$kx = (a + b)\, k\, (a - b)$$

$$\therefore x = \frac{(a+b)\, k\, (a-b)}{k}$$

$$= (a + b)(a - b)$$

$$= a^2 - b^2$$

20. a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம முறையே 27 மற்றும் 2079. மேலும் a என்பது 9 ஆல் வகுபடும்போது ஈவு 21 எனில், b ன் மதிப்பு

(1) 243 (2) 189

(3) 113 (4) 297 [விடை: (4)]

தீர்வு :

$$ab = 27 \times 2079$$

$$a = 9 \times 21 = 189$$

$$\therefore b = \frac{27 \times 2079}{189} = 297$$

21. $8x^4 y^2 z^3$, $10 xy^3 z^5$ மற்றும் $12x^2 y^2 z^4$ ன் மீ.பொ.ம

(1) $120 x^2 y^2 z^2$ (2) $120 x^4 y^3 z^5$

(3) $2 xy^2 z^3$ (4) $120 x^3 y^3 z^5$ [விடை: (2)]

தீர்வு :

8, 10 மற்றும் 12 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம 120

$x^4 y^2 z^3$, $xy^3 z^5$ மற்றும் $x^2 y^2 z^4$ ன் மீ.பொ.ம $x^4 y^3 z^5$.

22. $x^2 - 3ax + 2a^2$, $x^2 - 4ax + 4a^2$ மற்றும் $x^2 - ax - 2a^2$ ன் மீ.பொ.ம

(1) $(x - 2a)^2 (x^2 - a^2)$

(2) $(x - a)^2 (x - 2a)$

(3) $(x - a)(x - 2a)(x - 3a)$

(4) $(x - 2a)^3$ [விடை: (1)]

தீர்வு :

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a)$$

$$x^2 - 4xa + 4a^2 = (x - 2a)^2$$

$$x^2 - ax - 2a^2 = (x - 2a)(x + a)$$

$$\text{LCM} = (x - 2a)^2 (x + a)(x - a)$$

$$= (x - 2a)^2 (x^2 - a^2)$$

விகிதமுறு கோவைகள்

23. $\frac{x^3 - 3x^2}{9x^2 - x^4}$ என்பதன் சுருக்கப்பட்ட வடிவம்

(1) $\frac{1}{x+3}$ (2) $-\frac{1}{x+3}$

(3) $\frac{1}{3(x+1)}$ (4) $\frac{1}{3(x-1)}$ [விடை : (2)]

தீர்வு :

$$\frac{x^3 - 3x^2}{9x^2 - x^4} = \frac{x^2(x-3)}{x^2(3^2 - x^2)}$$

$$= \frac{(x-3)}{(3+x)(3-x)} = \frac{-1}{x+3}$$

24. $\frac{a^2-b^2}{a^2-3ab+2b^2}$ என்பதன் சுருக்கப்பட்ட வடிவம்

(1) $\frac{(a+b)^2}{a-2b}$ (2) $\frac{a+b}{a-2b}$

(3) $\frac{a-b}{a-2b}$ (4) $\frac{a+b}{a+2b}$ [விடை: (2)]

தீர்வு :

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-3ab+2ab^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-2b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-2b}$$

25. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+1)}$ என்பதன் சுருக்கப்பட்ட வடிவம்

(1) $\frac{1}{(x+1)(x+3)}$ (2) $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

(3) $\frac{3}{(x+2)(x+3)}$ (4) $\frac{3}{(x+1)(x+3)}$ [விடை: (4)]

தீர்வு :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{(x+3)+(x+1)+(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{3x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{3}{(x+1)(x+3)}$$

26. $x = 2\left(t+\frac{1}{t}\right)$ மற்றும் $y = 3\left(t-\frac{1}{t}\right)$ எனில், $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$ என்பது

(1) 3 (2) -4

(3) 4 (4) -3 [விடை: (3)]

தீர்வு :

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9} = \frac{2^2\left[t+\frac{1}{t}\right]^2}{4} - \frac{3^2\left[t-\frac{1}{t}\right]^2}{9}$$

$$= \left[t+\frac{1}{t}\right]^2 - \left[t-\frac{1}{t}\right]^2$$

$$= 2+2 = 4$$

27. $\frac{p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6+p^7}{p^{-3}+p^{-4}+p^{-5}+p^{-6}+p^{-7}+p^{-8}+p^{-9}}$ ன் சுருக்கப்பட்ட வடிவம்

(1) p^{10} (2) p^{-10}

(3) p^9 (4) p^{-9} [விடை: (1)]

தீர்வு :

$$\frac{p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6+p^7}{p^{-3}+p^{-4}+p^{-5}+p^{-6}+p^{-7}+p^{-8}+p^{-9}}$$

$$= \frac{p(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6)}{p^{-9}(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)}$$

$$= p^1 . p^9 = p^{1+9} = p^{10}$$

28. $\frac{x^7+2x^6+x^5}{x^3(x+1)^8}$ ன் சுருக்கப்பட்ட வடிவம்

(1) $\frac{x^2}{(x^6+1)}$ (2) $\frac{x^2}{(x+1)^6}$

(3) $\frac{x^3}{x+1}$ (4) $\frac{x^4}{x+2}$ [விடை: (2)]

தீர்வு :

$$\frac{x^7+2x^6+x^5}{x^3(x+1)^8} = \frac{x^5(x^2+2x+1)}{x^3(x+1)^8}$$

$$= \frac{x^2(x+1)^2}{(x+1)^8} = \frac{x^2}{(x+1)^6}$$

29. $\frac{x^2-5x-14}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-4}{x^2-14x+49}$ =

(1) $\frac{x+2}{x+7}$ (2) $\frac{(x+2)^2}{x-7}$

(3) $\frac{(x+2)^2}{(x-1)(x-7)}$ (4) $\frac{x-2}{(x-1)(x-7)}$

[விடை : (3)]

தீர்வு :

$$\frac{x^2-5x-14}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-4}{x^2-14x+49}$$

$$= \frac{(x-7)(x+2)}{(x-2)(x-1)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x-7)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x-1)(x-7)}$$

30. $\frac{m^2-9}{m^2+5m+6} \div \frac{3-m}{m+2} = ?$

(1) 1 (2) 3

(3) – 3 (4) – 1 **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

$$\frac{m^2-9}{m^2+5m+6} \div \frac{3-m}{m+2}$$

$$= \frac{(m+3)(m-3)}{(m+3)(m+2)} \times \frac{(m+2)}{-(m-3)}$$

$$= \frac{m-3}{-(m-3)} = -1$$

31. சுருக்குக: $\frac{(y^2+5y+4)}{\left(\frac{y^2-1}{y+5}\right)}$

(1) $\frac{y-1}{y-4}$ (2) $\frac{y+5}{y-1}$

(3) $\frac{(y+4)(y+3)}{y-1}$ (4) $\frac{y^2+9y+20}{y-1}$

[விடை: (4)]

தீர்வு :

$$\frac{(y^2+5y+4)}{\left(\frac{y^2-1}{y+5}\right)} = \frac{(y+4)(y+1)}{(y+1)(y-1)} \times (y+5)$$

$$= \frac{(y+4)(y+5)}{y-1} = \frac{y^2+9y+20}{y-1}$$

32. $\frac{x^2}{x+3} + \frac{11x+24}{x+3} =$

(1) x + 8 (2) x – 8

(3) 8 – x (4) x + 3 **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$$\frac{x^2}{x+3} + \frac{11x+24}{x+3} = \frac{x^2+11x+24}{x+3}$$

$$= \frac{(x+3)(x+8)}{x+3} = (x+8)$$

33. $\frac{5x+3}{x^2-64}$ – லிருந்து $\frac{4x-5}{x^2-64}$ ஐ கழிப்பதால் கிடைப்பதன் சுருக்கப்பட்ட வடிவம்

(1) x – 8 (2) $(x-8)^{-1}$

(3) $(x-8)^{-2}$ (4) $(x-8)^{-3}$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$$\frac{5x+3}{x^2-64} - \frac{4x-5}{x^2-64} = \frac{5x+3-4x+5}{x^2-64}$$

$$= \frac{x+8}{(x+8)(x-8)}$$

$$= \frac{1}{x-8} = (x-8)^{-1}$$

34. $\frac{2x+1}{x^2-x-6}$ ன் விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள்

(1) 1, – 2 (2) – 2, 3

(3) 2, – 3 (4) 2, 3 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$$\frac{2x+1}{x^2-x-6} = \frac{2x+1}{(x-3)(x+2)}$$

x = – 2 மற்றும் x = 3 எனும்போது, பகுதி பூச்சியமாகிறது.

∴ விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் – 2, 3.

35. $\frac{4x-2}{2x^2+x-1}$ ன் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு / மதிப்புகள்

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$

(3) $-\frac{1}{2}$ (4) – 1 **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

$$\frac{4x-2}{2x^2+x-1} = \frac{2(2x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2}{x+1}$$

x = – 1 எனும்போது, பகுதி பூச்சியமாகிறது.

∴ – 1 என்பது விலக்கப்பட்ட மதிப்பு.

36. $a+b+c=0$ எனில் $\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}$ ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) 4 [விடை : (4)]

தீர்வு :

$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}$

கொடுக்கப்பட்டது $a+b+c=0$

$\Rightarrow a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$

$\therefore \frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}$

$= \frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca} = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

$a+b+c=0$ எனில், $a^3+b^3+c^3=3abc$ (இயற்கணித சமனி)

$\therefore = \frac{3abc}{abc} = 3$

விகிதமுறு மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலம்

37. இயற்கணிதக் கோவைகளுக்கு வர்க்கமூலம் காணப் பயன்படும் முறைகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3 (2) 4

(3) 5 (4) 2 [விடை : (4)]

38. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ ன் வர்க்கமூலம்

(1) x^2+2x+3 (2) x^2+5x+5

(3) x^2+3x+2 (4) x^2+2x+1 [விடை : (2)]

தீர்வு :

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

மாற்றி அமைக்க $= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$x^2+5x=a$ என பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$(a+4)(a+6)+1 = a^2+10a+24+1$

$= a^2+10a+25 = (a+5)^2$

$(a+5)^2$ன் வர்க்க மூலம் $= |a+5|$

அதாவது $|x^2+5x+5|$

39. $16x^4-24x^3+41x^2-mx+16$ என்பது முழுவர்க்கம் எனில், 'm' ன் மதிப்பு

(1) 12 (2) -12

(3) 24 (4) -24 [விடை : (3)]

40. $\sqrt{\frac{x^{-7}y^{14}}{x^{14}y^{-28}}} \div \sqrt{\frac{x^{-15}y^{25}}{x^{10}y^{-15}}}$

(1) $\sqrt{x^3y^5}$ (2) xy

(3) x^2y (4) xy^2 [விடை : (3)]

தீர்வு :

$\sqrt{\frac{x^{-7}y^{14}}{x^{14}y^{-28}}} \div \sqrt{\frac{x^{-15}y^{25}}{x^{10}y^{-15}}} = \sqrt{\frac{x^{-7}y^{14}}{x^{14}y^{-28}} \times \frac{x^{10}y^{-15}}{x^{15}y^{25}}}$

$= \sqrt{\frac{y^{-1}}{x^{-1}} \times \frac{x^3}{y^{-3}}}$

$= \sqrt{x^4y^2} = x^2y$

41. $\sqrt{(4a^2)(6b^2)(3a^2b^2)} =$

(1) a^2b^2 (2) $6\sqrt{2}\,a^2b^2$

(3) $72a^4b^4$ (4) a^4b^4 [விடை : (2)]

இருபடிச் சமன்பாடு

42. கீழ்க்காண்பனவற்றில் எது இருபடிச் சமன்பாடு?

(1) $x^{1/2}+2x+3=0$

(2) $(x-1)(x+4)=x^2+1$

(3) $x^2-3x+5=0$

(4) $(2x+1)(3x-4)=6x^2+3$ [விடை : (3)]

43. $2+\sqrt{2}$ மற்றும் $2-\sqrt{2}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

(1) $x^2-4x+2=0$ (2) $x^2-2x+2=0$

(3) $x^2+2x-4=0$ (4) $x^2-2x+4=0$

[விடை : (1)]

தீர்வு :

மூலங்களின் கூடுதல் $= 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

$= 4-2 = 2$

இருபடிச் சமன்பாடு : x^2- (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் $= 0$

$\Rightarrow x^2-4x+2=0$

44. $\frac{p}{q}, \frac{-q}{p}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

(1) $qx^2-(q^2+p^2)x-pq=0$

(2) $pqx^2-(p^2-q^2)x-pq=0$

(3) $px^2-(p^2+1)x+p=0$

(4) $p^2x^2-(p^2-q^2)x-pq=0$ [விடை : (2)]

தீர்வு :

மூலங்களின் கூடுதல் = $\frac{p}{q}-\frac{q}{p}=\frac{p^2-q^2}{pq}$

மூலங்களின் பெருக்கல் = $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{-q}{p}\right)=-1$

இருபடிச் சமன்பாடு: x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் = 0

$$x^2-\left(\frac{p^2-q^2}{pq}\right)x-1=0$$

$pq\,x^2-(p^2-q^2)\,x-pq=0$

45. ax^2+bx+c என்பது முழுவர்க்கம் எனில் b^2 =

(1) 2ac (2) ac
(3) 4ac (4) $\sqrt{2ac}$ [விடை : (3)]

தீர்வு :

$b^2=4ac$

46. $px^2+qx+r=0$ ன் ஒரு மூலம் r எனில், மற்றொரு மூலம்

(1) p (2) q
(3) $\frac{1}{q}$ (4) $\frac{1}{p}$ [விடை : (4)]

தீர்வு :

மூலங்களின் பெருக்கல் $\alpha\beta=\frac{r}{p}$

$r(\beta)=\frac{r}{p}$

$\beta=\frac{1}{p}$

47. $px^2+qx+r=0$ என்பது ஒரு சிறந்த இருபடிச் சமன்பாடாவதற்கான கட்டுப்பாடு

(1) p = 0 (2) q = 0
(3) r = 0 (4) p = q = 0 [விடை : (2)]

48. $x^2+x-6=0$ மற்றும் $x^2+3x-10=0$ ஆகியவற்றின் பொதுமூலம்

(1) – 2 (2) 2
(3) – 3 (4) – 5 [விடை : (2)]

தீர்வு :

x – k என்பது பொதுக் காரணி என்க.

எனவே, $k^2+k-6=k^2+3k-10$

$4=2k$

$k=2$ (பொதுமூலம்)

49. $x^2-9x+18=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் உள்ள விகிதம்

(1) 1 : 2 (2) 2 : 1
(3) – 1 : 2 (4) – 2 : 1 [விடை: (1)]

தீர்வு :

$x^2-9x+18=0$

மூலங்களின் கூடுதல் = $-\left(\frac{-9}{1}\right)=9$

மூலங்களின் பெருக்கல் = $\frac{18}{1}=18$

விகிதம் 9 : 18 = 1 : 2

50. $3x^2-14x+k=0$ ன் தன்மைகாட்டி 100 எனில், k என்பது

(1) 8 (2) 32
(3) 16 (4) 24 [விடை : (1)]

தீர்வு :

தன்மைகாட்டி = 100

$b^2-4ac=100$

$(-14)^2-4(3)(k)=100$

$196-12k=100$

$k=8$

51. $4x^2-2x+8=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

(1) மெய் மற்றும் சமம்
(2) மெய் மற்றும் சமமல்ல
(3) விகிதமற்றவை
(4) மெய் அல்ல [விடை : (4)]

தீர்வு :

$b^2-4ac=(-2)^2-4(4)(8)$

$=4-128=-124<0$

52. $(x-a)(x-b)=b^2$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

(1) மெய் மற்றும் சமம் (2) மெய் மற்றும் சமமல்ல
(3) கற்பனை எண்கள் (4) சமம்
[விடை : (2)]

தீர்வு :

$(x-a)(x-b)=b^2$

$x^2-(a+b)x+ab-b^2=0$

தன்மைகாட்டி $B^2-4AC=(a+b)^2-4(1)(ab-b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-4ab+4b^2$

$=a^2-2ab+b^2+4b^2$

$=(a-b)^2+4b^2>0$

∴ மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமல்ல.

53. $\sqrt{x^2+x+1}=2$ ன் தன்மைகாட்டி

(1) – 3 (2) 13
(3) 11 (4) 12 [விடை : (2)]

தீர்வு :

$$\sqrt{x^2+x+1} = 2$$

வர்க்கப்படுத்த, $x^2 + x + 1 = 4$

$x^2 + x - 3 = 0$

தன்மைகாட்டி $b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-3)$

$= 1 + 12 = 13$

54. $x^2 - 6x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a, b எனில், $a^2 + b^2$ ன் மதிப்பு

(1) 36 (2) 24

(3) 12 (4) 6 [விடை : (2)]

தீர்வு :

மூலங்களின் கூடுதல் $= a + b = 6$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= ab = 6$

$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 36 - 12 = 24$

55. $x^2 + kx + 12 = 0$ ன் மூலங்கள் 1 என்ற எண்ணால் எப்போது வேறுபடும்?

(1) $k = \pm\sqrt{12}$ (2) $k = \pm\sqrt{48}$

(3) $k = \pm\sqrt{47}$ (4) $k = \pm\sqrt{49}$ [விடை : (4)]

தீர்வு :

$\alpha, \alpha + 1$ என்பன மூலங்கள்

மூலங்களின் கூடுதல் $= \alpha + \alpha + 1 = -k$

$2\alpha + 1 = -k$

$$\alpha = \frac{-k-1}{2}$$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \alpha(\alpha+1) = 12$

$\alpha^2 + \alpha = 12$

$$\left(\frac{-k-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-k-1}{2}\right) = 12$$

$k^2 + 2k + 1 - 2k - 2 = 48$

$k^2 - 49 = 0$

$k^2 = 49$

$k = \pm\sqrt{49}$

56. அஜய் மற்றும் விஜய் என்ற இருவர் ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றனர். தீர்க்கும்போது, அஜய் மாறிலி உறுப்பில் தவறு செய்து 8, 2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகவும், விஜய் தீர்க்கும்போது x ன் கெழுவில் தவறை ஏற்படுத்தி – 9, – 1 ஆகியவற்றை மூலங்களாகவும் பெறுகின்றனர். சமன்பாட்டின் சரியான மூலங்கள் யாவை?

(1) 8, – 1 (2) – 9, 2

(3) – 8, – 2 (4) 9, 1 [விடை : (4)]

தீர்வு :

சமன்பாடு $x^2 + ax + b = 0$

அஜய் 'b' என்பதில் தவறு செய்கிறார் மற்றும் மூலங்கள் 8, 2.

எனவே, சமன்பாடு $x^2 - 10x + 16 = 0$

விஜய் 'x' ன் கெழுவில் தவறு செய்கிறார் மற்றும் மூலங்கள் – 9, – 1.

எனவே, சமன்பாடு $x^2 + 10x + 9 = 0$

$\therefore$ சரியான சமன்பாடு $x^2 - 10x + 9 = (x-9)(x-1) = 0$

$\therefore$ மூலங்கள் 9 மற்றும் 1.

57. தொடர்ச்சியான இரு இரட்டை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 100 எனில், அந்த எண்கள்

(1) 6, 8 அல்லது – 8, – 6

(2) – 6, 8 அல்லது – 8, –6

(3) – 6, – 8 அல்லது 6, – 8

(4) –6, – 8 அல்லது 7, 8 [விடை : (1)]

தீர்வு :

x மற்றும் x + 2 என்பன எண்கள் என்க.

எனவே, $x^2 + (x+2)^2 = 100$

$2x^2 + 4x - 96 = 0$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x+8)(x-6) = 0$

$x = 6$ அல்லது $x = -8$

$\therefore$ அந்த எண்கள் 6, 8 மற்றும் – 8, – 6.

58. $2x(kx-4) - x^2 + 6 = 0$ என்பதற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை எனில், k ன் மீச்சிறு முழு மதிப்பு

(1) 3 (2) 1

(3) 2 (4) 4 [விடை : (3)]

தீர்வு :

சமன்பாடு $2x(kx-4) - x^2 + 6 = 0$

$(2k-1)x^2 - 8x + 6 = 0$

தன்மைகாட்டி $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 64 - 4(2k-1)(6)$

$= 88 - 48k$

$= 8(11 - 6k)$

Δ குறை எண்ணாக இருந்தால் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மூலங்கள் கிடையாது. $11 - 6k < 0$ எனும்போது, Δ குறைமதிப்பு இருக்கும். அதாவது $k > \frac{11}{6}$ எனும்போது, சமன்பாட்டின் மெய்மூலங்கள் இல்லாமலிருப்பதற்கான மீச்சிறு முழு எண் மதிப்பு 2.

59. α, β என்பன $ax^2 + 2bx + c = 0$ ன் மூலங்கள் எனில், $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} =$

(1) $\frac{2b}{ac}$ (2) $\frac{2b}{\sqrt{ac}}$

(3) $\frac{-2b}{\sqrt{ac}}$ (4) $\frac{-b}{\sqrt{ac}}$ [விடை : (3)]

தீர்வு :

$ax^2 + 2bx + c = 0$

α, β என்பன மூலங்கள்

மூலங்களின் கூடுதல் $= \alpha + \beta = \frac{-2b}{a}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$\therefore \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\frac{-2b}{a}}{\sqrt{\frac{c}{a}}} = \frac{-2b}{\sqrt{ac}}$$

60. α, β என்பன $x^2 + kx + 12 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள். மேலும் $\alpha - \beta = 1$ எனில், k ன் மதிப்பு

(1) 0 (2) ± 5

(3) ± 1 (4) ± 7 [விடை : (4)]

தீர்வு :

$x^2 + kx + 12 = 0$ ன் மூலங்கள் α, β

$\therefore \alpha + \beta = -k$ மற்றும்

$\alpha\beta = 12$ மற்றும்

கொடுக்கப்பட்ட $\alpha - \beta = 1$

இப்போது $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$(1)^2 = k^2 - 48$

$k^2 = 49 \Rightarrow k = \pm 7$

61. α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha + \beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ என்பனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

(1) $a^2x^2 + a(b-c)x + bc = 0$

(2) $a^2x^2 + a(b-c)x - bc = 0$

(3) $ax^2 + (b+c)x + bc = 0$

(4) $ax^2 - (b+c)x - bc = 0$ [விடை : (2)]

தீர்வு :

முதலாவது மூலம், $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

இரண்டாவது மூலம், $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு : $x^2 -$ (மூலங்களின் கூடுதல்) $x +$ மூலங்களின் பெருக்கல் $= 0$

அதாவது, $x^2 - (\alpha + \beta + \alpha\beta)x + (\alpha + \beta)(\alpha\beta) = 0$

$$x^2 - \left(\frac{-b}{a} + \frac{c}{a}\right)x + \left(\frac{-b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a^2x^2 + a(b-c)x - bc = 0$$

அணிகள்

62. A என்ற அணியின் வரிசை 3×5 மற்றும் B என்ற அணியின் வரிசை 2×3 எனில், BA ன் வரிசை

(1) 2×3 (2) 3×2

(3) 2×5 (4) 5×2 [விடை : (3)]

63. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $kA = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{pmatrix}$ எனில், k, a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் முறையே

(1) $-6, -12, -18$ (2) $-6, 4, 9$

(3) $-6, -4, -9$ (4) $-6, 12, 18$ [விடை : (3)]

தீர்வு :

$$k\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{pmatrix}$$

$-4k = 24 \Rightarrow k = -6$

$2k = 3a \Rightarrow a = -4$

$3k = 2b \Rightarrow b = -9$

64. $m(-3 \quad 4) + n(4 \quad -3) = (10 \quad -11)$ எனில் $3m + 7n$ ஐக் காண்க.

(1) 3 (2) 5

(3) 10 (4) 1 [விடை : (4)]

தீர்வு :

$-3m + 4n = 10$

$4m - 3n = -11$

தீர்க்கக் கிடைப்பது, $m = -2$ மற்றும் $n = 1$

$\therefore 3m + 7n = -6 + 7 = 1$

65. $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A^2 = I$ எனில், x என்பது

(1) 0 (2) 1

(3) -1 (4) 2 [விடை : (1)]

தீர்வு :

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

கொடுக்கப்பட்டது $A^2 = I$

$$\therefore \begin{pmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = 0$

66. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A + A^T$ என்பது

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$ (4) இவற்றில் எதுவுமில்லை

[விடை : (1)]

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

67. $U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ எனில், $UV + XY$ என்பது

(1) 20 (2) (– 20)

(3) – 20 (4) (20) [விடை : (4)]

தீர்வு :

$$UV = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (6 - 6 + 4) = (4)$$

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= (0 + 4 + 12) = (16)$$

$$UV + XY = (4) + (16) = (20)$$

68. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A^2 = kA$ எனில், $k =$

(1) 4 (2) 5

(3) 6 (4) 7 [Ans : (3)]

தீர்வு :

$$A^2 = A\,A$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9+9 & -9-9 \\ -9-9 & 9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -18 \\ -18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$kA = \begin{pmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{pmatrix}$$

கொடுக்கப்பட்ட $A^2 = kA$

$$\begin{pmatrix} 18 & -18 \\ -18 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k & -3k \\ -3k & 3k \end{pmatrix}$$

$3k = 18 \Rightarrow k = 6$

69. $A + B = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $A =$

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ [விடை : (1)]

தீர்வு :

$$A + B = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

70. $A = \begin{pmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & y \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A + B = I$ எனில், x, y மதிப்புகள் முறையே

(1) – 4, 4 (2) – 4, – 4

(3) 4, 4 (4) 4, – 4 [விடை : (1)]

தீர்வு :

$$A + B = I$$

$$\begin{pmatrix}5 & x\\ y & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & y\\ -4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & x+y\\ y-4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$x+y=0,\quad y-4=0$
$x+4=0 \qquad y=4$
$x=-4$

71. 36 உறுப்புகளைக் கொண்ட எத்தனை அணிகளை அமைக்க முடியும்?

(1) 10 (2) 9
(3) 8 (4) 7 [விடை : (2)]

தீர்வு :

36 உறுப்புகள் உள்ளதால், அணியின் வரிசை $6\times6, 9\times4, 4\times9, 12\times3, 3\times12, 2\times18, 18\times2, 36\times1, 1\times36$ என இருக்க இயலும்.

72. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ மற்றும் $f(x)=x^2-5x+4I$ எனில், $f(A)=$

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ [விடை : (4)]

தீர்வு :

$f(x)=x^2-5x+4I$

$\therefore f(A)=A^2-5A+4I$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

73. A, B, C ஆகியவற்றின் வரிசைகள் முறையே 3×4, 5×4 மற்றும் 5×8 எனில், (AB^TC) ன் வரிசை

(1) 8×3 (2) 3×8
(3) 3×4 (4) 4×5 [விடை : (2)]

தீர்வு :

A ன் வரிசை $=3\times4$, B^Tன் வரிசை $=4\times5$

AB^Tன் வரிசை $=3\times5$

C ன் வரிசை $=5\times8$

$\therefore AB^TC$ன் வரிசை $=3\times8$

74. கொடுக்கப்பட்டது $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ எனில், $A^3-A^2=$

(1) 2A (2) 2I
(3) A (4) I [விடை : (1)]

தீர்வு :

$A^2=AA$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$A^3=A^2A$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$A^3-A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2A$$

75. $AB=A$, $BA=B$ எனில், $A^2+B^2=$

(1) A + B (2) A – B
(3) AB (4) 0 [விடை : (1)]

தீர்வு :

$A^2+B^2=A\times A+B\times B$
$=(AB)(AB)+(BA)(BA)$
$=A(BA)B+B(AB)A$
$=(AB)B+(BA)A \quad [\because AB=A, BA=B]$
$=AB+BA$
$=A+B$

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. தீர்க்க $5x+2y=3$, $3x+2y=5$

தீர்வு :

$5x+2y=3 \quad \ldots(1)$
$3x+2y=5 \quad \ldots(2)$

(1) – (2)
$2x=-2$
$x=\frac{-2}{2}=-1$

(1) ல் பிரதியிட,
$5(-1)+2y=3$
$2y=3+5$
$y=\frac{8}{2}=4$

$\therefore$ தீர்வு: $x=-1, y=4$

2. $x^3 + 8y^3$ மற்றும் $x + 2y$ ன் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு :

$$x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3$$
$$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$
$$\because a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$x + 2y = x + 2y.$$
$$\therefore \text{மீ.பொ.வ} = (x + 2y)$$

3. $m^2 - 5m - 14$ என்பது ஒரு கோவை மீ.பொ.வ என்பது $(m - 7)$ மற்றும் மீ.பொ.ம என்பது $m^3 - 10m^2 + 11m + 70$ எனில் மற்றொரு கோவையைக் காண்க.

தீர்வு :

$P(x) \times Q(x) =$ மீ.பொ.வ $\times$ மீ.பொ.ம என்பதை அறிவோம்.

$$\therefore Q(x) = \frac{\text{மீ.பொ.வ} \times \text{மீ.பொ.ம}}{P(x)}$$

$$Q(x) = \frac{(m-7)(m^3 - 10m^2 + 11m + 70)}{m^2 - 5m - 14}$$

$$= \frac{(m-7)(m-5)(m^2 - 5m - 14)}{m^2 - 5m - 14}$$

$$= m^2 - 12m + 35$$

4. $10(x^2 + x - 20)$, $15(x^2 - 3x - 4)$, $20(x^2 + 2x + 1)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு :

10, 15 மற்றும் 20 ன் மீ.பொ.வ 5

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$$
$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$
$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$$
$$\therefore \text{மீ.பொ.வ} = 5$$

5. $a^2 + 3a + 2$, $a^2 + 5a + 6$, $a^2 + 4a + 4$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம காண்க.

தீர்வு :

$$a^2 + 3a + 2 = (a + 2)(a + 1)$$
$$a^2 + 5a + 6 = (a + 2)(a + 3)$$
$$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$$
$$\text{மீ.பொ.ம} = (a + 2)^2 (a + 1)(a + 3)$$

6. சுருக்குக: $\frac{3x^2 - 3x}{3x^3 - 6x^2 + 3x}$

தீர்வு :

$$\frac{3x^2 - 3x}{3x^3 - 6x^2 + 3x} = \frac{3x(x-1)}{3x(x^2 - 2x + 1)}$$
$$= \frac{3x(x-1)}{3x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

7. சுருக்குக: $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x - 21}$

தீர்வு :

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x - 21} = \frac{x(x+3)}{(x-7)(x+3)}$$
$$= \frac{x}{x-7}$$

8. சுருக்குக: $\frac{2x^2 + 26x + 84}{2x^2 + 12x - 14}$

தீர்வு :

$$\frac{2x^2 + 26x + 84}{2x^2 + 12x - 14} = \frac{2(x^2 + 13x + 42)}{2(x^2 + 6x - 7)}$$
$$= \frac{(x+6)(x+7)}{(x+7)(x-1)}$$
$$= \frac{x+6}{x-1}$$

9. சுருக்குக: $\frac{1}{4x^2} + \frac{5}{6xy^2}$

தீர்வு :

$$\frac{1}{4x^2} + \frac{5}{6xy^2} = \frac{1(3y^2) + 5(2x)}{12x^2y^2}$$
$$= \frac{3y^2 + 10x}{12x^2y^2}$$

10. சுருக்குக: $\frac{3x}{x^2 + 3x - 10} - \frac{6}{x^2 + 3x - 10}$

தீர்வு :

$$\frac{3x}{x^2 + 3x - 10} - \frac{6}{x^2 + 3x - 10} = \frac{3x - 6}{x^2 + 3x - 10}$$
$$= \frac{3(x-2)}{(x+5)(x-2)}$$
$$= \frac{3}{x+5}$$

11. சுருக்குக: $\frac{x+4}{2x} - \frac{x-1}{x^2}$

தீர்வு :

$$\frac{x+4}{2x} - \frac{x-1}{x^2} = \frac{x(x+4) - 2(x-1)}{2x^2}$$
$$= \frac{x^2 + 4x - 2x + 2}{2x^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 2}{2x^2}$$

12. மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் என்பன முறையே (i) – 12, 32 (ii) 2a, a^2-b^2 எனில் அந்த இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) கூட்டற்பலன் = – 12

பெருக்கற்பலன் = 32

இருபடிச் சமன்பாடு:

x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கல் = 0

$x^2 + 12x + 32 = 0$

(ii) மூலங்களின் கூடுதல் '2a'

மூலங்களின் பெருக்கல் '$a^2 - b^2$'

இருபடிச் சமன்பாடு: $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

13. இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $x^2 + 2x - 360 = 0$

(ii) $\frac{a^2d^2}{b}x^2 + 2acdx + c^2b = 0.$

தீர்வு :

(i) $x^2 + 2x - 360 = 0$

$a = 1, b = 2, c = -360$

மூலங்களின் கூடுதல் $= \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \frac{c}{a} = \frac{-360}{1} = -360$

(ii) $\frac{a^2d^2}{b}x^2 + 2ac\,dx + c^2b = 0$

மூலங்களின் கூடுதல் $= \frac{-B}{A}$

$= \frac{-2acd}{\left(\frac{a^2d^2}{b}\right)} = \frac{-2bc}{ad}$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \frac{C}{A}$

$= \frac{c^2b}{\left(\frac{a^2d^2}{b}\right)} = \frac{c^2b^2}{a^2d^2}$

14. $25p^2 - 49 = 0$ என்பதை காரணிப்படுத்தல் முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

$25p^2 - 49 = 0$

$(5p)^2 - (7)^2 = 0 \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$(5p + 7)(5p - 7) = 0$

$5p + 7 = 0, \quad 5p - 7 = 0$

$p = -7/5, \quad p = 7/5$

தீர்வு : $p = -7/5, 7/5$

15. $8x^2 - 22x - 21 = 0$ என்பதை காரணிப்படுத்தல் முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

$8x^2 - 22x - 21 = 0$

$8x^2 - 28x + 6x - 21 = 0$

$4x(2x - 7) + 3(2x - 7) = 0$

$(2x - 7)(4x + 3) = 0$

$2x - 7 = 0, \quad 4x + 3 = 0$

$x = 7/2, \quad x = -3/4$

தீர்வு : $x = -3/4, 7/2$

16. $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ என்பதை காரணிப்படுத்தல் முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

$x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

$x^2 - x - \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$

$x(x - 1) - \sqrt{2}(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x - \sqrt{2}) = 0$

$x - 1 = 0$ (அ) $x - \sqrt{2} = 0$

$x = 1$ (அ) $x = \sqrt{2}$

தீர்வு : $x = 1, \sqrt{2}$

17. $21x^2 - 2x + \frac{1}{21} = 0$ என்பதை காரணிப்படுத்தல் முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

$21x^2 - 2x + \frac{1}{21} = 0$

$441x^2 - 42x + 1 = 0$

$441x^2 - 21x - 21x + 1 = 0$

$21x(21x - 1) - 1(21x - 1) = 0$

$(21x - 1)(21x - 1) = 0$

$x = \frac{1}{21}$ (இருமுறை)

தீர்வு: $x = \frac{1}{21}, \frac{1}{21}$

18. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமன்பாடுகளை வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் தீர்க்க.

(i) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(ii) $x^2 + 3x - 5 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

(iv) $2x^2 + x - 4 = 0$

தீர்வு :

(i) $x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^2 - 4x = -1$

$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$

$(x-2)^2 = 3$

$x - 2 = \pm\sqrt{3}$

$x - 2 = +\sqrt{3}$ மற்றும் $x - 2 = -\sqrt{3}$

தீர்வு: $x = 2 \pm \sqrt{3}$

(ii) $x^2 + 3x - 5 = 0$

$x^2 + 3x = 5$

$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 5 + \frac{9}{4}$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$

$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$

$\therefore x + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}, \; x + \frac{3}{2} = \frac{-\sqrt{29}}{2}$

$\therefore$ தீர்வு: $x = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}, \; x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$

$4x^2 + 4\sqrt{3}\,x = -3$

4 ஆல் வகுக்க, $x^2 + \sqrt{3}x = \frac{-3}{4}$

$x^2 + \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3}{4}$

$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (இருமுறை)

(iv) $2x^2 + x - 4 = 0$

$2x^2 + x = 4$

2 ஆல் வகுக்க, $x^2 + \frac{x}{2} = 2$

$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 2 + \frac{1}{16}$

$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$

$x + \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

$\therefore \; x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4}$ மற்றும்

$x + \frac{1}{4} = \frac{-\sqrt{33}}{4}$

$x = \frac{\sqrt{33} - 1}{4}, \; x = \frac{-\left(\sqrt{33} + 1\right)}{4}$

என்பதே தீர்வாகும்.

19. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமன்பாடுகளை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

(i) $9x^2 - 15x + 6 = 0$

(ii) $4x^2 - 3 = 2x$

(iii) $2t^2 - 5t + 3 = 0$

(iv) $3x^2 = -7x - 2$

தீர்வு :

(i) $9x^2 - 15x + 6 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

$a = 9, b = -15, c = 6$

$\therefore \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{18}$

$= \frac{15 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{15 \pm 3}{18}$

$= \frac{15 + 3}{18}, \frac{15 - 3}{18}$

$x = \frac{18}{18}, \frac{12}{18}$

தீர்வு: $x = 1, \frac{2}{3}$

(ii) $4x^2 - 3 = 2x$

$4x^2 - 2x - 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 4, b = -2, c = -3$

இப்போது, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{8}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{8}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{4 \times 13}}{8}$

$= \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{8}$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$$

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{13}}{4}, \frac{1-\sqrt{13}}{4}$$

(iii) $2t^2 - 5t + 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 2, b = -5, c = 3$

இப்போது, $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$= \frac{5+1}{4}, \frac{5-1}{4} = \frac{6}{4}, \frac{4}{4}$$

$$\therefore t = \frac{3}{2}, 1$$

(iv) $3x^2 = -7x - 2$

$\Rightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 3, b = 7, c = 2$

இப்போது, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$= \frac{-7 \pm 5}{6}$$

$$= \frac{-7+5}{6}, \frac{-7-5}{6}$$

$$= -\frac{2}{6}, -\frac{12}{6}$$

$$= \frac{-1}{3}, -2$$

20. (i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
(ii) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$
(iii) $2x^2 - 4x + 3 = 0$
(iv) $x^2 - 4x + 4 = 0$ ஆகியவற்றின் மூலங்களின் தன்மை காண்க.

தீர்வு :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

நமக்குக் கிடைப்பது $a = 3, b = -5, c = 2$

தன்மை காட்டி $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4(3)(2)$

$= 25 - 24$

$= 1 > 0$

$\therefore$ மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.

(ii) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 1, b = -2\sqrt{2}, c = -6$

தன்மை காட்டி $\Delta = b^2 - 4ac$

$= \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(-6)$

$= 8 + 24 = 32 > 0$

எனவே, மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானவை.

(iii) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது

$a = 2, b = -4, c = 3.$

தன்மைகாட்டி $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(2)(3)$

$= 16 - 24$

$= -8 < 0$

எனவே, மூலங்கள் மெய்யல்ல.

(iv) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது

$a = 1, b = -4, c = 4.$

தன்மைகாட்டி $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(1)(4)$

$= 16 - 16 = 0$

எனவே, மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம்.

21. $5x^2 + 13x + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்திற்கு தலைகீழி எனில், k ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு :

மூலங்கள் α மற்றும் $\frac{1}{\alpha}$ என்க.

சமன்பாடு $5x^2 + 13x + k = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது,

$a = 5, b = 13, c = k$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{-13}{5}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{k}{5}$$

$$1 = \frac{k}{5} \Rightarrow k = 5$$

22. $a_{ij} = -2i + 3j$ எனில், 2×2 வரிசையுடைய அணியை அமைக்க.

தீர்வு :

$$a_{ij} = -2i + 3j$$

$$a_{11} = -2(1) + 3(1) = 1$$

$$a_{12} = -2(1) + 3(2) = 4$$

$$a_{21} = -2(2) + 3(1) = -1$$

$$a_{22} = -2(2) + 3(2) = 2$$

எனவே, 2×2 வரிசையுடைய அணி $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ ன் நிரை-நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

24. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ எனில் $(A^T)^T$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 4 \\ 1/2 & 2 & 7/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & 2 & 3/2 & 1 \\ 4 & 7/2 & 3 & 5/2 \end{pmatrix}$$

25. $\begin{pmatrix} x-y & 2y \\ 2y+z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், $x + y + z$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

அணிகள் சமம் என்பதால் ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்தலாம்.

இப்போது, $x - y = 1$, $2y = 4$

$2y + z = 9$, $x + y = 5$

$2y = 4$ $\quad x + y = 5$ $\quad 2y + z = 9$

$y = 2$ $\quad x + 2 = 5$ $\quad 2(2) + z = 9$

$x = 3$ $\quad z = 9 - 4 = 5$

$\therefore x + y + z = 3 + 2 + 5 = 10$

26. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், $5A - 3B + 2C$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$5A - 3B + 2C$$

$$= 5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

27. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $A + (B + C) = (A + B) + C$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$$B + C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

இடப்பக்கம்

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

வலப்பக்கம்

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore A + (B + C) = (A + B) + C$

சரிபார்க்கப்பட்டது

28. சுருக்குக.

$$\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

தீர்வு :

$$\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

29. $2A + B + X = 0$ எனில், 'X' என்ற அணியைக் காண்க. இங்கு $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது $2A + B + X = 0$

$$2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$$

30. கொடுக்கப்பட்டது $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA யைக் காண்க.

தீர்வு :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-8 & 6+20 \\ 3-4 & 9+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+9 & 4+6 \\ -4+15 & -8+10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

31. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$ எனில், $AB = O$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24-24 & 12-12 \\ 96-96 & 48-48 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

நிறுவப்பட்டது.

32. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ எனில், $-A^2 + 6A$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & -4-8 \\ -6-12 & 6+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -18 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -A^2 + 6A = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ 18 & -22 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ 18 & -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

33. தீர்க்க $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 0.$

தீர்வு :

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-2 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$x - 2 = 0$

$x = 2$

34. $f(x) = 18x^4 - 36x^3 + 18x^2$ மற்றும் $g(x) = 45x^6 - 45x^3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.ம காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 18x^4 - 36x^3 + 18x^2$$

$$= 18x^2(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 18x^2(x-1)^2$$

$$g(x) = 45x^6 - 45x^3 = 45x^3(x^3 - 1)$$

$$= 45x^3(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\therefore \text{மீ.பொ.ம} = 90x^3(x-1)^2(x^2 + x + 1)$$

35. $\dfrac{6x^3 + 57x^2 + 72x}{10x^3 + 85x^2 + 40x}$ என்பதன் விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் ஏதேனும் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{6x^3 + 57x^2 + 72x}{10x^3 + 85x^2 + 40x} = \frac{3x(2x^2 + 19x + 24)}{5x(2x^2 + 17x + 8)}$$

$$= \frac{3(x+8)(2x+3)}{5(x+8)(2x+1)}$$

$$= \frac{3(2x+3)}{5(2x+1)}$$

$x = -1/2$ எனும்போது $2x + 1 = 0$. ஆகவே பின்னம் வரையறுக்கப்படாததாகிறது.

∴ விலக்கப்பட்ட மதிப்பு $-1/2$

36. சுருக்குக: $\dfrac{x^3 + 27}{x^2 + 12x + 27} \times \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x - 21}$

தீர்வு :

$$\frac{x^3 + 27}{x^2 + 12x + 27} \times \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x - 21}$$

$$= \frac{x^3 + 3^3}{(x+3)(x+9)} \times \frac{x(x+3)}{(x-7)(x+3)}$$

$$= \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{(x+3)(x+9)} \times \frac{x(x+3)}{(x-7)(x+3)}$$

$$= \frac{x(x^2 - 3x + 9)}{(x+9)(x-7)} = \frac{x(x^2 - 3x + 9)}{x^2 + 2x - 63}$$

37. சுருக்குக: $\dfrac{x^2 - 25}{5x + x^2} \div \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^2 + 8x + 15}$

தீர்வு :

$$\frac{x^2 - 25}{5x + x^2} \div \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 + 8x + 15}$$

$$= \frac{x^2 - 5^2}{x(5+x)} \times \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 10x + 25}$$

$$= \frac{(x+5)(x-5)}{x(5+x)} \times \frac{(x+3)(x+5)}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{(x+3)(x+5)}{x(x-5)}$$

38. இரண்டு இயல் எண்களின் கூடுதல் 8. அவற்றின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் $\dfrac{8}{15}$ எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் எண் 'x' மற்றும்

மற்ற எண் $8 - x$ என்க. [∵ கூடுதல் 8]

கொடுக்கப்பட்டது, $\frac{1}{x}+\frac{1}{8-x}=\frac{8}{15}$

$$\frac{8-x+x}{x(8-x)}=\frac{8}{15}$$
$$\frac{8}{x(8-x)}=\frac{8}{15}$$
$$x^2-8x+15=0$$
$$(x-5)(x-3)=0$$
$$x=3,5$$

∴ இரு இயல் எண்கள் 3, 5.

39. k ன் எந்த மதிப்புக்கு, $(k+1)x^2-2(k-1)x+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமாக இருக்கும்?

தீர்வு :

$$(k+1)x^2-2(k-1)x+1=0$$

$ax^2+bx+c=0$ உடன் ஒப்பிட

கிடைப்பது, $a=k+1, b=-2(k-1), c=1$

மெய் மற்றும் சமமான மூலங்களுக்கு $\Delta=0$

அதாவது, $b^2-4ac=0$

$$[-2(k-1)]^2-4(k+1)(1)=0$$
$$4(k-1)^2-4(k+1)=0$$
$$(k-1)^2-(k+1)=0$$
$$k^2-2k+1-k-1=0$$
$$k^2-3k=0$$
$$k(k-3)=0$$
$$k=0; \quad k-3=0$$

$k=0$ (அல்லது) $k=3$

40. $(x-a)(x-b)=h^2$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(x-a)(x-b)=h^2$$
$$x^2-(a+b)x+ab-h^2=0$$

தன்மைகாட்டி $\Delta = B^2-4AC$

$$=[-(a+b)]^2-4(1)(ab-h^2)$$
$$=(a+b)^2-4ab+4h^2$$
$$=(a-b)^2+4h^2>0$$

எனவே மூலங்கள் மெய்யானவை.

41. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதலும், மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலும் சமம் எனில், தேவையான கட்டுப்பாடு யாது?

தீர்வு :

$ax^2+bx+c=0$ ன் மூலங்கள் α, β என்க.

எனவே $\alpha+\beta=-b/a$ மற்றும் $\alpha\beta=c/a$

கொடுக்கப்பட்டது : $\alpha+\beta=\alpha^2+\beta^2$

$$\alpha+\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$\frac{-b}{a}=\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$$
$$\frac{-b}{a}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$$
$$\frac{-b}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$
$$-ab=b^2-2ac$$

$2ac=b^2+ab$ என்பது தேவையான கட்டுப்பாடு.

42. $A=\begin{pmatrix} a & 1 & x \\ 2 & \sqrt{3} & x^2 \\ 0 & 5 & y \end{pmatrix}$ என்ற அணியில்,

(i) 'A' ன் வரிசை
(ii) 'A' ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(iii) a_{23}, a_{31}, a_{12} ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & x \\ 2 & \sqrt{3} & x^2 \\ 0 & 5 & y \end{pmatrix}$$

(i) A ன் வரிசை $=3\times3$

(ii) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $=3\times3=9$

(iii) $a_{23}=x^2, a_{31}=0, a_{12}=1$

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ஒரு பின்னத்தில் தொகுதியுடன் 1 ஐக் கூட்டி மற்றும் பகுதியுடன் 1 ஐக் கழிக்க, பின்னத்தின் மதிப்பில் 1 குறைகிறது. மேலும் பகுதியுடன் 1 ஐக் கூட்டினால் பின்னத்தின் மதிப்பு 1/2 ஆகிறது எனில் பின்னத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$\frac{'x'}{y}$ என்பது பின்னம் என்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $\frac{x+1}{y-1}=1$

$$x-y+2=0$$
$$x-y=-2 \quad \ldots(1)$$

மற்றும் $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad 2x - y - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2x - y = 1 \quad \ldots (2)$

$x - y = -2$

(1) – (2) $\Rightarrow \quad -x = -3$

$x = 3$

(1) ல் பிரதியிட,

$3 - y = -2 \quad \Rightarrow y = 5$

எனவே, தேவையான பின்னம் 3/5.

2. ஐந்து வருடங்களுக்கு முன்பு நூரியின் வயது சோனுவின் வயதைப் போல் மும்மடங்கு மற்றும் 10 வருடங்களுக்கு பிறகு நூரி, சோனுவைப்போல் இரு மடங்கு வயதைக் கொண்டவர் எனில், நூரி மற்றும் சோனு ஆகியோரின் வயது என்ன?

தீர்வு :

நூரியின் தற்போதைய வயது 'x' மற்றும் சோனுவின் தற்போதைய வயது 'y' என்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $x - 5 = 3(y - 5)$

$\Rightarrow \quad x - 3y = -10 \quad \ldots (1)$

மற்றும் $x + 10 = 2(y + 10)$

$\Rightarrow \quad x - 2y = 10 \quad \ldots (2)$

(1), (2) ஐத் தீர்க்க.

$x - 3y = -10$

$x - 2y = 10$

(1) – (2) $\Rightarrow \quad -y = -20$

$y = 20$

(2) ல் பிரதியிட,

$x - 2(20) = 10$

$\Rightarrow x = 10 + 40 = 50$

∴ நூரியின் தற்போதைய வயது 50 வருடங்கள்

சோனுவின் தற்போதைய வயது 20 வருடங்கள்.

3. வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15,$

$g(x) = 4x^2 - 16x + 12$

$= 4(x^2 - 4x + 3)$

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ ஐ $x^2 - 4x + 3$ ஆல் வகுக்க

	$x - 5$	
$x^2 - 4x + 3$	$x^3 - 9x^2 + 23x - 15$	
	$x^3 - 4x^2 + 3x$	(–)
	$-5x^2 + 20x - 15$	
	$-5x^2 + 20x - 15$	(–)
	0	

∴ மீ.பொ.வ = $x^2 - 4x + 3$

4. வகுத்தல் முறையில் $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ என்பதன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

	$x^2 - 2x + 3$	
x^2	$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$	
	x^4	
	(–)	
$2x^2 - 2x$	$-4x^3 + 10x^2$	
	$-4x^3 + 4x^2$	
	(+) (–)	
$2x^2 - 4x + 3$	$6x^2 - 12x + 9$	
	$6x^2 - 12x + 9$	
	(–) (+) (–)	
	0	

∴ $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9} = |x^2 - 2x + 3|$

5. வகுத்தல் முறையில் $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ என்பதன் வர்க்கமூலம் காண்க.

தீர்வு :

	$x^2 - x + 1$	
x^2	$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	
	x^4	
	(–)	
$2x^2 - x$	$-2x^3 + 3x^2$	
	$-2x^3 + x^2$	
	(+) (–)	
$2x^2 - 2x + 1$	$2x^2 - 2x + 1$	
	$2x^2 - 2x + 1$	
	(–) (+) (–)	
	0	

∴ $\sqrt{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = |x^2 - x + 1|$

6. ராமனின் 3 வருடங்களுக்கு முன் உள்ள வயதின் தலைகீழி மற்றும் 5 வருடங்களுக்குப் பின் உள்ள வயதின் தலைகீழி ஆகியவற்றின் கூடுதல் $\frac{1}{3}$ எனில், அவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

தீர்வு :

இராமனின் தற்போதைய வயது 'x' என்க.

∴ 3வருடங்களுக்கு முன்னால் அவர் வயது $(x-3)$

மற்றும் 5வருடங்களுக்கு பின் அவர் வயது $(x+5)$

கொடுக்கப்பட்டது

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x+5+x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$3(2x+2) = (x-3)(x+5)$$

$$6x+6 = x^2+2x-15$$

$$x^2-4x-21 = 0$$

$$(x-7)(x+3) = 0$$

$$x-7 = 0 \text{ மற்றும்}$$

$$x+3 = 0$$

$x = -3$ என்பது சாத்தியமல்ல

∴ இராமனின் தற்போதைய வயது 7 வருடங்கள்.

7. $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ ன் மூலங்கள் α, β மற்றும் $\alpha^2+\beta^2 = 1.75$ எனில், 'a' ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

சமன்பாடு $x^2 - 3ax + a^2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது

$a = 1, b = -3a, c = a^2$

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$$

$$= \frac{-(-3a)}{1} = 3a$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$= \frac{a^2}{1} = a^2$$

கொடுக்கப்பட்டது : $\alpha^2+\beta^2 = 1.75$

$$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1.75$$

$$(3a)^2 - 2a^2 = 1.75$$

$$9a^2 - 2a^2 = 1.75$$

$$7a^2 = 1.75$$

$$a^2 = \frac{1.75}{7} = 0.25$$

$$a = \pm 0.5$$

8. α, β என்பன $ax^2 + bx + b = 0$ ன் மூலங்கள் எனில், $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு : $ax^2 + bx + b = 0$

$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{a}$$

இப்போது, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$

$$= \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)}{\sqrt{\frac{b}{a}}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= -\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

9. கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டிலிருந்து a, b, c மற்றும் d ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

தீர்வு :

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$$a - b = -1 \quad \ldots (1)$$

$$2a + c = 5 \quad \ldots (2)$$

$$2a - b = 0 \quad \ldots (3)$$

$$3c + d = 13 \quad \ldots (4)$$

(1) மற்றும் (3) ஐத் தீர்க்க,

$$a - b = -1$$

$$2a - b = 0$$

(1) − (3) ⇒ $-a = -1$

$$a = 1$$

(1) ல் பிரதியிட, $1 - b = -1$

$$b = 2$$

$a = 1$ என (2) ல் பிரதியிட, $2(1) + c = 5$

$$c = 3$$

(4) ல் பிரதியிட, $3(3) + d = 13$

$d = 4$

$\therefore a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

10. $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், A மற்றும் B ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

$(2) \times 2 \Rightarrow \quad 2A + 4B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 2 & 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \ldots (3)$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

$(3) - (1) \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{pmatrix}$

(2) ல் பிரதியிட,

$$A + 2\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 2 & 4 \\ -2 & 20 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & -2 & -1 \\ 3 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $kA = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{pmatrix}$ எனில், k, a மற்றும் b ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$kA = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2k \\ 3k & -4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{pmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$2k = 3a, 3k = 2b, -4k = 24,$

$$k = \frac{24}{-4} = -6$$

$$\therefore \quad a = \frac{2k}{3} = \frac{2(-6)}{3} = -4$$

$$b = \frac{3k}{2} = \frac{3(-6)}{2} = -9$$

$\therefore k = -6, \quad a = -4, \quad b = -9$

12. $2\begin{pmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$ எனில், x மற்றும் y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$2\begin{pmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+3 & 10+4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+3 & 14 \\ 15 & 2y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$2x + 3 = 7 \qquad 2y - 4 = 14$

$2x = 4 \qquad 2y = 18$

$x = \frac{4}{2} = 2 \qquad y = 9$

$\therefore x = 2 \qquad y = 9$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+3y & 6z & 32 \\ 4 & 12 & 26x-5y \end{pmatrix}$ எனில், x, y மற்றும் z ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

இடப்பக்கம் :

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12-1+6 & 16+0+8 & 20-2+14 \\ 0-5+9 & 0+0+12 & 0-10+21 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 24 & 32 \\ 4 & 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+3y & 6z & 32 \\ 4 & 12 & 26x-5y \end{pmatrix}$$

ஒத்த உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$8x + 3y = 17$ ... (1)

$6z = 24 \Rightarrow z = 4$ ... (2)

$26x - 5y = 11$ ... (3)

(1), (3) ஐத் தீர்க்கக் கிடைப்பது

$x = 1, y = 3$

$\therefore x = 1, y = 3, z = 4$

14. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **எனில், (A – 2I) (A – 3I) ஐக் காண்க.**

தீர்வு :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

இப்போது, (A – 2I) (A – 3I)

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2 & 4-4 \\ -1+1 & -2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **எனில்,** $A^3 - 4A^2 + A = 0$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14+12 & 21+24 \\ 8+7 & 12+14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

இப்போது, $A^3 - 4A^2 + A$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 48 \\ 16 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

நிறுவப்பட்டது

16. இரண்டு சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூடுதல் 468 மீ^{2}. அவற்றின் சுற்றளவுகளின் வித்தியாசம் 24 மீ எனில், சதுரங்களின் பக்கங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

இரண்டு சதுரங்களின் பக்கங்கள் முறையே 'x','y' என்க.

பரப்புகளின் கூடுதல் $x^2 + y^2 = 468$ ... (1)

சுற்றளவுகளின் வித்தியாசம் $4x - 4y = 24$ $[\because x > y]$

$x - y = 6$ ... (2)

$y = x - 6$

(1) ல் பிரதியிட,

$x^2 + (x - 6)^2 = 468$

$x^2 + x^2 - 12x + 36 - 468 = 0$

$2x^2 - 12x - 432 = 0$

$x^2 - 6x - 216 = 0$

$(x - 18)(x + 12) = 0$

$x = 18$

$x = 18$ எனும்போது, $y = 18 - 6 = 12$

$\therefore$ இரு சதுரங்களின் பக்கங்கள் முறையே 18 மீ மற்றும் 12 மீ ஆகும்.

17. ஒரு விமானம் குறிப்பிட்ட நேரத்தை விட 30 நிமிடங்கள் தாமதமாகப் புறப்படுகிறது. மேலும் 1500 கி.மீ தூரத்திலுள்ள இலக்கை அடைய அதன் சீரான வேகத்திலிருந்து மணிக்கு 250 கி.மீ வேகம் அதிகரிக்கப்பட வேண்டும் எனில் விமானத்தின் சீரான வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

விமானத்தின் சீரான வேகம் 'x' கி.மீ / மணி என்க மற்றும் 1500 கிமீ தூரத்தைக் கடக்க ஆகும்

நேரம் = $\frac{1500}{x}$ மணி நேரம்.

கொடுக்கப்பட்டது: வேகம் மணிக்கு 250 கி.மீ அதிகரிக்கப்படுகிறது.

அதிகரிக்கப்பட்ட வேகத்தால் தூரத்தை கடக்க ஆகும் நேரம் = $\frac{1500}{x+150}$

$$\therefore \frac{1500}{x+250} - \frac{1500}{x} = \frac{1}{2}$$

சுருக்கக் கிடைப்பது, $x^2 + 250x - 750000 = 0$

$$x(x + 1000) - 750(x + 1000) = 0$$

$$(x - 750)(x + 1000) = 0$$

$x = 750, x = -1000$ என்பது சாத்தியமல்ல.

∴ விமானத்தின் சீரான வேகம் மணிக்கு 750 கி.மீ

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ மற்றும் $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 - 8A + 7I = 0$ என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு :

$$A^2 = A.A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ -1-7 & 0+49 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{pmatrix}$$

$$8A = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 56 \end{pmatrix}$$

$$7I = 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 8A + 7I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7+7 & 0 \\ 0+0 & -7+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

நிறுவப்பட்டது.

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. α, β என்பன $2x^2 + 3x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (iii) $\alpha^3 + \beta^3$

தீர்வு :

$2x^2 + 3x + 7 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பது $a = 2, b = 3, c = 7$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{-19}{4}$$

(ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{-3}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{-3}{7}$$

(iii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta]$

$$= \left(\frac{-3}{2}\right)\left[\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{7}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{9}{4} - \frac{21}{2}\right]$$

$$= \frac{-3}{2}\left[\frac{9-42}{4}\right]$$

$$= \frac{-3}{2}\left(\frac{-33}{4}\right) = \frac{99}{8}$$

2. தீர்க்க: $4x - 2y + 3z = 1$, $x + 3y - 4z = -7$, $3x + y + 2z = 5$

தீர்வு :

$4x - 2y + 3z = 1$ ... (1)

$x + 3y - 4z = -7$ ... (2)

$3x + y + 2z = 5$ ... (3)

(2) , (3) ஆகியவற்றைக் கருதுக.

$3 \times (3) \Rightarrow 9x + 3y + 6z = 15$ ... (4)

$x + 3y - 4z = -7$ ... (2)

$(4) - (2) \Rightarrow 8x + 10z = 22$ ... (5)

(1), (3) ஐக் கருதுக.

$(3) \times 2 \Rightarrow 6x + 2y + 4z = 10$ ... (6)

$4x - 2y + 3z = 1$ ... (1)

$(6) + (1) \Rightarrow 10x + 7z = 11$ ... (7)

(5), (7) ஐக் கருதுக.

$(5) \times 7 \Rightarrow 56x + 70z = 154$ ... (8)

$(7) \times 10 \Rightarrow 100x + 70z = 110$ ... (9)

$(8) - (9) \Rightarrow -44x = 44$

$x = \frac{44}{44} = -1$

$x = -1$ என (7) ல் பிரதியிட,

$10(-1) + 7z = 11$

$-10 + 7z = 11$

$7z = 11 + 10$

$z = \frac{21}{7} = 3$

$x = -1, z = 3$ என (3) ல் பிரதியிட,

$3(-1) + y + 2(3) = 5$

$-3 + y + 6 = 5$

$y = 5 - 3 = 2$

∴ தீர்வு: $x = -1, y = 2, z = 3$

3. தீர்க்க : $x = 3z - 5$, $2x + 2z = y + 16$, $7x - 5z = 3y + 19$

தீர்வு :

சமன்பாடுகள் திட்டவடிவத்தில்

$x - 3z = -5$ ... (1)

$2x - y + 2z = 16$ ... (2)

$7x - 3y - 5z = 19$ ... (3)

(2), (3) ஐக் கருதுக.

$(2) \times 3 \Rightarrow 6x - 3y + 6z = 48$ ... (4)

$7x - 3y - 5z = 19$ ... (3)

$(4) - (3) \Rightarrow -x + 11z = 29$ ... (5)

(1), (5) ஐக் கருதுக.

$x - 3z = -5$ ... (1)

$-x + 11z = 29$ ... (5)

$(1) + (5) \Rightarrow 8z = 24$

$z = \frac{24}{8} = 3$

$z = 3$ என (1) ல் பிரதியிட,

$x = 3(3) - 5$

$= 9 - 5 = 4$

$x = 4, z = 3$ என (2) ல் பிரதியிட,

$2(4) - y + 2(3) = 16$

$8 + 6 - 16 = y$

$\Rightarrow y = 14 - 16 = -2$

∴ தீர்வு: $x = 4, y = -2, z = 3$

4. இரண்டு குழாய்கள் ஒன்றாக ஒரு தொட்டியை $9\frac{3}{8}$ மணி நேரங்களில் நிரப்ப முடியும். பெரிய விட்டத்தைக் கொண்ட குழாய் சிறிய விட்டத்தைக் கொண்ட குழாயைக் காட்டிலும் 10மணி நேரம் குறைவாக தொட்டியை நிரப்புவதற்கு எடுத்துக்கொண்டால், இரண்டு குழாய்களும் தனித்தனியாக தொட்டியை நிரப்புவதற்கு ஆகும் நேரம் காண்க.

தீர்வு:

பெரிய குழாய், தொட்டியை 'x' மணி நேரத்தில் நிறைக்கிறது என்க.

∴ சிறிய குழாய், $(x + 10)$ மணி நேரத்தில் நிறைக்கும்.

1 மணி நேரத்தில் பெரிய குழாயால் நிறைக்கப்படும் தொட்டியின் பகுதி $= \frac{1}{x}$

1 மணி நேரத்தில் சிறிய குழாயால் நிறைக்கப்படும் தொட்டியின் பகுதி $= \frac{1}{x+10}$

கொடுக்கப்பட்டது: இரண்டு குழாய்களும் சேர்ந்து தொட்டியை $9\frac{3}{8} = \frac{75}{8}$ மணி நேரத்தில் நிறைக்கிறது.

[நேரம் மற்றும் செய்த வேலை என்பன ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழிகள்]

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10} = \frac{8}{75}$$

$$\frac{x+10+x}{x(x+10)} = \frac{8}{75}$$

$$75(2x+10) = 8(x^2+10x)$$

$$8x^2-70x-750 = 0$$

$$4x^2-35x-375 = 0$$

$$4x^2-60x+25x-375 = 0$$

$$4x(x-15)+25(x-15) = 0$$

$$(4x+25)(x-15) = 0$$

$x = 15$ $\left[x = \frac{-25}{7}\right.$ என்பது சாத்தியமல்ல]

∴ தொட்டியை நிறைக்க முதல் குழாய்க்குத் தேவைப்படும் நேரம் 15 மணி நேரம் மற்றும் தொட்டியை நிறைக்க 2 வது குழாய்க்குத் தேவைப்படும் நேரம் 25 மணி நேரம்.

5. $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **எனில்,**

$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$$A+B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}9+0 & 0+0\\ 9+9 & 0+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0\\ 18 & 9\end{pmatrix} \quad \ldots (1)$$

இப்போது $A^2 = A.A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1-2 & -1-3\\ 2+6 & -2+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2-1 & 1+0\\ 4+3 & 2+0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$$

$$B^2 = B.B$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4+1 & 2+0\\ 2+0 & 1+0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

இப்போது $A^2+2AB+B^2$

$$= \begin{pmatrix}-1 & -4\\ 8 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 14 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 0\\ 24 & 12\end{pmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1), (2) லிருந்து, $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

6. கொடுக்கப்பட்டது $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$ **எனில்,**

(AB) C = A (BC) என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு :

இடப்பக்கம்

$$AB = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1+0-1 & 3+2-4\\ 2+0+3 & 6+0+12\\ 3+0+2 & 9-2+8\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 18\\ 5 & 15\end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 18\\ 5 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0+2 & 0+0 & 0-2 & 0+1\\ 5+36 & 10+0 & 15-36 & -20+18\\ 5+30 & 10+0 & 15-30 & -20+15\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 41 & 10 & -21 & -2 \\ 35 & 10 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

இப்போது, $BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ 1+8 & 2+0 & 3-8 & -4+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7+4-9 & 2+0-2 & -3-4+5 & -1+2+0 \\ 14+0+27 & 4+0+6 & -6+0-15 & -2+0+0 \\ 21-4+18 & 6+0+4 & -9+4-10 & -3-2+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 41 & 10 & -21 & -2 \\ 35 & 10 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

இடப்பக்கம் = வலப்பக்கம்

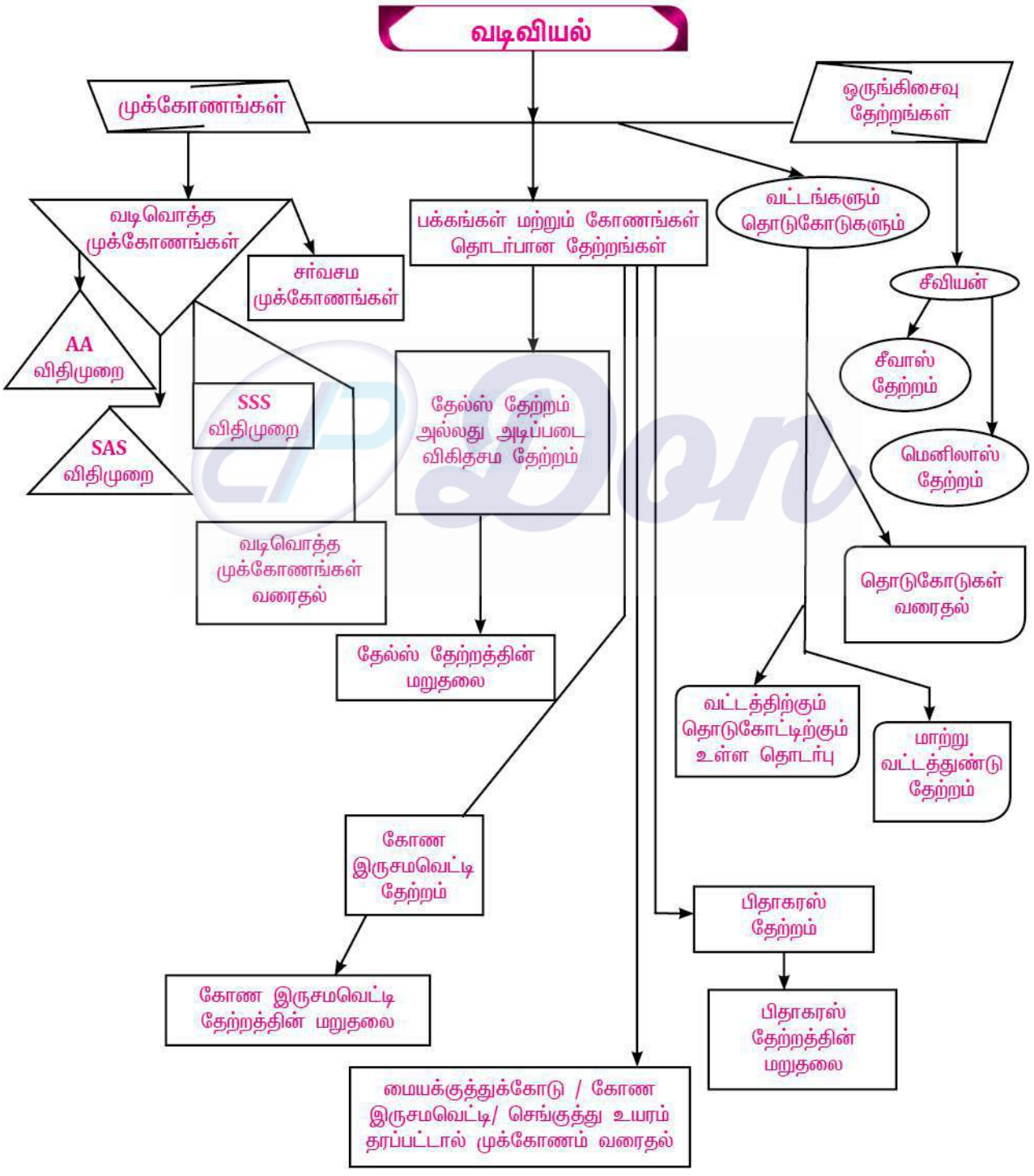
$\therefore (AB)C = A(BC)$

நிறுவப்பட்டது.

அலகு 4

வடிவியல்

மன வரைபடம்



நினைவில் கொள்க

வடிவொத்தவை

- இரு உருவங்களும் ஒரே மாதிரியாகவும் அதனுடைய அளவுகள் விகிதசமமாகவும் இருந்தால் அவை வடிவொத்தவை ஆகும்.
- ஒரே அளவையும் வடிவத்தையும் கொண்ட இரு வடிவியல் உருவங்களைச் சர்வசமம் என அழைக்கலாம்.

வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

- இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமமாக இருந்தால் அம்முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.
- இரு முக்கோணங்களின் ஒத்த கோணங்கள் சமம் எனில், அவை சமகோண முக்கோணங்கள் ஆகும்.
- முக்கோணம் ABC மற்றும் PQR இரண்டும் வடிவொத்தவை. இதை $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ என எழுதலாம்.

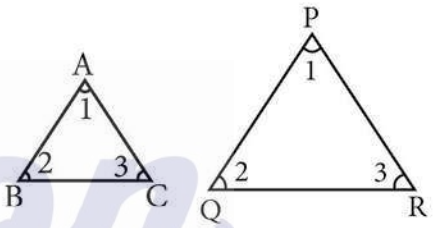
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\angle A = \angle P$; $\angle B = \angle Q$; $\angle C = \angle R$

AB ≠ PQ; BC ≠ QR; CA ≠ RP ஆனால்,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} > 1$ அல்லது < 1.

ஒரே வடிவமும் வேறுபட்ட அளவும்.

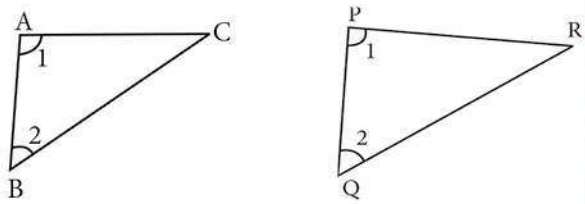


வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான விதிமுறைகள்:

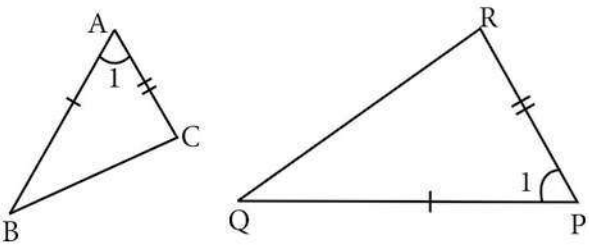
1. வடிவொத்தவைக்கான AA விதிமுறை

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும். ஏனெனில் இரு முக்கோணங்களிலும் மூன்றாவது கோணம் சமமாக இருக்கும். எனவே வடிவொத்தவைக்கான AA – விதிமுறையானது வடிவொத்தவைக்கான AAA – விதிமுறை போலவே உள்ளது.

$\angle A = \angle P = 1$ மற்றும் $\angle B = \angle Q = 2$ எனில், $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



2. வடிவொத்தவைக்கான SAS விதிமுறை



ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், அவை உள்ளிட்ட பக்கங்களும் விகிதசமமாக இருந்தால், அவ்விரண்டு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும்.

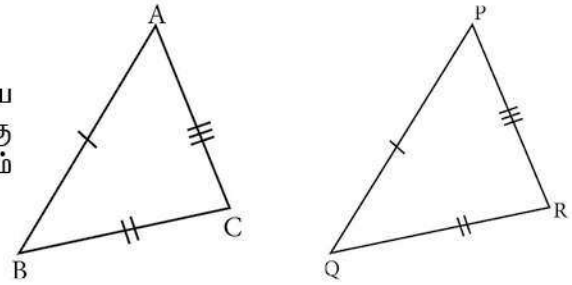
எனவே $\angle A = \angle P = 1$ மற்றும்

$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ எனில்,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

3. வடிவொத்தவைக்கான SSS விதிமுறை

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுக்கு விகிதசமம் எனில், அவ்விரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை ஆகும்.

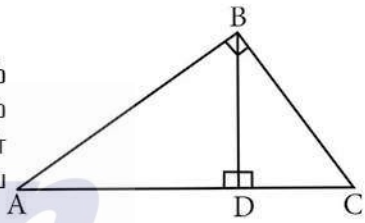


எனவே, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ எனில்,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

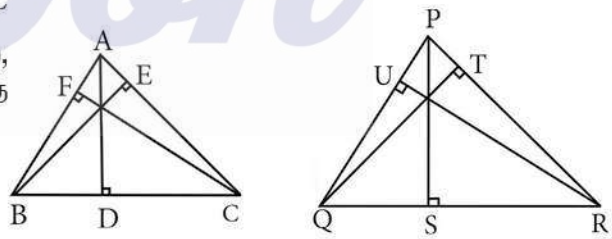
வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான சில பயனுள்ள முடிவுகள்

1. செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து கோட்டினால் பிரிக்கப்படும் இரு சிறிய முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாக இருக்கும். மேலும் அச்சிறிய முக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்கும் வடிவொத்தவையாகவே இருக்கும்.



$\Delta ADB \sim \Delta BDC, \Delta ABC \sim \Delta ADB, \Delta ABC \sim \Delta BDC$

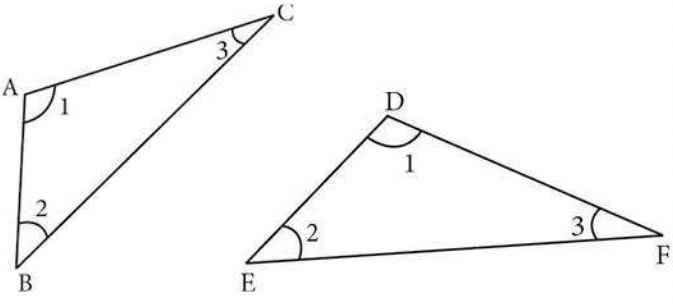
2. இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த குத்துயரங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.



எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ எனில்,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR} = \frac{AD}{PS} = \frac{BE}{QT} = \frac{CF}{RU}$

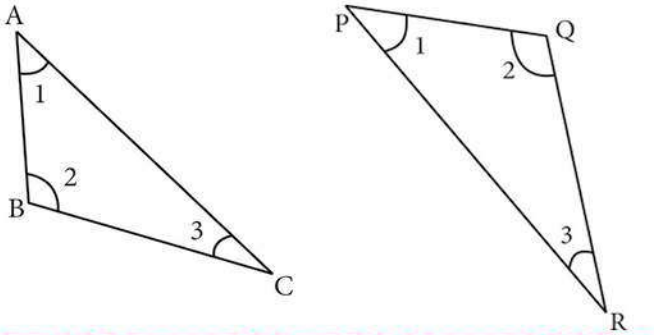
3. இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்குச் சமம்.



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ எனில்,

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD}$

4. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிகதத்திற்குச் சமம்.

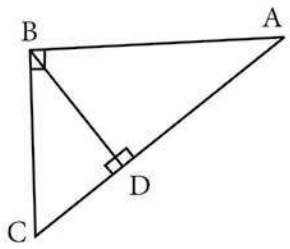


$\frac{\Delta ABC \text{ –யின் பரப்பளவு}}{\Delta PQR \text{ –யின் பரப்பளவு}}$

$= \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$

5. இரு முக்கோணங்கள் பொதுவான முனையையும் அவற்றின் அடிப்பக்கங்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டிலும் இருந்தால், அம்முக்கோணங்களின் பரப்புகளின் விகிதம் அவற்றின் அடிப்பக்க நீளங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\frac{\Delta ABD \text{ – யின் பரப்பளவு}}{\Delta BDC \text{ – யின் பரப்பளவு}} = \frac{AD}{DC}$$



வடிவொத்த முக்கோணங்களை வரைதல்

ஒத்த பக்கங்களின் தகவை அளவு காரணி என அழைக்கலாம்.

சர்வசம முக்கோணங்கள்

- சர்வசமமானது வடிவொத்தவையின் ஒரு பகுதியாகும்.
  - (a) ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களும் மற்ற முக்கோணத்தின் மூன்று ஒத்த கோணங்களுக்குச் சமமாக இருக்கும்.
  - (b) சர்வசம முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்கள் சமமாக இருக்கும்.

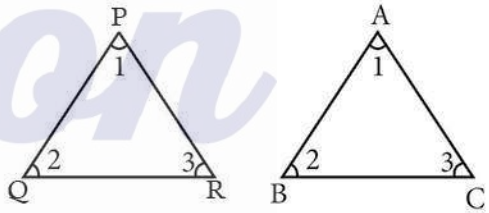
$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$; $\angle C = \angle R$

AB = PQ; BC = QR; CA = RP

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 1$$

ஒத்த வடிவமும் ஒரே அளவும்.

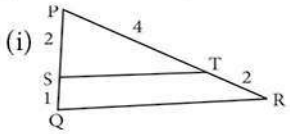


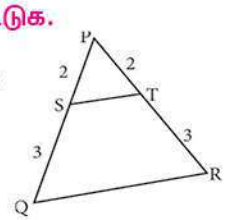
- இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில்,
  - (i) அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமம்
  - (ii) அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் சம விகிதத்தில் இருக்கும்.

- சர்வ சம முக்கோணங்கள் அனைத்தும் வடிவொத்தவை. ஆனால் இதன் மறுதலை உண்மை இல்லை.
  - ☆ எல்லா கோட்டுத்துண்டுகளும் வடிவொத்தவை
  - ☆ எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை
  - ☆ எல்லா சதுரங்களும் வடிவொத்தவை.
  - ☆ எல்வா வட்டங்களும் வடிவொத்தவை.
  - ☆ இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருப்பின், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்குச் சமம்.
  - ☆ இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு

4.1 $\Delta PST \sim \Delta PQR$ எனக் காட்டுக.

(i) 

(ii) 

தீர்வு :

(i) ΔPST மற்றும் ΔPQR –யில்,

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad \frac{PT}{PR} = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$$

இதிலிருந்து, $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$ மற்றும்

$\angle P$ ஆனது பொதுக் கோணம். எனவே

SAS விதிமுறைப்படி, $\Delta PST \sim \Delta PQR$

(ii) ΔPST மற்றும் ΔPQR –யில்,

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}, \quad \frac{PT}{PR} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

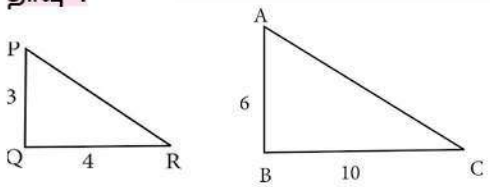
இதிலிருந்து, $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$ மற்றும்

$\angle P$ ஆனது பொதுக் கோணம். எனவே,

SAS விதிமுறைப்படி, $\Delta PST \sim \Delta PQR$

4.2 $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ஆக இருக்குமா?

தீர்வு :



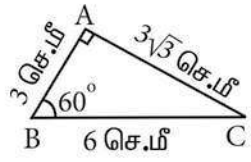
ΔABC மற்றும் ΔPQR –யில்,

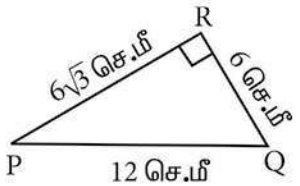
$$\frac{PQ}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{QR}{BC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$ என்பதால், $\frac{PQ}{AB} \neq \frac{QR}{BC}$.

ஒத்த பக்கங்கள் விகிதச் சமமாக இல்லை.
எனவே, ΔABC ஆனது ΔPQR –க்கு
வடிவொத்ததாக அமையாது

4.3 கொடுக்கப்பட்ட படத்திலிருந்து $\angle P$ –ஐ காண்க.





தீர்வு :

ΔBAC மற்றும் ΔPQR –ல், $\frac{AB}{RQ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

$$\frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \quad \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

எனவே, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

SSS விதிமுறைப்படி நாம் பெறுவது,

$\Delta BAC \sim \Delta QRP$

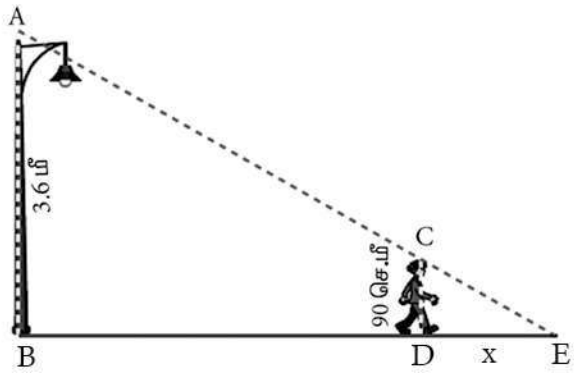
$\angle P = \angle C$ (வடிவொத்த முக்கோணத்தின் ஒத்த கோணங்கள் சமம்)

$$\angle P = \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$$
$$= 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)$$

$\angle P = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

4.4 90 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு சிறுவன் விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 1.2 மீ/வினாடி வேகத்தில் நடந்து செல்கிறான். தரையிலிருந்து விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 3.6 மீ எனில், 4 வினாடிகள் கழித்துச் சிறுவனுடைய நிழலின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு :



வேகம் = 1.2 மீ/வினாடி என்பது கொடுக்கப்பட்டது.

நேரம் = 4 வினாடி

தொலைவு = வேகம் × நேரம்

$= 1.2 \times 4 = 4.8$ மீ

4 வினாடிகளுக்குப் பிறகு சிறுவனுடைய நிழலின் நீளம் x என்க.

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$, ஆகையால், $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

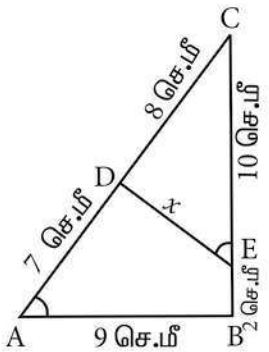
எனவே $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9} = 4$. (90 செ.மீ = 0.9 மீ)

$\Rightarrow 4.8 + x = 4x \Rightarrow 3x = 4.8$

ஆகவே $x = 1.6$ மீ

சிறுவனுடைய நிழலின் நீளம் DE = 1.6 மீ

4.5 படத்தில் $\angle A = \angle CED$ எனில், $\Delta CAB \sim \Delta CED$ என நிரூபிக்கவும். மேலும் x-யின் மதிப்பு காண்க.



தீர்வு :

ΔCAB மற்றும் ΔCED-யில், $\angle C$ பொதுவானது, $\angle A = \angle CED$

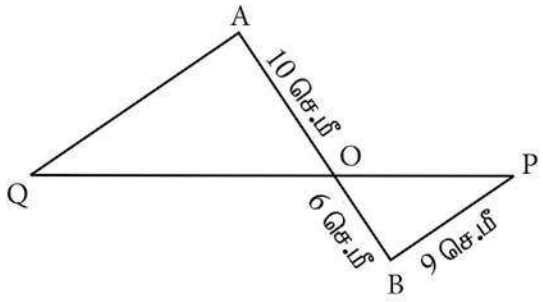
எனவே, $\Delta CAB \sim \Delta CED$ (AA விதிமுறைப்படி)

ஆகவே, $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$

$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{10+2}{8}$

எனவே, $x = \frac{8\times9}{12} = 6$ செ.மீ

4.6 படத்தில், QA மற்றும் PB ஆனது AB-க்கு செங்குத்தாகும். AO = 10 செ.மீ, BO = 6 செ.மீ மற்றும் PB = 9 செ.மீ. AQ-ஐக் காண்க.



தீர்வு :

ΔAOQ மற்றும் ΔBOP-ல், $\angle OAQ = \angle OBP = 90^\circ$

$\angle AOQ = \angle BOP$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

எனவே, வடிவொத்தமைக்கான AA விதிமுறைப்படி,

$\Delta AOQ \sim \Delta BOP$

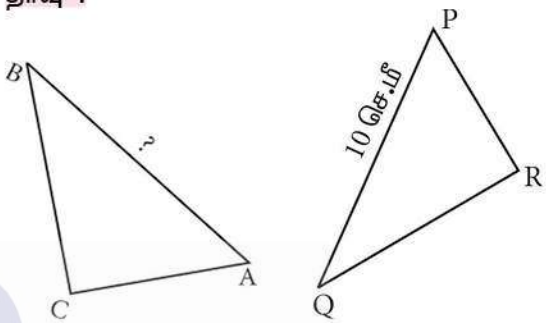
$\frac{AO}{BO} = \frac{OQ}{OP} = \frac{AQ}{BP}$

எனவே, $\frac{10}{6} = \frac{AQ}{9} \Rightarrow AQ = \frac{10\times9}{6}$

$= 15$ செ.மீ

4.7 வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் PQR-ன் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ ஆகும். PQ = 10 செ.மீ எனில், AB-ஐக் காண்க.

தீர்வு :



வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ஆகையால்,

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{36}{24}$

$\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24} \Rightarrow \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$

$AB = \frac{36\times10}{24} = 15$ செ.மீ

4.8 ΔABC ஆனது ΔDEF-க்கு வடிவொத்தவை. மேலும் BC = 3 செ.மீ, EF = 4 செ.மீ மற்றும் முக்கோணம் ABC-யின் பரப்பு = 54 செ.மீ^{2} எனில், ΔDEF-யின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களுடைய பரப்புகளின் விகிதமானது அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களுடைய வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம் என்பதால்

$\frac{\Delta ABC \text{-ன் பரப்பளவு}}{\Delta DEF \text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{BC^2}{EF^2}$

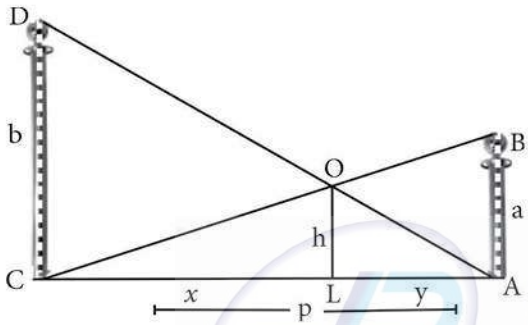
$\Rightarrow \frac{54}{\Delta DEF \text{-ன் பரப்பளவு}} = \frac{3^2}{4^2}$

ΔDEF-ன் பரப்பளவு $= \frac{16\times54}{9} = 96$ செ.மீ^{2}

4.9 'p' மீட்டர் இடைவெளியில் 'a' மீட்டர் மற்றும் 'b' மீட்டர் உயரமுள்ள இரண்டு தூண்கள் உள்ளன. தூண்களின் உச்சியிலிருந்து எதிரேயுள்ள தூண்களின் அடிக்கு வரையப்படும் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் உயரமானது $\frac{ab}{a+b}$ மீட்டர் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

'p' மீட்டர் இடைவெளியில் உள்ள AB மற்றும் CD என்ற இரு தூண்களின் உயரங்கள் முறையே 'a' மீட்டர், 'b' மீட்டர் என்க. அதாவது, AC = p மீட்டர். AD மற்றும் BC –யானது O –வில் சந்திக்கிறது எனில், OL = h மீட்டர்.



CL = x மற்றும் LA = y என்க.

எனவே, x + y = p

ΔABC மற்றும் ΔLOC –லிருந்து,

$\angle CAB = \angle CLO$ [ஒவ்வொன்றும் 90° –க்கு சமம்]

$\angle C = \angle C$ [C பொதுவானது]

$\Delta CAB \sim \Delta CLO$ [AA விதிமுறைப்படி]

$$\frac{CA}{CL} = \frac{AB}{LO} \Rightarrow \frac{p}{x} = \frac{a}{h}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ph}{a} \quad \ldots (1)$$

ΔALO மற்றும் ΔACD –விலிருந்து

$\angle ALO = \angle ACD$ [ஒவ்வொன்றும் 90°–க்கு சமம்]

$\angle A = \angle A$ [A பொதுவானது]

$\Delta ALO \sim \Delta ACD$ [AA விதிமுறைப்படி]

$$\frac{AL}{AC} = \frac{OL}{DC} \Rightarrow \frac{y}{p} = \frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow y = \frac{ph}{b} \quad \ldots (2)$$

(1) + (2) –விலிருந்து, $x + y = \frac{ph}{a} + \frac{ph}{b}$

$$p = ph\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \text{ (ஏனெனில் } x + y = p)$$

$$1 = h\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

எனவே, $h = \frac{ab}{a+b}$

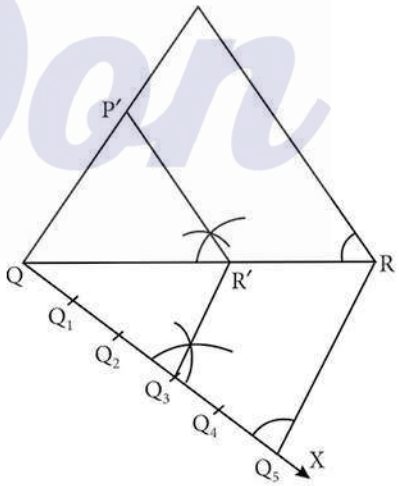
எனவே, இரு தூண்களின் உச்சியிலிருந்து எதிரே உள்ள தூண்களின் அடிக்கு வரையப்படும் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் உயரமானது $\frac{ab}{a+b}$ மீட்டர் ஆகும்.

4.10 கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் PQR –க்கு ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{3}{5}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக (அளவு காரணி $\frac{3}{5} < 1$).

தீர்வு :

PQR ஆனது கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ஆகும்.

PQR என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு $\frac{3}{5}$ அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களின் மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.



வரைதலின் படிகள்:

1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு ΔPQR வரைக.
2. QR என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு, QX என்ற கதிரை P என்ற முனைப் புள்ளிக்கு எதிர் திசையில் வரைக.
3. QX –யின் மீது Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 மற்றும் Q_5 என்ற 5 புள்ளிகளை

   ($\frac{3}{5}$ –யில் 3 மற்றும் 5 ஆகியவற்றில் பெரியது 5 என்பதால்).

   $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5$ என்றவாறு

குறிக்கவும்.

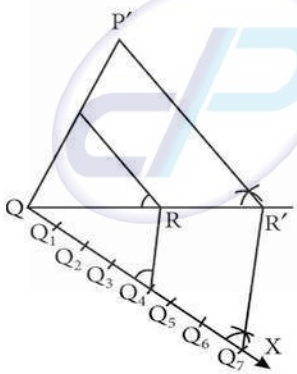
4. Q_5R –ஐ இணைத்து Q_3 –யிலிருந்து (3 –வது புள்ளி, அதாவது $\frac{3}{5}$ –யில் 3 மற்றும் 5 ஆகியவற்றில் சிறியது) Q_5R –க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக. இது QR –ஐ R' –யில் சந்திக்கிறது.

5. R' –லிருந்து RP –க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு QP –ஐ P' –யில் சந்திக்கிறது. $\Delta P'QR'$ –யின் பக்கங்கள் ΔPQR ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் 5 –ல் 3 பங்கு ஆகும்.

6, $\Delta P'QR'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்

4.11 கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் PQR –க்கு ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{7}{4}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{7}{4} > 1$)

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட ΔPQR –ன் பக்கங்களைப் போல் $\frac{7}{4}$ பங்கு அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களைக் கொண்ட மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.

வரைதலின் படிகள்:

1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு ΔPQR வரைக.
2. QR என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு QX என்ற கதிரை P என்ற முனைப் புள்ளிக்கு எதிர் திசையில் வரைக.
3. QX–ன் மீது $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ மற்றும் Q_7 என்ற 7 புள்ளிகளை ($\frac{7}{4}$ –யில் 7 மற்றும் 4 ஆகியவற்றில் பெரியது) $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7$ என்றவாறு குறிக்கவும்.
4. Q_4 ஐ (4 –வது புள்ளி, அதாவது $\frac{7}{4}$ –யில் 4 மற்றும் 7 ஆகியவற்றில் சிறியது) புள்ளி R –உடன் இணைக்க. Q_4R –க்கு இணையாக Q_7 –லிருந்து வரையப்படும் கோடு QR ஐ R' –ல் சந்திக்கிறது.
5. R' –லிருந்து RP –க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு QP ஐ P' –ல் சந்திக்கிறது.

$\Delta P'QR'$ –யின் பக்கங்கள் ΔPQR –யின் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் 4 –ல் 7 பங்கு ஆகும்.

$\Delta P'QR'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. எல்லா வட்டங்களும் _____ (சர்வசமம்/ வடிவொத்தவை).

விடை: வடிவொத்தவை

2. எல்லா சதுரங்களும் _____ (வடிவொத்தவை/ சர்வசமம்).

விடை: வடிவொத்தவை

3. இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில் அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் _____ மற்றும் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் _____.

விடை: சமம், விகித சமம்

4. (அ) எல்லா வடிவொத்த முக்கோணங்களும் சர்வசமமாகும் – சரி/தவறு.

விடை: தவறு

(ஆ) எல்லா சர்வசம முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவையாகும் – சரி/தவறு.

விடை: சரி

5. வடிவொத்தவை இல்லாத உருவங்களுக்கு இரு வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கவும்.

விடை: (i) ஒரு வட்டமும், ஒரு சதுரமும் வடிவொத்தவை அல்ல.

(ii) ஒரு இருபக்க முக்கோணமும் ஒரு அசமபக்க முக்கோணமும் வடிவொத்தவை அல்ல.

சிந்தனைக் களம்

1. சதுரமும், சாய்சதுரமும் சர்வசம உருவங்களா அல்லது வடிவொத்த உருவங்களா என்பதை விவாதிக்கவும்.

விடை:

ஒரு சாய்சதுரத்தில்

- ☆ எல்லா பக்கங்களும் சமம்.
- ☆ மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று

செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும்.

☆ எதிர் கோணங்கள் சமம்.

ஒரு சதுரத்தில்

☆ எல்லா பக்கங்களும் சமம்.

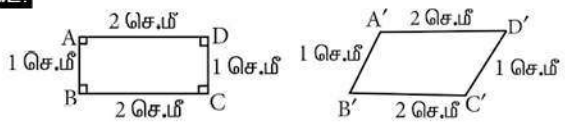
☆ எல்லா கோணங்களும் 90°.

☆ மூலைவிட்டங்கள் சமம் மற்றும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

எனவே இரு வடிவங்களிலும் பக்கங்கள் விகிதசமம். கோணங்கள் சமமில்லை. எனவே வடிவொத்தவையும் அல்ல; சர்வசமமும் அல்ல.

2. செவ்வகமும், இணைகரமும் வடிவொத்த உருவங்களா என்பதை விவாதிக்கவும்.

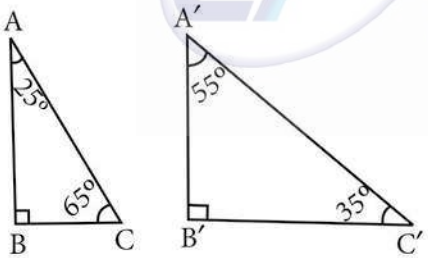
விடை:



ஒரு செவ்வகம் மற்றும் சதுரத்தில் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமம். ஆனால் கோணங்கள் சமமல்ல. எனவே அவை வடிவொத்தவையும் அல்ல; சர்வசமமும் அல்ல.

3. இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்குமா? ஏன்?

விடை:



☆ இரு செங்கோண முக்கோணங்களில் அவற்றின் பக்கங்கள் வெவ்வேறாக இருக்கலாம்.

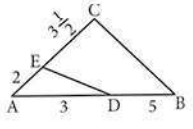
☆ செங்கோணம் அல்லாத இரு கோணங்கள் வெவ்வேறாக இருக்கலாம்.

☆ எனவே அவை வடிவொத்தவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

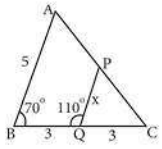
பயிற்சி 4.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றில் எந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்பதைச் சோதிக்கவும், மேலும் x –யின் மதிப்பு காண்க.

(i)



(ii)



தீர்வு :

(i) ΔABC மற்றும் ΔADE இல் $\angle A$ பொதுவானது

$$\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{2\times 2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$$

இங்கு $\frac{4}{7} \neq \frac{3}{5}$

$$\frac{AE}{EC} \neq \frac{AD}{DB}$$

ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லை.

$\therefore \Delta ABC$ மற்றும் ΔADE வடிவொத்த முக்கோணங்கள் அல்ல.

(ii) ΔCPQ மற்றும் ΔCAB இல் $\angle C$ பொதுவானது.

$\angle PQC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

[$\because \angle PQC$ மற்றும் $\angle PQB$ ஆகியவை நேரிய கோண இணை]

$\angle ABC = 70^\circ$

$\therefore \angle BAC = \angle QPC$

[$\because$ முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180°]

$\angle PCQ = 180^\circ - (\angle QPC + 70^\circ)$

$\therefore \angle ABC = \angle PQC = 70^\circ$

$\angle C$ பொதுவானது, $\angle BAC = \angle QPC$

$\therefore$ AA விகிதமுறைப்படி, $\Delta ABC \sim \Delta \angle PQC$

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம்.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QC}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{6}{3}$$

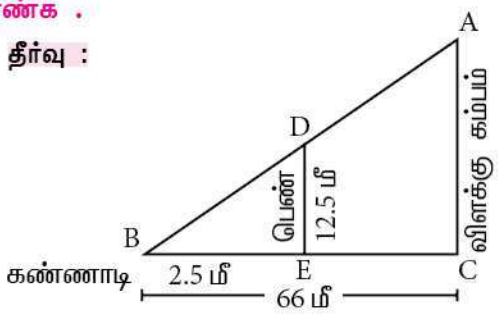
[$\because$ BC = BQ + QC = 3 + 3 = 6]

$$x = \frac{5}{6}\times 3 = 2.5 \quad \therefore x = 2.5$$

2. ஒரு பெண் விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 6.6 மீ தொலைவிலுள்ள கண்ணாடியில் விளக்கு கம்ப உச்சியின் பிரதிபலிப்பைக் காண்கிறாள். 12.5 மீ உயரமுள்ள அப்பெண் கண்ணாடியிலிருந்து 2.5 மீ தொலைவில் நிற்கிறாள். கண்ணாடியானது வானத்தை நோக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பெண், கண்ணாடி மற்றும் விளக்கு கம்பம் ஆகியவை எல்லாம் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதாக எடுத்துக்

கொண்டால், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க .

தீர்வு :



AC –விளக்குக் கம்பம்; ED –பெண் என்க.

ΔABC மற்றும் ΔDBE இல்

$\angle B$ பொதுவானது. $\angle DEB = \angle ACB = 90^\circ$

AA விதிமுறைப்படி,

$\Delta ABC \sim \Delta DBE$

∴ அவற்றின் பக்கங்கள் விகிதசமம்.

$$\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BE}$$

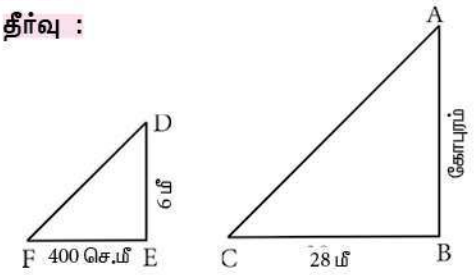
$$\frac{AC}{12.5} = \frac{66}{2.5}$$

$$AC = \frac{66 \times 12.5}{2.5} = \frac{66 \times \cancel{12.5}^{5}}{\cancel{2.5}_{1}} = 330 \text{ மீ}$$

∴ விளக்குக்கம்பத்தின் உயரம் = 330 மீ

3. 6மீ உயரமுள்ள செங்குத்தாக நிற்கும் கம்பமானது தரையில் 400 செ.மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. ஒரு கோபுரமானது 28 மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. கம்பம் மற்றும் கோபுரம் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதாகக் கருதி வடிவொத்த தன்மையைப் பயன்படுத்தி, கோபுரத்தின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :



DE என்பது செங்குத்துக் கம்பம்; AB என்பது கோபுரம் என்க.

DE = 6 மீ, EF = 400 செ.மீ = 4 மீ, BC = 28 மீ

ΔDFE மற்றும் ΔACB இல்

வடிவொப்புமை விதிப்படி,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{AB}{6} = \frac{28}{4}$$

$$AB = \frac{28 \times 6}{4} = 42 \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் = 42 மீ

4. QR ஐ அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட இரு முக்கோணங்கள் QPR மற்றும் QSR –யின் புள்ளிகள் P மற்றும் S –யில் செங்கோணங்களாக அமைந்துள்ளன. இரு முக்கோணங்களும் QR –யின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ளன. PR மற்றும் SQ என்ற பக்கங்கள் T என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனில், PT × TR = ST × TQ என நிறுவுக.

தீர்வு :

கணக்கின்படி, $\angle QSR = \angle QPR = 90^\circ$

PR மற்றும் SQ வெட்டும் புள்ளி T.

ΔQPT மற்றும் ΔRST இல்

$\angle QSR = \angle QPR = 90^\circ$

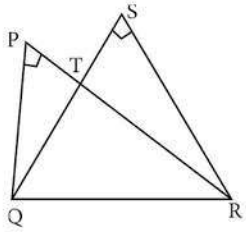
$\angle PTQ = \angle STR$

[∵ குத்தெதிர்க் கோணங்கள்]

AA விதிமுறைப்படி,

$\Delta PQT \sim \Delta SRT$

∴ வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம்.

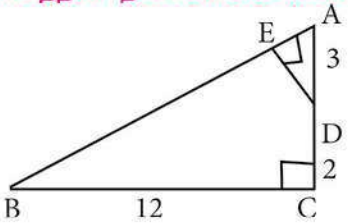


$$\therefore \frac{PT}{ST} = \frac{TQ}{TR}$$

PT × TR = ST × TQ

நிரூபிக்கப்பட்டது.

5. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், C –ஐ செங்கோணமாகக் கொண்ட ΔABC –யில் DE ⊥ AB எனில் $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ என நிரூபிக்க. மேலும் AE மற்றும் DE ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் காண்க.



தீர்வு :

கணக்கின்படி, $\angle C = 90^\circ = \angle DEA$

$\angle A$ ஆனது ΔABC மற்றும் ΔADE இரண்டிற்கும் பொதுவானது

∴ AA விதிமுறைப்படி,

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$

∴ அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம்.

$$\therefore \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{12}{DE} = \frac{3+2}{AE} = \frac{AB}{3} \quad \ldots (1)$$

மேலும் செங்கோண ΔABC இல் $\angle C = 90^\circ$

∴ பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி,

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25 = 169$

$\therefore AB = \sqrt{169}$

$AB = 13$ செ.மீ

(1) லிருந்து

$$\frac{12}{DE} = \frac{13}{3}$$

$$DE = \frac{12\times3}{13} = \frac{36}{13}$$

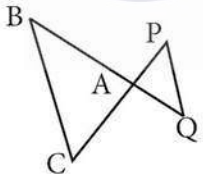
$DE = 2.77$ செ.மீ

மேலும் (1) லிருந்து

$$\frac{5}{AE} = \frac{13}{3}$$

$$AE = \frac{5\times3}{13} = \frac{15}{13} = 1.15 \text{ செ.மீ}$$

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $\Delta ACB \sim \Delta APQ$. BC = 8 செ.மீ, PQ = 4 செ.மீ, BA = 6.5 செ.மீ மற்றும் AP = 2.8 செ.மீ எனில், CA மற்றும் AQ –யின் மதிப்பைக் காண்க.



தீர்வு : கணக்கின்படி $\Delta ACB \sim \Delta APQ$

எனவே அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம்.

$$\frac{AC}{AP} = \frac{CB}{PQ} = \frac{AB}{AQ}$$

$$\frac{AC}{2.8} = \frac{8}{4} = \frac{6.5}{AQ}$$

$$\frac{AC}{2.8} = \frac{8}{4} \text{ எனக் கொண்டால்}$$

$$AC = \frac{8\times2.8}{4} = 5.6 \text{ செ.மீ}$$

$AC = 5.6$ செ.மீ

மேலும், $\frac{8}{4} = \frac{6.5}{AQ}$ எனக் கொண்டால்

$$AQ = \frac{6.5}{8}\times4 = 3.25 \text{ செ.மீ}$$

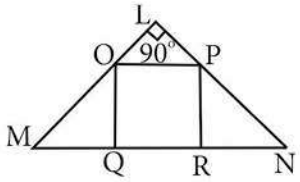
$AQ = 3.25$ செ.மீ

7. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் OPRQ ஆனது சதுரம் மற்றும் $\angle MLN = 90^\circ$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\Delta LOP \sim \Delta QMO$ **(ii)** $\Delta LOP \sim \Delta RPN$

(iii) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$

(iv) $QR^2 = MQ \times RN$



தீர்வு :

(i) ΔLOP மற்றும் ΔQMO இல்

$\angle OLP = \angle MQO = 90^\circ$

$\angle LOP = \angle QMO$ (ஒத்த கோணங்கள்)

∴ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta LOP \sim \Delta QMO$

(ii) ΔLOP மற்றும் ΔRPN இல்

$\angle PLO = \angle NRP = 90^\circ$

மேலும் $\angle LPO = \angle RNP$ (ஒத்த கோணங்கள்)

∴ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta LOP \sim \Delta RPN$

(iii) மேலும் ΔQMO மற்றும் ΔRPN இல்

$\angle OQM = \angle NRP = 90^\circ$

$\Delta LOP \sim \Delta QMO$ மற்றும் $\Delta LOP \sim \Delta RPN$

$\therefore \Delta QMO \sim \Delta RPN$

(iv) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$ [∵ **(iii)** இன் படி]

$$\therefore \frac{MQ}{PR} = \frac{QO}{RN}$$

$$\frac{MQ}{QR} = \frac{QR}{RN}$$

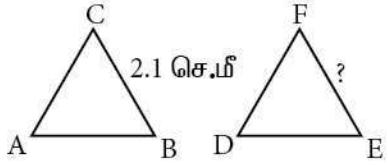
[∵ OQRP என்ற சதுரத்தில் PR = QR மற்றும் QO = QR]

∴ $QR \times QR = MQ \times RN$

$QR^2 = MQ \times RN$

8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ –ல், ΔABC –யின் பரப்பு 9 செ.மீ², ΔDEF –யின் பரப்பு 16 செ மீ² மற்றும் BC = 2.1 செ.மீ எனில், EF –யின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



கணக்கின்படி $\Delta ABC \sim \Delta DEF$,

$$\frac{\Delta ABC - \text{இன் பரப்பு}}{\Delta DEF - \text{இன் பரப்பு}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{2.1 \times 2.1}{EF^2}$$

$$EF^2 = \frac{2.1 \times 2.1 \times 16}{9} = \frac{2.1 \times 2.1 \times 4 \times 4}{3 \times 3}$$

$$EF^2 = \left(\frac{2.1 \times 4}{3}\right)^2$$

$$EF = \frac{2.1 \times 4}{3} = 2.8$$

EF = 2.8 செ.மீ

மாற்றுமுறை:

$$\frac{9}{16} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கமூலம் எடுக்க,

$$\frac{3}{4} = \frac{BC}{EF}$$

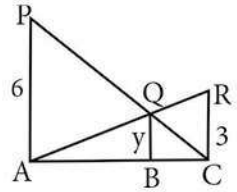
$$\frac{3}{4} = \frac{2.1}{EF}$$

$$3 \times EF = 2.1 \times 4$$

$$EF = \frac{2.1 \times 4}{3}$$

= 2.8 செ.மீ

9. 6 மீ மற்றும் 3 மீ உயரமுள்ள இரண்டு செங்குத்தான தூண்கள் AC என்ற தரையின் மேல் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஊன்றப்பட்டுள்ளது எனில், y –யின் மதிப்பு காண்க.



தீர்வு :

AP மற்றும் CR என்பன 6 மீ மற்றும் 3 மீ உயரமுடைய செங்குத்துத் தூண்கள் என்க

BQ = y மீ

ΔCRA மற்றும் ΔBQA இல்

$\angle A = \angle A$ (பொதுக்கோணம்)

$\angle ACR = \angle ABQ = 90^\circ$

∴ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta CRA \sim \Delta BQA$

∴ அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம்.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CR}{BQ}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{y}$$

$$AB = \frac{AC \times y}{3} \quad \ldots (1)$$

ΔCBQ மற்றும் ΔCAP இல்

$\angle CBQ = \angle CAP = 90^\circ$

$\angle C = \angle C$ [பொதுக்கோணம்]

∴ $\Delta CBQ \sim \Delta CAP$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BQ}{AP}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{y}{6}$$

$$BC = \frac{y \times CA}{6} \quad \ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow AB + BC = \frac{AC \times y}{3} + \frac{y \times CA}{6}$$

$$AC = y \times AC\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{AC}{AC} = y\left(\frac{2+1}{6}\right)$$

$$1 = y\left(\frac{3}{6}\right)$$

$$1 = \frac{1}{2}y$$

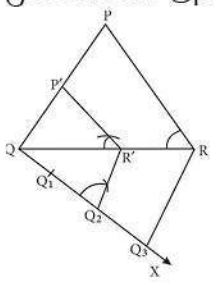
y = 2 மீ.

10. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் PQR –யின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{2}{3}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{2}{3}$)

தீர்வு :

தரப்பட்ட முக்கோணம் PQR ஆகும்.

Δ PQR இன் பக்கங்களுக்கு $\frac{2}{3}$ அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களைக் கொண்ட மற்றொரு முக்கோணம் அமைப்போம்.



வரைதலின் படிகள்:

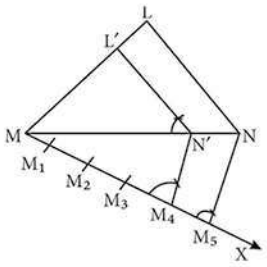
1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு ΔPQR வரைந்தேன்.
2. QRஎன்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு QX என்ற கதிரை P என்ற முனைப்புள்ளிக்கு எதிர்த்திசையில் வரைந்தேன்.
3. QX – இன் மீது Q_1, Q_2 மற்றும் Q_3 என்ற மூன்று புள்ளிகளை $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3$ என்றவாறு குறித்தேன்.
4. Q_3 – ஐ R உடன் இணைத்தேன். Q_3R க்கு இணையாக Q_2 –லிருந்து வரையப்படும் கோடு QR ஐ R' இல் சந்திக்கிறது.
5. R' லிருந்து RP – இக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு QP ஐ P'ல் சந்திக்கிறது. $\Delta P'QR'$ இன் பக்கங்கள் ΔPQR இன் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் 3 இல் 2 பங்கு ஆகும்.

$\therefore \Delta P'Q R'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

11. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் LMN –யின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{4}{5}$ என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{4}{5}$)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட ΔLMN – இன் பக்கங்களைப் போல் $\frac{4}{5}$ பங்கு அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களைக் கொண்ட மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.



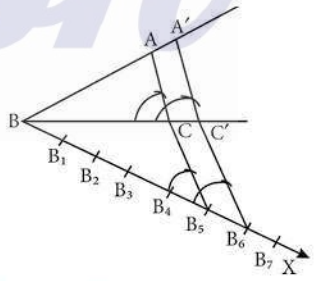
வரைதலின் படிகள்:

1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு ΔLMN வரைந்தேன்.
2. MN என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு MX என்ற கதிரை L என்ற முனைப் புள்ளிக்கு எதிர்த்திசையில் வரைந்தேன்.
3. MX மீது M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 என்ற 5 புள்ளிகளை $MM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5$ என்றவாறு குறித்தேன்.
4. M_5 ஐ புள்ளி N உடன் இணைத்தேன். M_5N இக்கு இணையாக M_4 இலிருந்து வரையப்படும் கோடு MN ஐ N' இல் சந்திக்கிறது.
5. N' இலிருந்து NL இக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு ML ஐ L' இல் சந்திக்கிறது. $\Delta L'MN'$ இன் பக்கங்கள் ΔLMN இன் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் $\frac{4}{5}$ பங்கு ஆகும். $\Delta L'MN'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

12. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ABC –யின் ஒத்த பக்கங்களின் 6/5 என அமையுமாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி 6/5)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட Δ ABC இன் பக்கங்களைப் போல் $\frac{6}{5}$ பங்கு அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களைக் கொண்ட மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.



வரைதலின் படிகள்:

1. ஏதேனும் ஒரு அளவைக் கொண்டு ΔABC வரைந்தேன்.
2. BC என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு BX என்ற கதிரை A என்ற முனைப் புள்ளிக்கு எதிர்த்திசையில் வரைந்தேன்.
3. BX –ன் மீது B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 மற்றும் B_6 என்ற 6 புள்ளிகளை $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_5B_6$ என்றவாறு குறித்தேன்.
4. B_5 – ஐ புள்ளி C உடன் இணைத்தேன். B_5Cக்கு இணையாக B_6 – லிருந்து வரையப்படும் கோடு BC இன் நீட்சியை C' இல் சந்திக்கிறது.
5. C' லிருந்து CA க்கு இணையாக வரையப்படும்

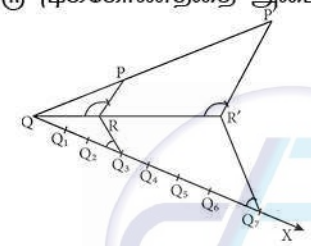
கோடு BA –இன் நீட்சியை A' இல் சந்திக்கிறது.

$\Delta A'BC'$ இன் பக்கங்கள் ΔABC இன் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் 5 இல் 6 பங்கு ஆகும். $\Delta A'BC'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

13. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் PQR –ன் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $\frac{7}{3}$ என்றவாறு ஒரு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக. (அளவு காரணி $\frac{7}{3}$)

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட ΔPQR –இன் பக்கங்களைப் போல் $\frac{7}{3}$ பங்கு அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களை கொண்ட மற்றொரு முக்கோணத்தை அமைப்போம்.



வரைதலின் படிகள்:

1. ஏதேனும் ஓர் அளவைக் கொண்டு ΔPQR வரைந்தேன்.
2. QR என்ற கோட்டுத்துண்டில் குறுங்கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு QX என்ற கதிரை P முனைப்புள்ளிக்கு எதிர்த்திசையில் வரைந்தேன்.
3. QX –இன் மீது $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ மற்றும் Q_7 என்ற 7 புள்ளிகளை $QQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5Q_6 = Q_6Q_7$.
4. Q_3 –ஐ புள்ளி R –உடன் இணைத்தேன். Q_3R க்கு இணையாக Q_7 லிருந்து வரையப்படும் கோடு QR ஐ R' இல் சந்திக்கிறது.
5. R' லிருந்து RP இக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு QP – ஐ P' இல் சந்திக்கிறது. $\Delta P'QR'$ இன் பக்கங்கள் ΔPQR – இன் ஒத்த பக்கங்களின் அளவில் 3 இல் 7 பங்கு ஆகும். $\Delta P'QR'$ ஆனது தேவையான வடிவொத்த முக்கோணம் ஆகும்.

தேல்ஸ் தேற்றமும், கோண இருசமவெட்டித் தேற்றமும்

நினைவில் கொள்க

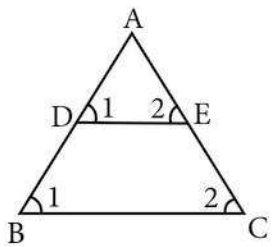
தேல்ஸ் தேற்றமும், கோண இருசமவெட்டித் தேற்றமும்

- எந்த ஒரு புதிய கருத்தையும் அறிவியல் பூர்வமாகப் பரிசோதித்த பின்னரே ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும் என்று முதன்முதலில் அறிவித்தவர் தேல்ஸ் ஆவார்.
- இன்றைய அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை முதன்முதலில் வழங்கிய பெருமைக்குரியவர் தேல்ஸ் ஆவார். எனவே, இவருடைய பெயரால் இது "தேல்ஸ் தேற்றம்" என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அடிப்படை விகிதசம தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றம்

ஒரு நேர்கோடு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மற்ற இரு பக்கங்களை வெட்டுமாறும் வரையப்பட்டால் அக்கோடு அவ்விரண்டு பக்கங்களையும் சம விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

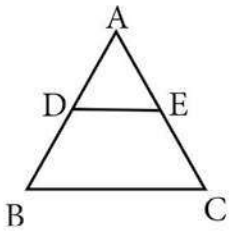


கிளைத்தேற்றம்

ΔABC யில் BC க்கு இணையான நேர்கோடு DE –யானது, AB – ஐ D – யிலும் AC ஐ E – யிலும் வெட்டினால்

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$



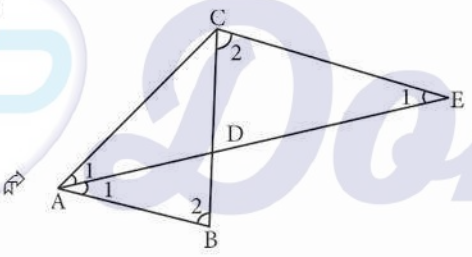
அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலை (அல்லது) தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை

ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களைச் சமவிகிதத்தில் பிரித்தால், அந்நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.

கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்தின் உட்புற இருசமவெட்டியானது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

i.e., $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் மறுதலை

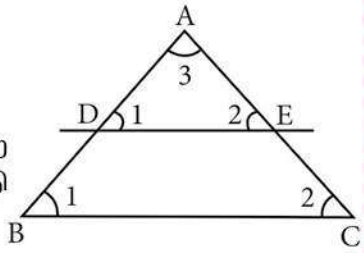
ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து செல்லும் ஒரு நேர்கோடு, அதன் எதிர் பக்கத்தினை உட்புறமாக மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு அமைந்த முனைக் கோணத்தினை உட்புறமாக இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

தேற்றம் 1 :

அடிப்படை விகிதச்சம தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றம்

கூற்று:

ஒரு நேர்கோடு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மற்ற இரு பக்கங்களை வெட்டுமாறும் வரையப்பட்டால் அக்கோடு அவ்விரண்டு பக்கங்களையும் சம விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.



நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டவை : ΔABC – யில் AB – யின் மேலுள்ள புள்ளி D, AC – யின் மேல் உள்ள புள்ளி E ஆகும்.

நிரூபிக்க : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

அமைப்பு : DE || BC வரைக.

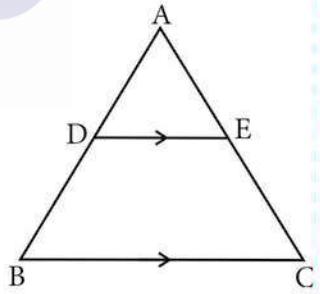
எண்	கூற்று	காரணம்
1	$\angle ABC = \angle ADE = \angle 1$	ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஏனெனில் $DE \parallel BC$
2	$\angle ACB = \angle AED = \angle 2$	ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஏனெனில் $DE \parallel BC$
3	$\angle DAE = \angle BAC = \angle 3$	இரு முக்கோணங்களும் ஒரு பொதுவான கோணத்தைக் கொண்டுள்ளது.
4	$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ $\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ $1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$ $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	AAA விதிமுறைப்படி ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம் D மற்றும் E – ஐப் பயன்படுத்தி AB மற்றும் AC –ஐ பிரித்தல். சுருக்குதல் இரு பக்கங்களிலும் 1 –ஐ நீக்குக. தலைகீழாக மாற்றுக

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

கிளைத்தேற்றம்

ΔABC –யில் BC –க்கு இணையான நேர்கோடு DE –யானது, AB –ஐ D –யிலும், AC –ஐ E –யிலும் வெட்டினால்

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ **(ii)** $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.



நிரூபணம்:

ΔABC -யில் DE || BC,

எனவே, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (அடிப்படை விகிதசம தேற்றப்படி)

(i) தலைகீழியாக எடுத்துக்கொண்டால் நாம் பெறுவது $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ ஆகும்.

இருபுறமும் 1 ஐ கூட்ட, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

$\frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE}$ ஆகையால் $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

(ii) இருபுறமும் 1 ஐ கூட்ட,

$\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

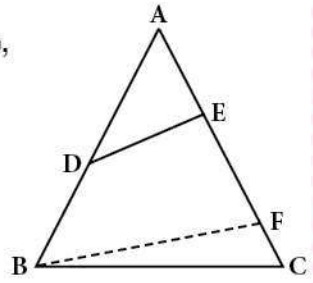
எனவே, $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

தேற்றம் 2:

அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலை (அல்லது) தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை.

கூற்று:

ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களைச் சமவிகிதத்தில் பிரித்தால், அந்நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.



நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டவை : ΔABC - யில் $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

நிரூபிக்க : $DE \parallel BC$

அமைப்பு : DE ஆனது BC - க்கு இணையாக இல்லையெனில், DF || BC என்றவாறு, DF -ஐ வரைக.

எண்	கூற்று	காரணம்
1	ΔABC –யில் BF	அமைப்பு
2	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ... (1)	கொடுக்கப்பட்டது
3	$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ ... (2)	தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி, (ΔABC –யில் AC –யில் F –ஐ எடுத்துக்கொள்க)
4	$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$	(1) மற்றும் (2) –லிருந்து
	$\frac{AE}{EC} + 1 = \frac{AF}{FC} + 1$	இருபுறமும் 1 – ஐ கூட்ட
	$\frac{AE + EC}{EC} = \frac{AF + FC}{FC}$	
	$\frac{AC}{EC} = \frac{AC}{FC}$	இருபுறமும் AC – ஐ நீக்குக
	EC = FC	ஆகவே DE ஆனது BC – க்கு இணையாக இல்லை என்ற கருதுகோள் தவறு.
	எனவே, F = E	
	இதிலிருந்து, $DE \parallel BC$	தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 3:

கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்

கூற்று:

ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் உட்புற இருசமவெட்டியானது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டவை : ΔABC –யில் AD –யானது $\angle A$ – யின் உட்புற இருசமவெட்டி

நிரூபிக்க : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

அமைப்பு : AB –க்கு இணையாக C வழியாக ஒரு இணைக்கோடு வரைக. AD –யின் நீட்சியானது C வழியாக செல்லும் கோட்டினை E –யில் சந்திக்கிறது.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	$\angle AEC = \angle BAE = \angle 1$	ஒரு குறுக்குவெட்டியானது இரண்டு இணைகோடுகளை வெட்டுவதால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்.
2.	ΔACE என்பது இருசமபக்க முக்கோணம் AC = CE ... (1)	ΔAC – யில் $\angle CAE = \angle CEA$ ·
3.	$\Delta ABD \sim \Delta ECD$ $\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$	AA விதிமுறைப்படி
4.	$\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$	(1)- லிருந்து, AC = CE. தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 4:

கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் மறுதலை

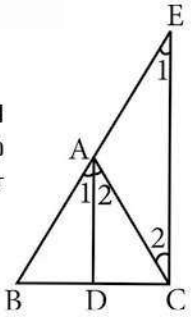
கூற்று:

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து செல்லும் ஒரு நேர்கோடு, அதன் எதிர் பக்கத்தினை உட்புறமாக மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு அமைந்த முனைக் கோணத்தினை உட்புறமாக இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டது : ABC என்பது ஒரு முக்கோணம். AD ஆனது பக்கம் BC –யை D என்ற புள்ளியில் கோணம் $\angle A$ –யை உள்ளடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

அதாவது $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ... (1)



நிரூபிக்க : $\angle A$ –யின் உட்புற இருசமவெட்டி AD. அதாவது, $\angle 1 = \angle 2$

அமைப்பு : CE || DA வரைக. BA – யின் நீட்சி E –யில் சந்திக்கிறது.

எண்	கூற்று	காரணம்
1	$\angle BAD = \angle 1$ மற்றும் $\angle DAC = \angle 2$ என்க	அனுமானம்
2	$\angle BAD = \angle AEC = \angle 1$ ... (1)	$DA \parallel CE$, ஒத்த கோணங்கள் சமம்
3	$\angle DAC = \angle ACE = \angle 2$	$DA \parallel CE$, மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி. ஆகையினால், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்.
4	$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ... (2)	ΔBCE –யில் தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி

5	$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$	(1) லிருந்து
6	$\frac{AB}{AC}=\frac{BA}{AE}$	(1) மற்றும் (2) லிருந்து
7	AC = AE ... (3)	AB –ஐ நீக்க
8	$\angle 1=\angle 2$	(3) லிருந்து ΔACE ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம்.
9	$\angle A$ – யின் உட்புற இருசமவெட்டி AD	$\angle 1=\angle BAD=\angle 2=\angle DAC$ என்பதால், தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது

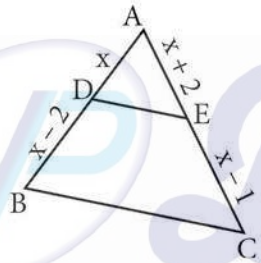
எடுத்துக்காட்டு

4.12 ΔABC –யில் DE || BC, AD = x, DB = x – 2, AE = x + 2 மற்றும் EC = x – 1 எனில், பக்கங்கள் AB மற்றும் AC –யின் நீளங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

ΔABC –யில் DE || BC.

தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மூலம் நாம் பெறுவது,



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

$$\frac{x}{x-2}=\frac{x+2}{x-1}$$

$\Rightarrow x(x-1)=(x-2)(x+2)$

ஆகவே, $x^2-x=x^2-4$ எனவே x = 4

x = 4 எனில், AD = 4, DB = x – 2 = 2,

AE = x + 2 = 6, EC = x – 1 = 3.

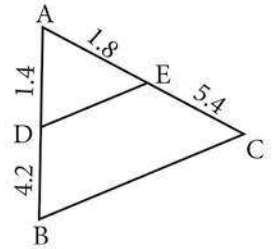
எனவே, AB = AD + DB = 4 + 2 = 6,

AC = AE + EC = 6 + 3 = 9.

ஆகவே, AB = 6, AC = 9.

4.13 ΔABC –யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC –ல் அமைந்த புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E. மேலும், AB = 5.6 செ.மீ, AD = 1.4 செ.மீ, AC = 7.2 செ.மீ மற்றும் AE = 1.8 செ.மீ எனில், DE || BC எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



AB = 5.6 செ.மீ, AD = 1.4 செ.மீ, AC = 7.2 செ.மீ மற்றும் AE = 1.8 செ.மீ.

BD = AB – AD = 5.6 – 1.4 = 4.2 செ.மீ

மற்றும் EC = AC – AE = 7.2 – 1.8 = 5.4 செ.மீ.

$\frac{AD}{DB}=\frac{1.4}{4.2}=\frac{1}{3}$ மற்றும் $\frac{AE}{EC}=\frac{1.8}{5.4}=\frac{1}{3}$

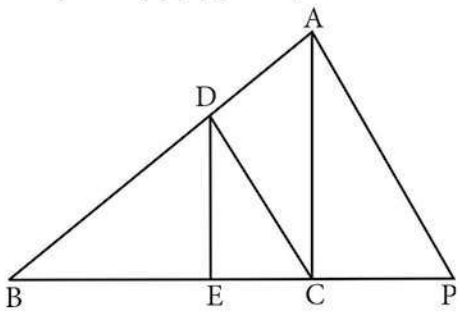
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

எனவே, அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலையின்படி DE – யானது BC – க்கு இணை ஆகும்.

4.14 படத்தில், DE || AC மற்றும் DC || AP எனில், $\frac{BE}{EC}=\frac{BC}{CP}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

ΔBPA –யில், DC || AP என்பதால், அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி,



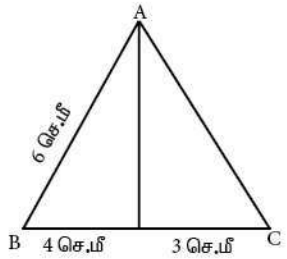
நாம் பெறுவது, $\frac{BC}{CP}=\frac{BD}{DA}$ ... (1)

ΔBCA –யில், DE || AC என்பதால், அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி,

நாம் பெறுவது, $\frac{BE}{EC}=\frac{BD}{DA}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து, $\frac{BE}{EC}=\frac{BC}{CP}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

4.15 படத்தில் $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி AD ஆகும். BD = 4 செ.மீ, DC = 3 செ.மீ மற்றும் AB = 6 செ.மீ எனில், AC –யைக் காண்க?



தீர்வு :

ΔABC –யில், $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி AD ஆகும்.

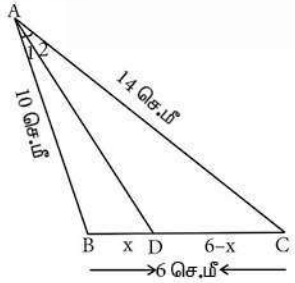
எனவே, கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{AC} \Rightarrow 4\,AC = 18$$

எனவே, $AC = \frac{9}{2} = 4.5$ செ.மீ

4.16 படத்தில், AD என்பது $\angle BAC$ – யின் இருசமவெட்டியாகும். AB = 10 செ.மீ, AC = 14 செ.மீ மற்றும் BC = 6 செ.மீ எனில், BD மற்றும் DC –ஐ காண்க.



தீர்வு :

BD = x செ.மீ என்க. DC = (6 – x) செ.மீ

$\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி AD ஆகும்.

எனவே, கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{10}{14} = \frac{x}{6-x} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{x}{6-x}$$

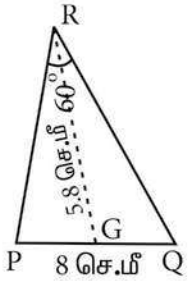
$\Rightarrow 12x = 30$ எனவே, $x = \frac{30}{12} = 2.5$ செ.மீ

ஆகவே, BD = 2.5 செ.மீ,

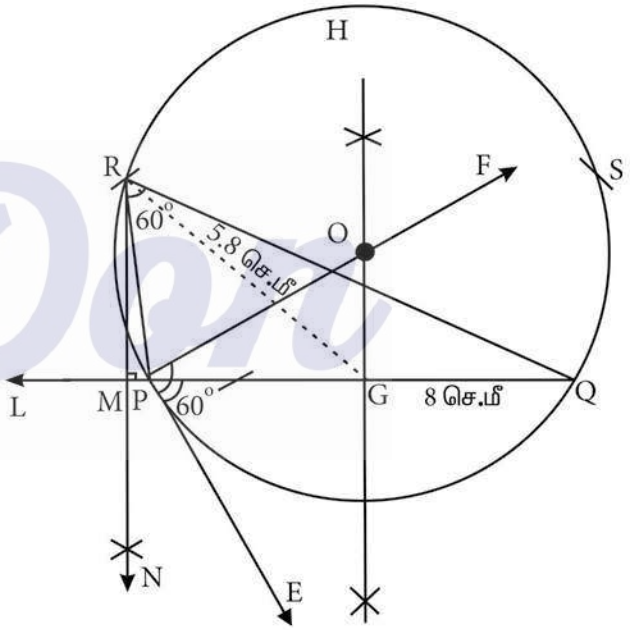
DC = 6 – x = 6 – 2.5 = 3.5 செ.மீ

4.17 PQ = 8 செ.மீ, $\angle R = 60°$ உச்சி R–லிருந்து PQ க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் RG = 5.8 செ.மீ என இருக்குமாறு ΔPQR வரைக. R –லிருந்து PQ –க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை

படி 1: PQ = 8 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

படி 2: புள்ளி P வழியே $\angle QPE = 60°$ என இருக்கும்படி PE வரைக.

படி 3: புள்ளி P வழியே $\angle EPF = 90°$ என இருக்கும்படி PF வரைக.

படி 4: PQ –க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக் கோடு PF –ஐ O விலும், PQ –ஐ G–யிலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O வை மையமாகவும், OP –யை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

படி 6: G –யிலிருந்து 5.8 செ.மீ ஆரமுள்ள வில்களை வட்டத்தில் வெட்டுமாறு

வரைக. அவை வெட்டும் புள்ளிகளை R மற்றும் S எனக் குறிக்கவும்.

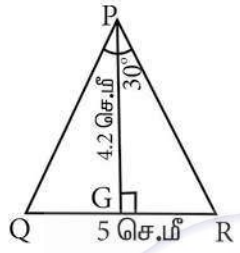
படி 7: PR மற்றும் RQ –ஐ இணைக்கவும். ΔPQR தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

படி 8: R –லிருந்து LQ –க்கு செங்குத்துக்கோடு RN வரைக. RN ஆனது LQ–வை M –யில் சந்திக்கிறது.

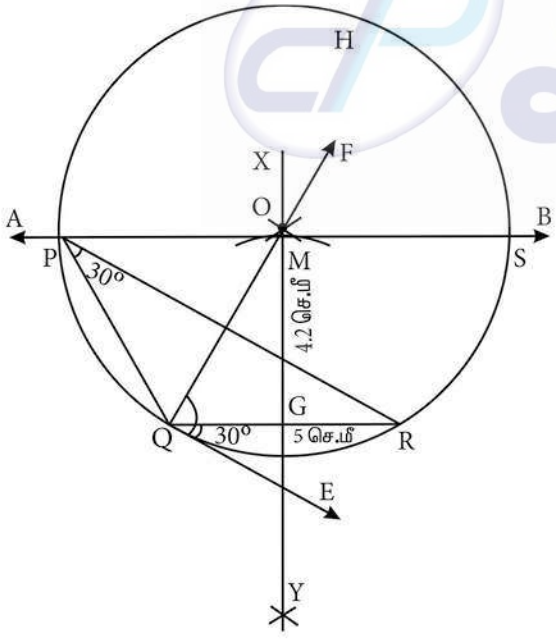
படி 9: குத்துக்கோடு RM –யின் நீளம் 3.5 செ.மீ.

4.18 QR = 5 செ.மீ, $\angle P = 30^\circ$ மற்றும் P –யிலிருந்து QR –க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4.2 செ.மீ கொண்ட ΔPQR வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: QR = 5 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

படி 2: புள்ளி Q வழியே $\angle RQE = 30^\circ$ என இருக்கும்படி QE வரைக.

படி 3: புள்ளி Q வழியே $\angle EQF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி QF வரைக.

படி 4: QR – க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக் கோடு XY –யானது QF – ஐ O – விலும், QR – ஐ G – யிலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O –வை மையமாகவும், OQ –வை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

படி 6: G –யிலிருந்து மையக்குத்துக் கோடு XY –ல், GM = 4.2 செ.மீ இருக்கும்படி ஒரு வில் வரைக.

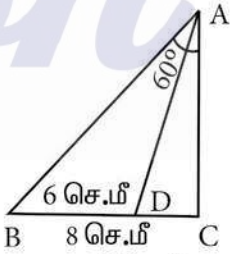
படி 7: QR – க்கு இணையாக M வழியே AB என்ற கோடு வரைக.

படி 8: AB – யானது வட்டத்தை P மற்றும் S –யில் சந்திக்கிறது.

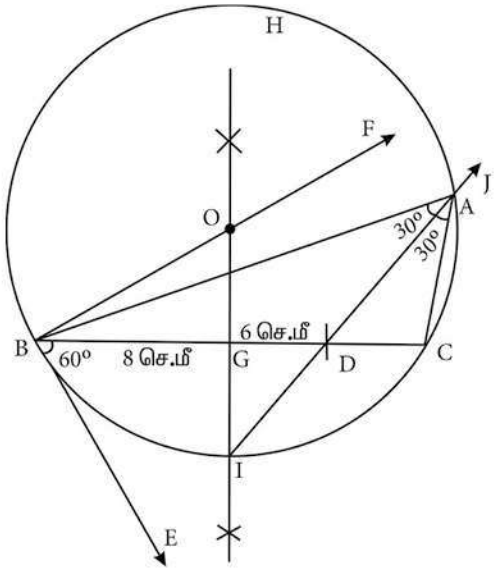
படி 9: QP மற்றும் RP –யை இணைக்கவும். ΔPQR ஆனது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

4.19 அடிப்பக்கம் BC = 8 செ.மீ, $\angle A = 60^\circ$. $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டியானது BC –ஐ D என்ற புள்ளியில் BD = 6 செ.மீ என்றவாறு சந்திக்கிறது எனில், முக்கோணம் ABC வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: BC = 8 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

படி 2: புள்ளி B வழியே $\angle CBE = 60^\circ$ என இருக்கும்படி BE வரைக.

படி 3: புள்ளி B வழியே $\angle EBF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி BF வரைக.

படி 4: BC – க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக் கோடானது BF – ஐ O –விலும் BC –யை G –யிலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O – வை மையமாகவும், OB –யை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

படி 6: புள்ளி B – யிலிருந்து BC – யில் 6 செ.மீ தொலைவில் D என்ற புள்ளிக்கு ஒரு வில் வரைக.

படி 7: மையக்குத்துக்கோடானது வட்டத்தை I என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது. ID – யை இணைக்கவும்.

படி 8: ID – யை வட்டத்தில் A –யில் சந்திக்குமாறு நீட்டவும். AB மற்றும் AC – யை இணைக்கவும்.

ΔABC என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு _____ வரையப்படும் நேர்கோடு மற்ற இரு பக்கங்களை விகிதசமத்தில் பிரிக்கும்.

விடை: இணையாக

2. அடிப்படை விகிதசம தேற்றம் _____ என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

விடை: தேல்ஸ் தேற்றம்

3. ΔABC என்பது சமபக்க முக்கோணம் என்க. இதில் BC – யின் மேலுள்ள புள்ளி D மற்றும் $\angle A$ – யின் உட்புற இருசமவெட்டி AD ஆகும். கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால் $\frac{BD}{DE}$ என்பது _____ ஆகும்.

விடை: 1

4. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்தின் _____ ஆனது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

விடை: உட்புற இருசமவெட்டி

5. ΔABC –யில் பக்கம் BC –யின் நடுக்கோடு. AD –யானது $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டியாகவும் இருந்தால், $\frac{AB}{AC}$ ஆனது _____.

விடை: 1

பயிற்சி 4.2

1. ΔABC யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC –யின் மீதுள்ள புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E ஆனது DE || BC என்றவாறு அமைந்துள்ளது.

(i) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ மற்றும் AC = 15 செ.மீ எனில் AE –யின் மதிப்பு காண்க.

(ii) AD = 8x – 7, DB = 5x – 3, AE = 4x – 3 மற்றும் EC = 3x – 1 எனில், x –ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

(i) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

AC = 15 செ.மீ

EC = AC – AE

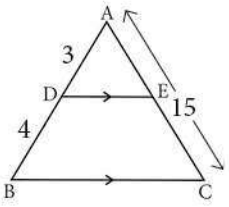
= 15 – AE

அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் படி,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{AE}{AC - AE}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{AE}{15 - AE}$$



$3(15 - AE) = 4AE$

$45 - 3AE = 4AE$

$45 = 4AE + 3AE$

$7AE = 45$

$AE = \frac{45}{7} = 6.43$ செ.மீ

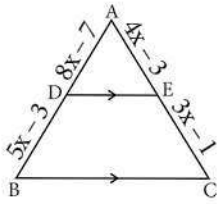
(ii) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

கணக்கின்படி AD = 8x – 7

DB = 5x – 3

AE = 4x – 3

EC = 3x – 1



$$\frac{8x-7}{5x-3} = \frac{4x-3}{3x-1}$$

$$(8x-7)(3x-1) = (4x-3)(5x-3)$$

$$24x^2 - 21x - 8x + 7 = 20x^2 - 15x - 12x + 9$$

$$24x^2 - 20x^2 - 29x + 27x + 7 - 9 = 0$$

$$4x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\div \text{ by } 2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 = 0$$

$$2x(x-1) + 1(x-1) = 0$$

$$(x-1)(2x+1) = 0$$

$x - 1 = 0$ (அ) $2x + 1 = 0$

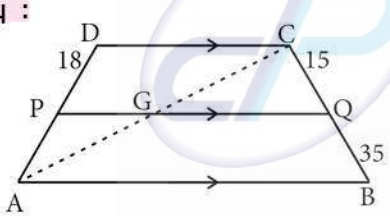
$x = 1$ (அ) $x = -\frac{1}{2}$

x குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.

$\therefore x = 1$

2. ABCD என்ற ஒரு சரிவகத்தில் AB || DC மற்றும் P, Q என்பன முறையே பக்கங்கள் AD மற்றும் BC –யின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். மேலும் PQ || DC, PD = 18 செ.மீ, BQ = 35 செ.மீ மற்றும் QC = 15 செ.மீ எனில் AD காண்க.

தீர்வு :



AC ஐ இணைக்கும் கோடு PQ ஐ G இல் சந்திக்கிறது.

$\therefore$ AB || DC மற்றும் PQ || DC

PQ || AB

ΔADC இல்

PG || DC

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AG}{GC} \quad \ldots (1)$$

ΔCAB இல்

$$\frac{AG}{GC} = \frac{BQ}{QC} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$$

$$\frac{AP}{18} = \frac{35}{15}$$

$$AP = \frac{35 \times 18}{15}$$

$AP = 42$ செ.மீ

இங்கு $AD = AP + PD$

$= 42 + 18 = 60$ செ.மீ

$AD = 60$ செ.மீ

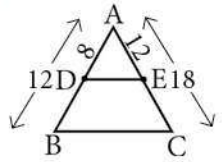
3. ΔABC – யில் D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் AC ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன. பின்வருவனவற்றிற்கு DE || BC என நிறுவுக.

(i) AB = 12 செ.மீ, AD = 8 செ.மீ, AE = 12 செ.மீ மற்றும் AC = 18 செ.மீ.

(ii) AB = 5.6 செ.மீ, AD = 1.4 செ.மீ, AC = 7.2 செ.மீ மற்றும் AE = 1.8 செ.மீ.

தீர்வு :

(i)



AB = 12 செ.மீ, AD = 8 செ.மீ, AE = 12 செ.மீ

AC = 18 செ.மீ

அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{8}{AB - AD} = \frac{8}{12-8}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{8}{4} = 2 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{12}{AC - AE}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{12}{18-12} = \frac{12}{6} = 2 \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$\therefore$ DE || BC

(ii) AB = 5.6 செ.மீ, AD = 1.4 செ.மீ

AC = 7.2 செ.மீ AE = 1.8 செ.மீ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$DB = AB - AD$

$= 5.6 - 1.4 = 4.2$ செ.மீ

$EC = AC - AE$

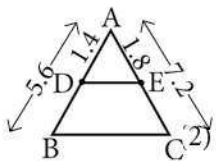
$= 7.2 - 1.8 = 5.4$ செ.மீ

இங்கு $\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2}$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$$

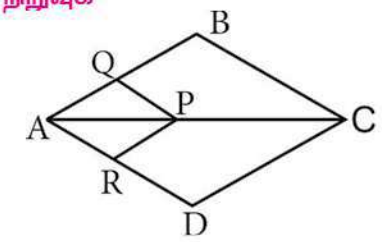


(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad \therefore DE \parallel BC$$

4. படத்தில் PQ || BC மற்றும் PR || CD எனில்

(i) $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$ **(ii)** $\frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$ **என நிறுவுக**



தீர்வு :

(i) ΔABC இல்

PQ || CB

அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC} \quad \ldots (1)$$

மேலும் ΔACD இல் PR || CD

அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின்படி

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AR}{AD} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{AR}{AD}$$

எனவே $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$

(ii) (1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AR}{AD}$$

$$\frac{AB}{AQ} = \frac{AD}{AR}$$

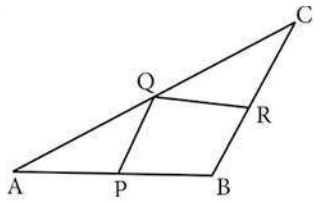
$$\frac{AQ+QB}{AQ} = \frac{AR+RD}{AR}$$

$$1 + \frac{QB}{AQ} = 1 + \frac{RD}{AR}$$

$$\Rightarrow \frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$$

5. ΔABC -யின் உள்ளே $\angle B$ ஐ ஒரு கோணமாகக் கொண்ட சாய்சதுரம் PQRB அமைந்துள்ளது. P, Q மற்றும் R என்பன முறையே பக்கங்கள் AB, AC மற்றும் BC மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். AB = 12 செ.மீ மற்றும் BC = 6 செ.மீ, எனில், சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் PQ, RB -யைக் காண்க.

தீர்வு :



கணக்கின்படி AB = 12 செ.மீ, BC = 6 செ.மீ

ΔAPQ மற்றும் ΔQRC இல்

$\angle QAP = \angle CQR$

($\because$ PB || QR, ஒத்த கோணங்கள்)

$\angle PQA = \angle RCQ$

($\because$ PQ || BR, ஒத்த கோணங்கள்)

$\therefore$ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta APQ \sim \Delta QRC$

$$\Rightarrow \frac{AP}{QR} = \frac{PQ}{RC} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\frac{AP}{QR} = \frac{PQ}{RC}$$

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{RC}{QR} \quad \ldots (1)$$

இங்கு ΔAPQ மற்றும் ΔABC இல்

$\angle CAB = \angle QAP$ (பொதுக்கோணம்)

$\angle AQP = \angle ACB$

$\therefore$ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta APQ \sim \Delta ABC$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{BC}{AB} \quad \ldots (2)$$

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{6}{12}$$

PQRB ஒரு சாய்சதுரம். ஆகையால்

PQ = QR = RB = PB

$$\frac{PQ}{AB-PB} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{PQ}{AB-PQ} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{PQ}{12-PQ} = \frac{6}{12}$$

$$12\,PQ = 6(12 - PQ)$$

$$12\,PQ = 72 - 6\,PQ$$

$12\,PQ + 6\,PQ = 72$

$18\,PQ = 72$

$PQ = \frac{72}{18} = 4$

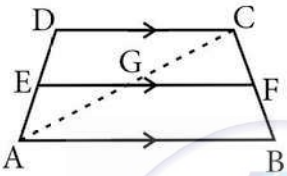
$PQ = 4$ செ.மீ

$PQ = RB$ ஆகையால்

$PQ = RB = 4$ செ.மீ

6. சரிவகம் ABCD –யில் AB || DC, E மற்றும் F என்பன முறையே இணையற்ற பக்கங்கள் AD மற்றும் BC –ன் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள், மேலும் EF || AB என அமைந்தால் $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :



தரப்பட்டுள்ளது: ABCD என்ற சரிவகத்தில் DC || AB மற்றும் EF || AB

நிரூபிக்க வேண்டியது: $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

அமைப்பு: AC ஐ இணைக்கும் கோடு EF ஐ G இல் சந்திக்கிறது.

நிரூபணம்:

ΔADC இல்

EG || DC

$\Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ [தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி] ... (1)

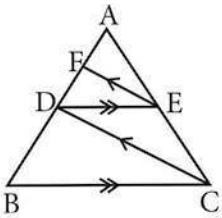
ΔABC இல்

$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ [தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி] ... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

7. படத்தில் DE || BC மற்றும் CD || EF எனில் $AD^2 = AB \times AF$ என நிறுவுக.



தீர்வு :

ΔABC இல் DE || BC

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

[தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி] ... (1)

ΔADC இலிருந்து

$\frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AE}$

[தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி] ... (2)

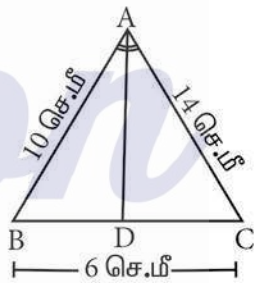
(1) மற்றும் (2) இலிருந்து

$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF}$

$AD^2 = AB \times AF$

8. ΔABC –யில் $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி AD ஆனது பக்கம் BC –ஐ D –யில் சந்திக்கிறது. AB = 10 செ.மீ, AC = 14 செ.மீ மற்றும் BC = 6 செ.மீ எனில், BD மற்றும் DC –ஐக் காண்க.

தீர்வு :



கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின்படி

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ... (1)

$\frac{10}{14} = \frac{BD}{CD}$

[$\because BC = BD + CD = 6;\ DC = 6 - BD$]

$\frac{10}{14} = \frac{BD}{6 - BD}$

$\frac{5}{7} = \frac{BD}{6 - BD}$

$5(6 - BD) = 7\,BD$

$30 - 5\,BD = 7\,BD$

$30 = 7\,BD + 5\,BD$

$30 = 12\,BD$

$BD = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

$BD = 2.5$ செ.மீ

(1) –இலிருந்து

$$\frac{10}{14} = \frac{6 - CD}{CD}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{6 - CD}{CD}$$

$$5\,CD = 42 - 7\,CD$$

$$5\,CD + 7\,CD = 42$$

$$12\,CD = 42$$

$$CD = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ செ.மீ}$$

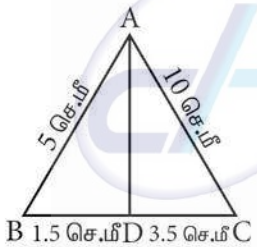
$$CD = 3.5 \text{ செ.மீ}$$

9. பின்வருவனவற்றுள் ΔABC –யில் AD ஆனது $\angle A$ –யின் இருசமவெட்டி ஆகுமா எனச் சோதிக்கவும்.

(i) AB = 5 செ.மீ, AC = 10 செ.மீ, BD = 1.5 செ.மீ மற்றும் CD = 3.5 செ.மீ.

(ii) AB = 4 செ.மீ, AC = 6 செ.மீ, BD = 1.6 செ.மீ மற்றும் CD = 2.4 செ.மீ.

தீர்வு :



(i) AB = 5 செ.மீ, AC = 10 செ.மீ
BD = 1.5 செ.மீ, CD = 3.5 செ.மீ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{AB}{AC} \neq \frac{BD}{DC}$$

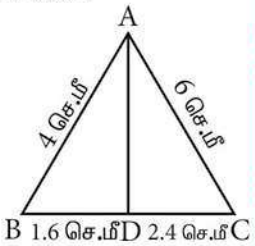
∴ கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின் மறுதலைப்படி, AD என்பது $\angle A$ இன் இருசமவெட்டி ஆகாது.

(ii) AB = 4 செ.மீ, AC = 6 செ.மீ,
BD = 1.6 செ.மீ, CD = 2.4 செ.மீ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

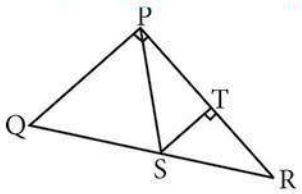
$$\frac{BD}{DC} = \frac{1.6}{2.4} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$



∴ கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின் மறுதலைப்படி, AD என்பது $\angle A$ இன் இருசமவெட்டி ஆகும்.

10. படத்தில் $\angle QPR = 90^\circ$, PS ஆனது $\angle P$ –யின் இருசமவெட்டி. மேலும், ST ⊥ PR எனில், ST × (PQ + PR) = PQ × PR என நிறுவுக.



தீர்வு :

ΔPQR இல் PS ஆனது $\angle P$ இன் கோண இருசமவெட்டி.

எனவே $\frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{SR}$ [கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின்படி

இருபுறமும் 1 ஐக் கூட்ட

$$\frac{PQ}{PR} + 1 = \frac{QS}{SR} + 1$$

$$\frac{PQ + PR}{PR} = \frac{QS + SR}{SR}$$

$$\frac{PQ + PR}{PR} = \frac{QR}{SR} \quad \ldots (1)$$

ΔRST மற்றும் ΔRQP இல்

$\angle SRT = \angle QRP = \angle R$ [பொதுக்கோணம்]

$\angle QPR = \angle STR = 90^\circ$

AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta RST \sim \Delta RQP$

$$\frac{RS}{RQ} = \frac{ST}{QP}$$

$$\frac{QP}{ST} = \frac{QR}{RS} \quad \ldots (2)$$

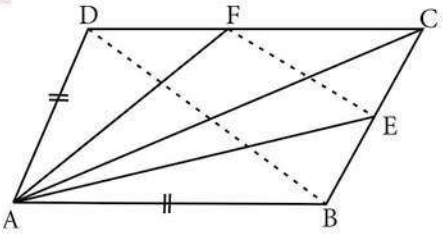
(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{QP}{ST} = \frac{PQ + PR}{PR}$$

$$PQ \times PR = ST\,(PQ + PR)$$

11. நாற்கரம் ABCD –யில் AB = AD, $\angle BAC$ மற்றும் $\angle CAD$ –யின் கோண இருசமவெட்டிகள் BC மற்றும் CD ஆகிய பக்கங்களை முறையே E மற்றும் F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன எனில், EF ∥ BD என நிறுவுக.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்டுள்ளது: நாற்கரம் ABCD இல் AB = AD, $\angle BAC$ மற்றும் $\angle CAD$ இன் கோண இரு சமவெட்டிகள் BC மற்றும் CD ஆகிய பக்கங்கள் முறையே E மற்றும் F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

நிரூபிக்க வேண்டியது: EF || BD

அமைப்பு: AC, BD மற்றும் EF ஐ இணைக்க.

நிரூபணம்: ΔCAB இல் AE ஆனது $\angle BAC$ இன் கோண இருசமவெட்டி.

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BE} \quad \ldots (1)$$

ΔACD இல் $\angle CAD$ இன் கோண இருசமவெட்டி AF ஆகும்.

எனவே $$\frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{DF} \quad \ldots (2)$$

[$\because$ AD = AB]

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

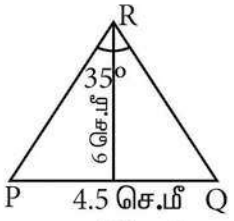
$$\frac{CE}{BE} = \frac{CF}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FD}$$

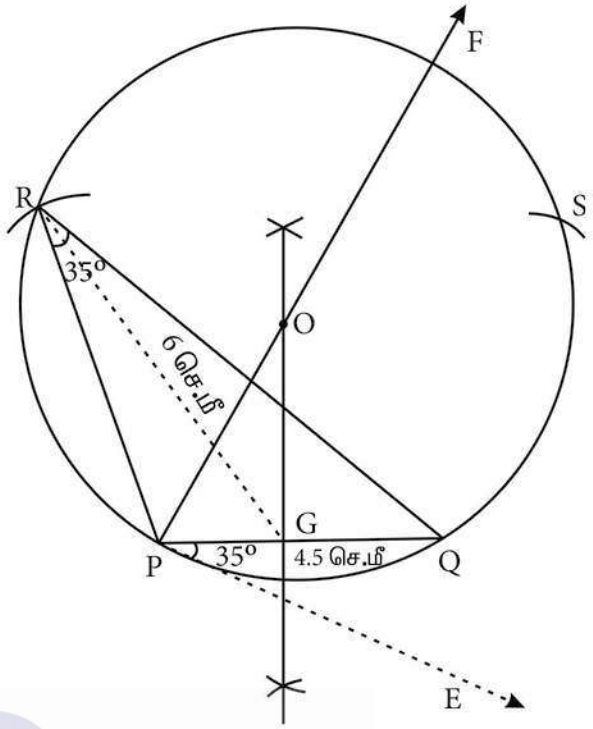
எனவே, ΔCBD இல் E மற்றும் F ஆனது முறையே CB மற்றும் CD பக்கங்களை சம விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. எனவே தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலைப் படி, EF || BD.

12. PQ = 4.5 செ.மீ, $\angle R$ = 35° மற்றும் உச்சி R –யிலிருந்து வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் RG = 6 செ.மீ என அமையுமாறு ΔPQR வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: PQ = 4.5 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைந்தேன்.

படி 2: புள்ளி P வழியே $\angle QPE$ = 35° என இருக்கும்படி PE வரைந்தேன்.

படி 3: புள்ளி P வழியே $\angle EPF$ = 90° என இருக்கும்படி PF வரைந்தேன்.

படி 4: PQ க்கு வரையப்படும் மையக் குத்துக்கோடு PF ஐ O – விலும் PQ – ஐ G – இலும் சந்திக்கிறது.

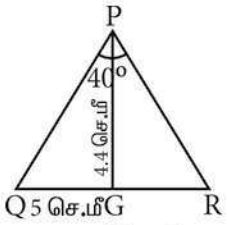
படி 5: O – வை மையமாகவும் OP – ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 6: G –இலிருந்து 6 செ.மீ ஆரமுள்ள வில்களை வட்டத்தில் வெட்டுமாறு வரைந்தேன். அவை வெட்டும் புள்ளிகளை R மற்றும் S எனக் குறித்தேன்.

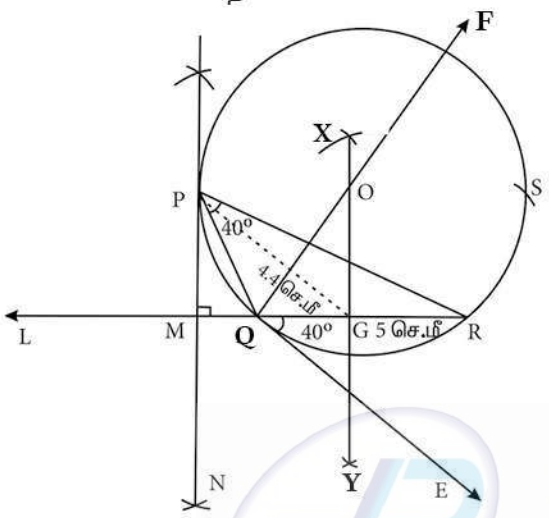
படி 7: PR மற்றும் RQ – ஐ இணைத்தேன். ΔPQR தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

13. QR = 5 செ.மீ, $\angle P$ = 40° மற்றும் உச்சி P –யிலிருந்து QR க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் PG = 4.4 செ.மீ என இருக்கும்படி ΔPQR வரைக. மேலும் P –லிருந்து QR – க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



குத்துக்கோட்டின் நீளம் = PM = 2.1 செ.மீ.

வரைமுறை:

படி 1: QR = 5 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைந்தேன்.

படி 2: புள்ளி Q வழியே $\angle RQE = 40^\circ$ என இருக்கும்படி QE வரைந்தேன்.

படி 3: புள்ளி Q வழியே $\angle EQF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி QF வரைந்தேன்.

படி 4: QR இக்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக்கோடு XY ஆனது QF – ஐ, 'O' – விலும் QR – ஐ G – யிலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: 'O' – வை மையமாகவும், OQ – ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 6: G –இலிருந்து 4.4 செ.மீ ஆரமுள்ள வில்களை வட்டத்தில் வெட்டுமாறு வரைந்தேன். அவை வெட்டும் புள்ளிகளை P மற்றும் S எனக் குறித்தேன்.

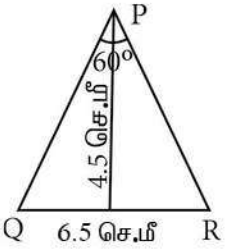
படி 7: QP மற்றும் PR ஐ இணைத்தேன். ΔPQR ஆனது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

படி 8: P இலிருந்து LR இக்கு செங்குத்துக்கோடு PN வரைந்தேன். PN ஆனது LR –ஐ M – இல் சந்திக்கிறது.

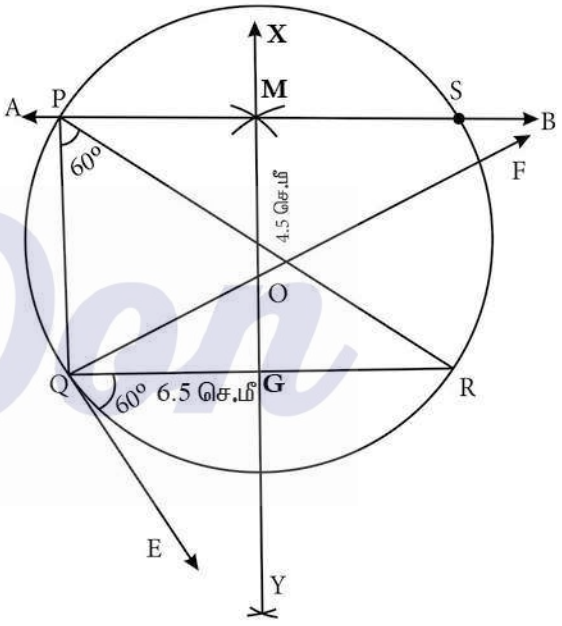
படி 9: குத்துக்கோடு PM இன் நீளம் 2.1 செ.மீ ஆகும்.

14. QR = 6.5 செ.மீ, $\angle P = 60^\circ$ மற்றும் உச்சி P – யிலிருந்து QR – க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4.5 செ.மீ உடைய ΔPQR வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: QR = 6.5 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைந்தேன்.

படி 2: புள்ளி Q வழியே $\angle RQE = 60^\circ$ என இருக்கும்படி QE வரைந்தேன்.

படி 3: புள்ளி Q வழியே $\angle EQF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி QF வரைந்தேன்.

படி 4: QR இக்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக்கோடு XY ஆனது QF – ஐ O விலும் QR – ஐ G –இலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O – வை மையமாகவும் OQ – வை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 6: G – இலிருந்து மையக்குத்துக் கோடு XY –ல் GM = 4.5 செ.மீ இருக்கும்படி ஒரு வில் வரைந்தேன்.

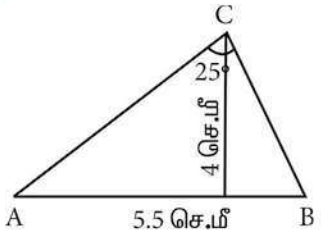
படி 7: QR – க்கு இணையாக M வழியே AB என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 8: AB ஆனது வட்டத்தை P மற்றும் S இல் சந்திக்கிறது.

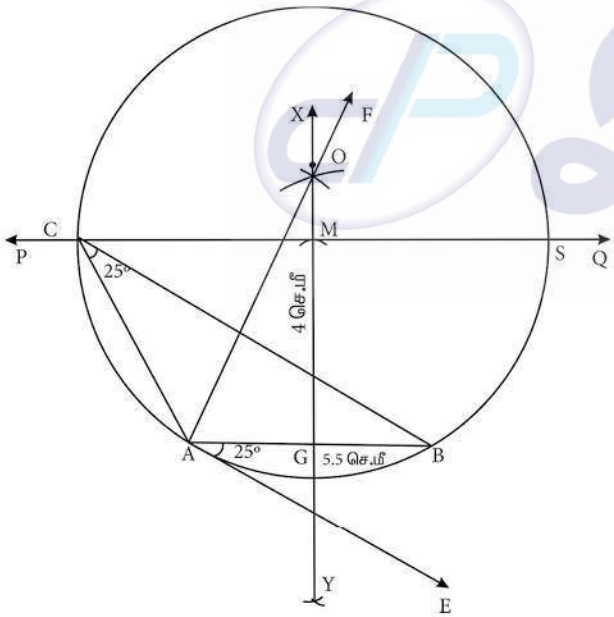
படி 9: QP மற்றும் RP ஐ இணைத்தேன். ΔPQR ஆனது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

15. AB = 5.5 செ.மீ, $\angle C$ = 25° மற்றும் உச்சி C – யிலிருந்து AB – க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4 செ.மீ உடைய ΔABC வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: AB = 5.5 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைந்தேன்.

படி 2: புள்ளி A வழியே $\angle BAE$ = 25° என இருக்கும்படி AE வரைந்தேன்.

படி 3: புள்ளி A வழியே $\angle FAE$ = 90° என இருக்கும்படி AF வரைந்தேன்.

படி 4: ABஇக்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக்கோடு XY ஆனது AF ஐ O விலும் AB ஐ G இலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O –வை மையமாகவும் OA – ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 6: G – இலிருந்து மையக்குத்துக்கோடு XY – இல் GM = 4 செ.மீ இருக்கும்படி ஒரு வில் வரைந்தேன்.

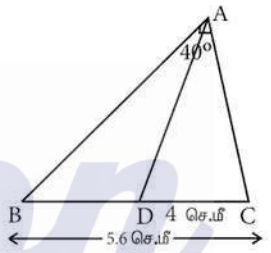
படி 7: AB இக்கு இணையாக M வழியே PQ என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 8: PQ ஆனது வட்டத்தை C மற்றும் S இல் சந்திக்கிறது.

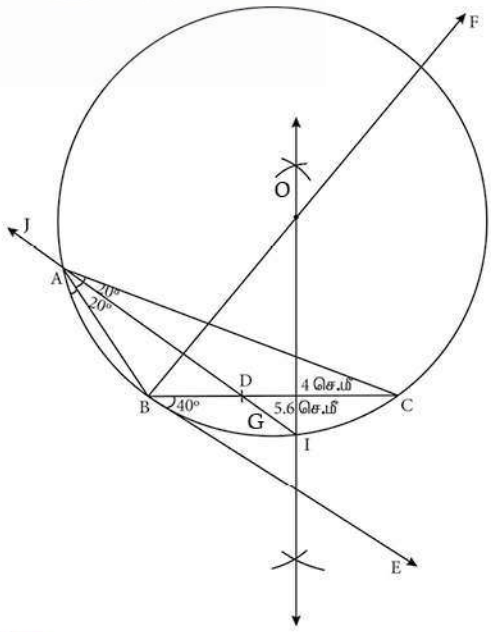
படி 9: AC மற்றும் BC ஐ இணைத்தேன். ΔABC ஆனது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

16. அடிப்பக்கம் BC = 5.6 செ.மீ, $\angle A$ = 40° மற்றும் $\angle A$ – யின் இருசமவெட்டியானது அடிப்பக்கம் BC – ஐ CD = 4 செ.மீ என D – யில் சந்திக்குமாறு அமையும் முக்கோணம் ABC வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: BC = 5.6 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைந்தேன்.

படி 2: புள்ளி B வழியே, $\angle CBE$ = 40° என இருக்கும்படி BE வரைந்தேன்.

படி 3: புள்ளி B வழியே $\angle EBF = 90^\circ$ என இருக்கும்படி BF வரைந்தேன்.

படி 4: BC இக்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக்கோடானது BF – ஐ O – விலும் BC – ஐ G – யிலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O – வை மையமாகவும் OB – ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தேன்.

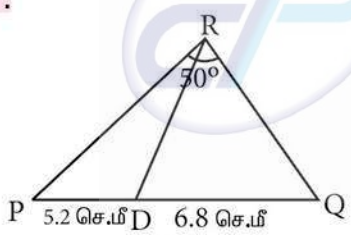
படி 6: புள்ளி C – யிலிருந்து BC – இல் 4 செ.மீ தொலைவில் D என்ற புள்ளிக்கு ஒரு வில் வரைந்தேன்.

படி 7: மையக்குத்துக் கோடானது வட்டத்தை I என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது. ID – ஐ இணைத்தேன்.

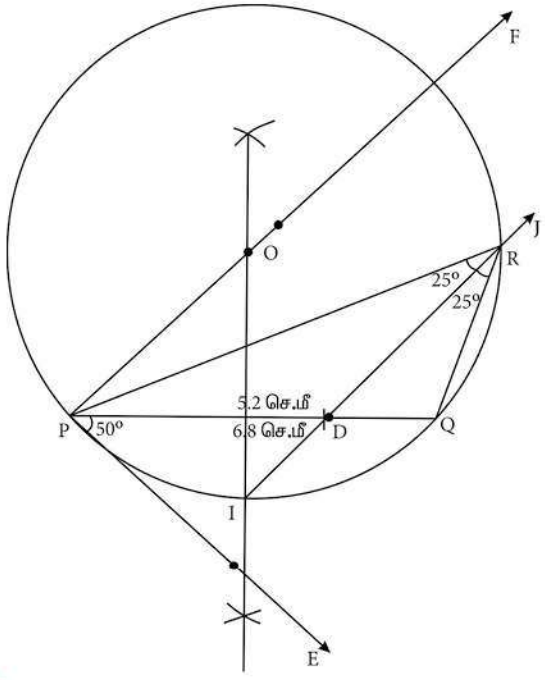
படி 8: ID – ஐ வட்டத்தில் A இல் சந்திக்குமாறு நீட்டினேன். AB மற்றும் AC ஐ இணைத்தேன். ΔABC என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

17. PQ = 6.8 செ.மீ, உச்சிக்கோணம் 50° மற்றும் உச்சிக்கோணத்தின் இருசமவெட்டியானது அடிப்பக்கத்தை PD = 5.2 செ.மீ என D – யில் சந்திக்குமாறு அமையும் ΔPQR வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: PQ = 6.8 செ.மீ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைந்தேன்.

படி 2: புள்ளி Q வழியே $\angle QPE = 50^\circ$ இருக்கும்படி PE வரைந்தேன்.

படி 3: புள்ளி P வழியே $\angle EPF = 90^\circ$ இருக்கும்படி PF வரைந்தேன்.

படி 4 : PQ க்கு வரையப்படும் மையக்குத்துக் கோடானது PF ஐ 'O' விலும் PQ – ஐ G – யிலும் சந்திக்கிறது.

படி 5: O – வை மையமாகவும் OP – ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 6: புள்ளி P யிலிருந்து PQ – இல் 5.2 செ.மீ தொலைவில் D என்ற புள்ளிக்கு ஒரு வில் வரைந்தேன்.

படி 7: மையக்குத்துக்கோடானது வட்டத்தை I. என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது. ID – ஐ இணைத்தேன்.

படி 8: ID – ஐ வட்டத்தில் R இல் சந்திக்குமாறு நீட்டினேன். RP மற்றும் RQ ஐ இணைத்தேன். ΔPQR என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

பிதாகரஸ் தேற்றம்

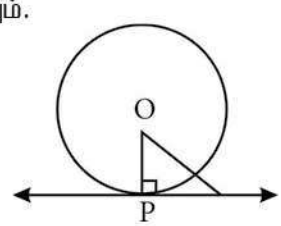
முக்கிய குறிப்பு

பிதாகரஸ் தேற்றம்

- பிதாகரஸ் தேற்றம் அதிக அளவிலான நிரூபணங்களைக் கொண்டுள்ளது.
- மூன்று எண்கள் (a, b, c) என்பன செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எனில், அந்த மூன்று எண்கள் (a, b, c) – ஐ பிதாகோரியனின் மூன்றின் தொகுதி என அழைக்கலாம்.
- (a, b, c) என்பவை பிதாகோரியனின் மூன்றின் தொகுதி எனில், $c^2 = a^2 + b^2$.
- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் 90° (செங்கோணம்) – க்கு எதிராக உள்ள பக்கம் கர்ணம் என்றழைக்கப்படுகிறது.
- செங்கோண முக்கோணத்தில் மிக நீளமான பக்கமே கர்ணம் ஆகும்.
- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.
- இந்தியாவில் பிதாகரஸ் தேற்றமானது **"போதயானா தேற்றம்"** என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு முக்கோணத்தில் நீளமான பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அந்த முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகள்

- ஒரு நேர்கோடும், ஒரு வட்டமும் ஒரு தளத்தில் அமைந்தால்
  (i) அக்கோடு வட்டத்தை ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொட்டுச் செல்லலாம்.
  (ii) இரு புள்ளிகளில் வெட்டிச் செல்லலாம்.
  (iii) வட்டத்தை தொடாமல் செல்லலாம்.
- ஒரு நேர்கோடானது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே தொட்டால் அந்த நேர்கோடானது வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்.
- ஒரு வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, அத்தொடு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும்.



- வட்டத்திற்கு உள்ளே உள்ள புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு எந்தத் தொடுகோடும் வரைய முடியாது.
- வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரைய முடியும்.
- வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைய முடியும்.
- வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரண்டு தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கும்.
- இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடுமானால், வட்ட மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவானது அவ்வட்டங்களின் ஆரங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

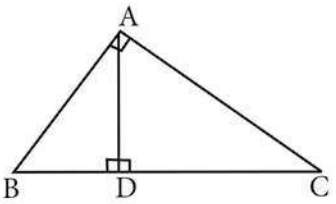
- இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடுமானால் வட்ட மையங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவானது அவற்றின் ஆரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும்.
- வட்டங்களுக்கு வரையப்பட்ட இரண்டு பொதுவான தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம் ஆகும்.

தேற்றம் 5: பிதாகரஸ் தேற்றம்

கூற்று:

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

நிரூபணம்:



கொடுக்கப்பட்டது: ΔABC -யில் $\angle A = 90^\circ$

நிரூபிக்க: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

அமைப்பு: AD $\perp$ BC வரைக.

எண்.	கூற்று	காரணம்
1	ΔABC மற்றும் ΔABD – ஐ ஒப்பிடுக. $\angle B$ பொதுவானது $\angle BAC = \angle BDA = 90^\circ$ எனவே, $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ $\Rightarrow AB^2 = BC \times BD$ ... (1)	$\angle BAC = 90^\circ$ கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $\angle BDA = 90^\circ$ அமைப்பிலிருந்து AA விதிமுறைப்படி
2	ΔABC மற்றும் ΔADC –ஐ ஒப்பிடுக $\angle C$ பொதுவானது $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ எனவே, $\Delta ABC - \Delta ADC$ $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$ $AC^2 = BC \times DC$ ...(2)	$\angle BAC = 90^\circ$ கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $\angle CDA = 90^\circ$ அமைப்பிலிருந்து AA விதிமுறைப்படி

(1) மற்றும் (2) – ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times DC$$
$$= BC\,[BD + DC] = BC \times BC$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை

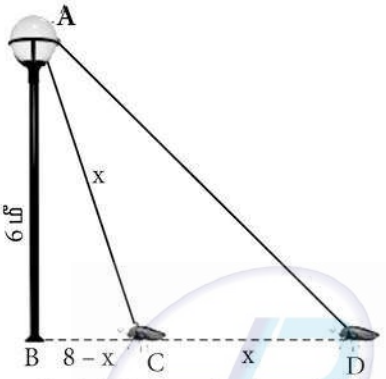
கூற்று

"ஒரு முக்கோணத்தில் நீளமான பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அந்த முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்."

எடுத்துக்காட்டு

4.20 ஒரு விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 6 மீ. அதன் அடியிலிருந்து 8 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு பூச்சி, கம்பத்தை நோக்கி ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவு நகர்கிறது. கம்பத்தின் உச்சிக்கும் தற்பொழுது பூச்சி இருக்கும் இடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு, பூச்சி கம்பத்தை நோக்கி நகர்ந்த தொலைவிற்குச் சமம் எனில், கம்பத்தின் அடியிலிருந்து பூச்சி தற்பொழுது எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

தீர்வு :



விளக்கு கம்பத்தின் அடிக்கும், பூச்சிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு BD = 8 மீ

விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் AB = 6 மீ

x மீ தொலைவு நகர்ந்த பின்பு, பூச்சி இருக்கும் இடம் C என்க.

AC = CD = x என்க.

மேலும் BC = BD – CD = 8 – x

ΔABC –யில், $\angle B = 90^\circ$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + (8 - x)^2$

$x^2 = 36 + 64 - 16x + x^2$

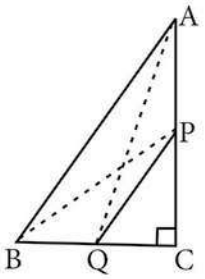
$16x = 100$ எனவே $x = 6.25$

எனில், BC = 8 – x = 8 – 6.25 = 1.75 மீ

எனவே, பூச்சியானது விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 1.75 மீ தொலைவில் உள்ளது.

4.21 ΔABC –யில் C ஆனது செங்கோணம் ஆகும். பக்கங்கள் CA மற்றும் CB –யின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q எனில், $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு :



ΔAQC – யில், C ஆனது செங்கோணம் என்பதால், $AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ... (1)

ΔBPC – யில், C ஆனது செங்கோணம் என்பதால்,

$BP^2 = BC^2 + CP^2$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) – லிருந்து,

$AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$

$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$

$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$

(P மற்றும் Q என்பது நடுப்புள்ளி என்பதால்)

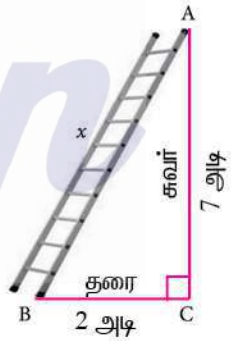
$= 5(AC^2 + BC^2)$

$4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$

(பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

4.22 சுவரின் அடியிலிருந்து 4 அடி தொலைவில் உள்ள ஏணியானது சுவரின் உச்சியை 7 அடி உயரத்தில் தொடுமெனில் தேவையான ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க. விடையை ஒரு தசம இடத்திருத்தமாக தருக.

தீர்வு :



ஏணியின் நீளம் AB = x என்க. BC = 4 அடி, AC = 7 அடி.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$x^2 = 7^2 + 4^2$ – லிருந்து, $x^2 = 49 + 16$

$x^2 = 65$ எனவே $x = \sqrt{65}$

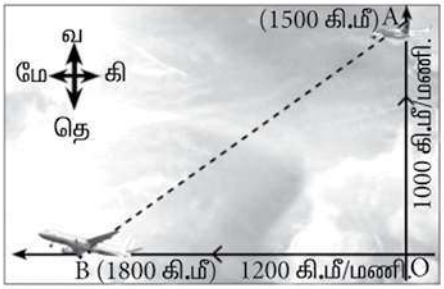
$\sqrt{65}$ ஆனது 8 மற்றும் 8.1 – க்கு இடையில் அமைகிறது.

$8^2 = 64 < 65 < 65.61 = 8.1^2$

எனவே, ஏணியின் நீளம் தோராயமாக 8.1 அடி ஆகும்.

4.23 ஒரு விமானம் விமான நிலையத்தை விட்டு வடக்கு நோக்கி 1000 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு விமானம் அதே விமான நிலையத்தை விட்டு 1200 கி.மீ/மணி வேகத்தில் மேற்கு நோக்கிப் பறக்கிறது, $1\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்குப் பிறகு இரு விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு எவ்வளவு இருக்கும்?

தீர்வு :



முதல் விமானம் O –வில் இருந்து புறப்பட்டு வடக்கு நோக்கி A என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது என்க.

(தொலைவு = வேகம் × நேரம்)

எனவே $OA = \left(1000 \times \frac{3}{2}\right)$ கி.மீ = 1500 கி.மீ

இரண்டாவது விமானம் O – வில் இருந்து புறப்பட்டு மேற்கு நோக்கி B என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது என்க.

எனவே $OB = \left(1200 \times \frac{3}{2}\right)$ கி.மீ = 1800 கி.மீ

கணக்கிடப்பட வேண்டிய தேவையான தொலைவு BA ஆகும்.

செங்கோணம் AOB –யில், $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$$AB^2 = (1500)^2 + (1800)^2 = 100^2 (15^2 + 18^2)$$

$$= 100^2 \times 549 = 100^2 \times 9 \times 61$$

$$AB = 100 \times 3 \times \sqrt{61} = 300\sqrt{61} \text{ கி.மீ.}$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. _____ ஆனது செங்கோண முக்கோணத்தின் நீளமான பக்கம் ஆகும்.

விடை: கர்ணம்

2. கணிதத்தின் முதல் தேற்றம் _____ ஆகும்

விடை: தேல்ஸ் தேற்றம்

3. ஒரு முக்கோணத்தின் நீளமான பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அம்முக்கோணம் _____.

விடை: செங்கோண முக்கோணம்

4. சரியா, தவறா எனக் கூறுக

(i) எல்லா வகை முக்கோணங்களுக்கும் பிதாகரஸ் தேற்றம் பொருந்தும்.

விடை: தவறு

(ii) செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 4 – ன் மடங்காக இருக்கும்.

விடை: சரி

சிந்தனைக் களம்

1. ஐந்து பிதாகோரியனின் மூன்றன் தொகுதிகளை எழுதுக.

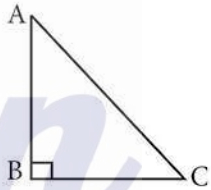
விடை: (3, 4, 5), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (8, 15, 17) (15, 20, 25)

2. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் _____.

விடை: 90°.

3. செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் அளவுகளும் ஒற்றை எண்களாக இருக்க இயலுமா? ஏன்?

விடை:



செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று பக்க அளவுகளும் ஒற்றை எண்ணாக இருக்க இயலாது.

ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்;

$\angle B = 90°$ எனில் $AC^2 = AB^2 + BC^2$

AB மற்றும் BC இன் அளவு ஒற்றை எண்கள் எனில் அவற்றின் வர்க்கம் AB^2 மற்றும் BC^2 ஒற்றை எண்கள்.

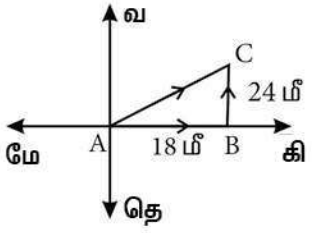
அவற்றின் கூடுதல் $AB^2 + BC^2$ ஒரு இரட்டை எண். (ie) AC^2 ஒரு இரட்டை எண் $\sqrt{AC}$ ஓர் இரட்டை எண்.

∴ மூன்றாவது பக்கம் இரட்டை எண்.

பயிற்சி 4.3

1. ஒரு மனிதன் 18 மீ கிழக்கே சென்று பின்னர் 24 மீ வடக்கே செல்கிறான். தொடக்க நிலையிலிருந்து அவர் இருக்கும் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு :



அந்த மனிதனின் தொடக்க நிலை A என்க. அவர் கடைசியில் இருக்கும் நிலை C என்க. அவர் 18 மீ கிழக்கே சென்று பின் 24 மீ வடக்கே சென்றதால் அவர் ஒரு செங்கோண முக்கோண பாதையை உருவாக்குகிறார்.

$\angle B = 90^\circ$; AB = 18 மீ BC = 24 மீ

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 18^2 + 24^2$

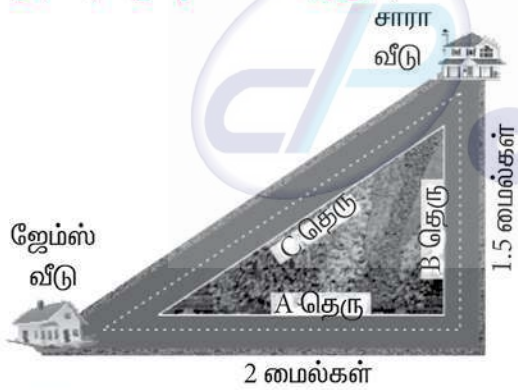
$AC^2 = 324 + 576$

$AC^2 = 900 = 30 \times 30$

$AC = 30$ மீ

∴ தொடக்க நிலையிலிருந்து தொலைவு = 30 மீ

2. சாராவின் வீட்டிலிருந்து ஜேம்ஸின் வீட்டிற்குச் செல்ல இரண்டு வழிகள் உள்ளன. ஒரு வழி 'C' என்ற தெரு வழியாகச் செல்வதாகும். மற்றொரு வழி A மற்றும் B ஆகிய தெருக்கள் வழியாகச் செல்வதாகும். நேரடி பாதை C வழி செல்லும்போது தொலைவு எவ்வளவு குறையும்? (படத்தைப் பயன்படுத்துக).



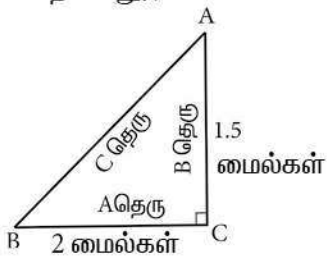
தீர்வு :

சாராவின் வீடு 'A' எனவும் ஜேம்ஸ் வீடு 'B' எனவும் கொள்வோம்.

B மற்றும் C தெருக்கள் வழியே சாரா மற்றும் ஜேம்ஸ் வீடுகளுக்கிடைப்பட்ட தொலைவு

= 1.5 + 2 = 3.5 மைல்கள்

C வழியாக சென்றால் தூரம் $AC^2 = AB^2 + BC^2$



$AC^2 = (1.5)^2 + (2)^2$

$= 2.25 + 4$

$AC^2 = 6.25$

$AC = \sqrt{6.25} = 2.5$

$AC = 2.5$ மைல்கள்

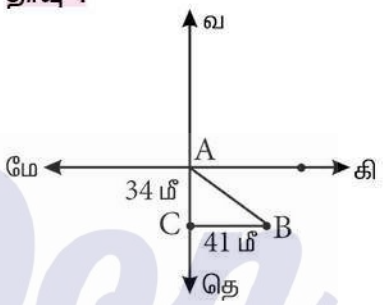
இரு வழிகளுக்குமான தொலைவு வேறுபாடு

$= 3.5 - 2.5 = 1$ மைல்

∴ தெரு C வழியாக செல்லும் நேரடிபாதை 1 மைல் குறைவான தொலைவு உடையது.

3. A என்ற புள்ளியில் இருந்து B என்ற புள்ளிக்குச் செல்வதற்கு ஒரு குளம் வழியாக, நடந்து செல்ல வேண்டும். குளம் வழியே செல்வதைத் தவிர்க்க 34 மீ தெற்கேயும், 41 மீ கிழக்கு நோக்கியும் நடக்க வேண்டும். குளம் வழியாகச் செல்வதற்குப் பாதை அமைத்து அப்பாதை வழியே சென்றால் எவ்வளவு மீட்டர் தொலைவு சேமிக்கப்படும்?

தீர்வு :



தொடக்கப் புள்ளி A மற்றும் முடிவுப்புள்ளி B என்க. C என்பது A யிலிருந்து 34 மீ தெற்கே உள்ள புள்ளி.

ΔACB இல் $\angle C = 90^\circ$

$AC^2 + CB^2 = AB^2$

[பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

$34^2 + 41^2 = AB^2$

$1156 + 1681 = AB^2$

$2837 = AB^2$

$AB = 53.26$ மீ

குளம் வழியாக A இலிருந்து B இன் தொலைவு

$= 53.26$ மீ

C வழியாக தொலைவு

$= 34$ மீ $+ 41$ மீ $= 75$ மீ

வேறுபாடு $= 75 - 53.26 = 21.74$ மீ

குளம் வழியாக பாதை அமைத்து அப்பாதை வழிச் சென்றால் 21.74 மீ தொலைவு சேமிக்கப்படும்.

4. WXYZ என்ற செவ்வகத்தில், XY + YZ = 17 செ.மீ மற்றும் XZ + YW = 26 செ.மீ எனில் செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தைக் கணக்கிடுக.



தீர்வு :

XY + YZ = 17 செ.மீ மற்றும் XZ + YW = 26 செ.மீ என தரப்பட்டுள்ளது.

செவ்வகத்தின் மூலை விட்டங்கள் சமம். மேலும் அவை ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும்.

$$\therefore \text{மூலைவிட்டம்} = \frac{26}{2} = 13 \text{ செ.மீ}$$

i.e., X Z = 13 செ.மீ YW = 13 செ.மீ

மேலும் XY + YZ = 17 செ.மீ

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$(XY + YZ)^2 = 17^2$$

$$(XY)^2 + (YZ)^2 + 2 \times (XY) \times (YZ) = 289$$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$(XY)^2 + (YZ)^2 = XZ^2$$

$$\therefore [XZ]^2 + 2\,(XY) \times (YZ) = 289$$

$$13^2 + 2 \times \text{நீளம்} \times \text{அகலம்} = 289$$

$$2 \times \text{பரப்பு} = 289 - 169$$

$$\text{பரப்பு} = \frac{289 - 169}{2} = \frac{120}{2}$$

பரப்பு = 60 செ.மீ²

∴ (1, 60) (2, 30) (3, 20) (4, 15), (5, 12) (6, 10) என்பன செவ்வகத்தின் நீள அகலங்களாக இருக்கலாம். ஆனால் இவ்வளவுகள் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

∴ 5, 12 என்பது செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலமாகும்.

5. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் சிறிய பக்கத்தின் 2 மடங்கை விட 6 மீ அதிகம். மேலும் மூன்றாவது பக்கமானது கர்ணத்தை விட 2 மீ குறைவு எனில், முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

ΔABC இல் $\angle B = 90^\circ$ என அமைத்த செங்கோண முக்கோணம் என்க. இந்த முக்கோணத்தின் சிறிய பக்கம் x அலகுகள் என்க.

எனவே கர்ணம் AC = (2x + 6) மீ

மூன்றாவது பக்கம்

$$BC = [(2x + 6) - 2] \text{ மீ}$$

$$= (2x + 6 - 2) \text{ மீ}$$

$$= (2x + 4) \text{ மீ}$$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(2x + 6)^2 = x^2 + [2x + 4]^2$$

$$4x^2 + 36 + 24x = x^2 + 4x^2 + 16 + 16x$$

$$4x^2 + 24x + 36 = 5x^2 + 16x + 16$$

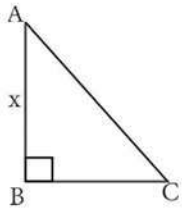
$$5x^2 + 16x + 16 - 4x^2 - 24x - 36 = 0$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x + 2)(x - 10) = 0$$

$x = -2$ அல்லது $x = 10$

நீளம் குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.



$$\therefore x = 10 \text{ மீ}$$

$$\therefore AB = 10 \text{ மீ}$$

$$BC = 2x + 4 = 2(10) + 4$$

$$= 24 \text{ மீ}$$

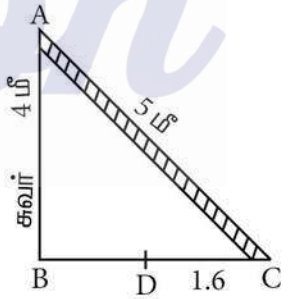
$$AC = 2x + 6 = 2(10) + 6 = 26 \text{ மீ}$$

∴ முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 10 மீ, 24 மீ, 26 மீ.

6. 5 மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணியானது ஒரு செங்குத்து சுவர் மீது சாய்த்து வைக்கப்படுகிறது. ஏணியின் மேல் முனை சுவரை 4 மீ உயரத்தில் தொடுகிறது. ஏணியின் கீழ்முனை சுவரை நோக்கி 1.6 மீ நகர்த்தப்படும்போது, ஏணியின் மேல்முனை சுவரில் எவ்வளவு தொலைவு மேல்நோக்கி நகரும் எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

AC என்ற ஏணியானது AB என்ற சுவருடன் $\angle B = 90^\circ$ என்றவாறு ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது.



∴ பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$5^2 = 4^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 25 - 16$$

$$BC^2 = 9$$

$$BC = 3 \text{ மீ}$$

C ஆனது 1.6 மீ சுவர் பக்கமாக நகர்ந்தால்

BC = 3மீ – 1.6 மீ = 1.4 மீ

ΔABC இல்,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$5^2 = AB^2 + (1.4)^2$$

$$25 - 1.96 = AB^2$$

$$AB^2 = 23.04$$

$$AB = 4.8 \text{ மீ}$$

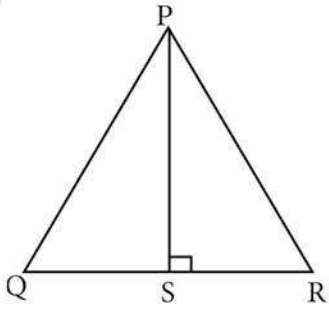
சுவரின் தற்போது உயரம் = 4.8 மீ

வேறுபாடு = 4.8 – 4 = 0.8 மீ

∴ ஏணியின் மேல்முனை சுவரில் 0.8 மீ தொலைவு மேல்நோக்கி நகரும்.

7. ΔPQR – யில் அடிப்பக்கம் QR – க்கு செங்குத்தாக உள்ள PS ஆனது QR – ஐ S –யில் சந்திக்கிறது. மேலும், QS = 3 SR எனில், $2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு :



கணக்கின்படி QS = 3 SR

$$QR = QS + SR = 3SR + SR$$

$$QR = 4SR$$

$$SR = \frac{1}{4} QR \quad \ldots (a)$$

$$SR = \frac{1}{4} QR \text{ மற்றும்}$$

$$QS = 3SR = 3 \times \frac{1}{4} QR$$

$$QS = \frac{3}{4} QR \quad \ldots (1)$$

ΔPSQ ஆனது செங்கோண முக்கோணம் $\angle S = 90^\circ$

$$PQ^2 = PS^2 + SQ^2 \quad \ldots (2)$$

ΔPSR இல், $\angle S = 90^\circ$

$$\therefore \quad PR^2 = PS^2 + SR^2 \quad \ldots (3)$$

$(2) - (3) \Rightarrow PQ^2 - PR^2 = SQ^2 - SR^2$

$$PQ^2 - PR^2 = \left(\frac{3}{4} QR\right)^2 - \left(\frac{1}{4} QR\right)^2$$

($\because$ (1), (2) இலிருந்து)

$$= \frac{9}{16} QR^2 - \frac{QR^2}{16}$$

$$= \frac{1}{16}(9QR^2 - QR^2) = \frac{8\,QR^2}{16}$$

$$PQ^2 - PR^2 = \frac{1}{2} QR^2$$

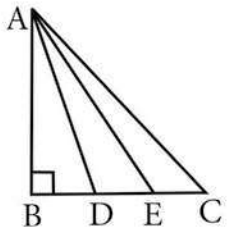
$$2(PQ^2 - PR^2) = QR^2$$

$$2PQ^2 - 2PR^2 = QR^2$$

$$2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. படத்தில், செங்கோண முக்கோணம் ABC –யில் கோணம் B ஆனது செங்கோணம் மற்றும் D, E என்ற புள்ளிகள் பக்கம் BC – ஐ மூன்று சமபகுதிகளாக பிரிக்கிறது எனில், $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ என நிறுவுக.



தீர்வு :

D மற்றும் E ஆனது BC ஐ மூன்று சம பகுதிகளாக பிரிக்கும் புள்ளிகள். எனவே

$$BD = DE = CE$$

BD = DE = CE = x என்க.

BE = 2x மற்றும் BC = 3x

செங்கோண முக்கோணங்கள் ΔABD, ΔABE மற்றும் ΔABC இல்,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = AB^2 + x^2 \quad \ldots (1)$$

செங் Δ ABE இல்

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$\Rightarrow \quad AE^2 = AB^2 + (2x)^2$$

$$\Rightarrow \quad AE^2 = AB^2 + 4x^2 \quad \ldots (2)$$

செங் Δ ABC இல்

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + (3x)^2$$

$$\Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + 9x^2 \quad \ldots (3)$$

$$8AE^2 - 3AC^2 - 5AD^2 = 8\,(AB^2 + 4x^2) - 3\,(AB^2 + 9x^2) - 5(AB^2 + x^2)$$

$$= 8AB^2 + 32x^2 - 3AB^2 - 27x^2 - 5AB^2 - 5x^2$$

$$\Rightarrow 8AE^2 - 3AC^2 - 5AD^2 = 0$$

$$8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

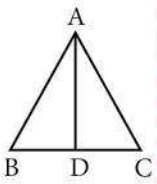
மாற்று வட்டத்துண்டு

நினைவில் கொள்க

மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றம்

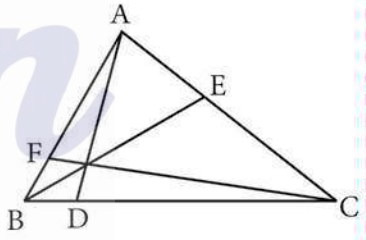
வட்டத்தில் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி வழியே ஒரு நாண் வரையப்பட்டால், அந்த நாண் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக மாற்று வட்டத்துண்டுகளில் அமைந்த கோணங்களுக்குச் சமம்.

ஒருங்கிசைவு தேற்றங்கள்



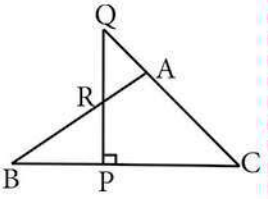
- ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து அதன் எதிர் பக்கத்திற்கு வரையப்படும் கோட்டுத்துண்டு சீவியன் (cevian) ஆகும். வரைபடத்தில் AD ஆனது ஒரு சீவியன்.
- எதிர் பக்கத்தை இரு சர்வசம பகுதியாக (சமமாக) பிரிக்கும் நடுக்கோடானது ஒரு சீவியன் ஆகும்.
- எதிர்பக்கத்திற்கு செங்குத்தாக இருக்கும் குத்துக்கோடானது ஒரு சீவியன் ஆகும்.
- கோணத்தை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் கோண இருசமவெட்டியானது ஒரு சீவியன் ஆகும்.

சீவாஸ் தேற்றம்



- ABC என்பது ஒரு முக்கோணம் என்க. பக்கங்கள் BC, CA மற்றும் AB –யில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே D, E மற்றும் F என்க. முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே திசையைப் பொருத்து, AD, BE, CF என்ற சீவியன்கள் ஒருங்கிசைந்துள்ளது எனில், $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$.
- ஒவ்வொரு விகிதத்தினையும் தலைகீழியாக மாற்றினாலும் மேற்கூறியது உண்மையே. ஏனெனில் 1 –யின் தலைகீழி ஒன்று ஆகும்.
- பல சீவியன்கள் முக்கோணத்திற்கு உட்புறம் அமைந்தாலும், அனைத்து சீவியன்களும் முக்கோணத்திற்கு உள்ளேயே அமைய வேண்டிய அவசியமில்லை.

மெனிலாஸ் தேற்றம்

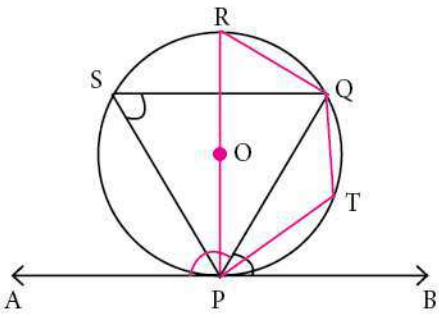


- ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB (அல்லது அவற்றின் நீட்சி) –யில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q, R ஆகியன ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = -1$. இந்தச் சூத்திரத்தில் உள்ள கோட்டுத் துண்டுகள் அனைத்தும் திசை சார்ந்தவையாகும்.
- $BP \times CQ \times AR = -PC \times QA \times RB$ எனவும் மெனிலாஸ் தேற்றத்தைக் குறிப்பிடலாம்.
- நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும்.

தேற்றம் 6: மாற்று வட்டத் துண்டு தேற்றம்

கூற்று

வட்டத்தில் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி வழியே ஒரு நாண் வரையப்பட்டால், அந்த நாண் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக மாற்று வட்டத்துண்டுகளில் அமைந்த கோணங்களுக்குச் சமம்.



நிரூபணம்

கொடுக்கப்பட்டது : O – வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் AB என்ற தொடுகோடு P என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது. மற்றும் PQ என்பது நாண் ஆகும். S மற்றும் T என்பன PQ என்ற நாணிற்கு எதிரெதிர் பக்கங்களில் வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.

நிரூபிக்க: (i) $\angle QPB = \angle PSQ$ மற்றும் (ii) $\angle QPA = \angle PTQ$

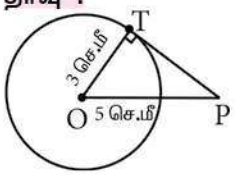
அமைப்பு : POR என்ற விட்டம் வரைக. மேலும் QR, QS மற்றும் PS – யை இணைக்கவும்.

வ.எண்	கூற்று	காரணம்
1	$\angle RPB = 90^\circ$ $\angle RPQ + \angle QPB = 90^\circ$ ...(1)	விட்டம் RP ஆனது தொடுகோடு AB – க்கு செங்குத்து ஆகும்.
2	ΔRPQ வில் $\angle PQR = 90^\circ$ ...(2)	அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் 90°.
3	$\angle QRP + \angle RPQ = 90^\circ$ ...(3)	ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90° ஆகும்.
4	$\angle RPQ + \angle QPB = \angle QRP + \angle RPQ$ $\angle QPB = \angle QRP$ ...(4)	(1) மற்றும் (3) – லிருந்து
5	$\angle QRP = \angle PSQ$ ... (5)	ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமம்.
6	$\angle QPB = \angle PSQ$ ...(6)	(4) மற்றும் (5) – லிருந்து, (i) நிரூபிக்கப்பட்டது.
7	$\angle QPB + \angle QPA = 180^\circ$ ...(7)	நேர்க்கோட்டில் அமைந்த நேரிய இணைக் கோணங்கள்.
8	$\angle PSQ + \angle PTQ = 180^\circ$ ... (8)	வட்டநாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் 180°.
9	$\angle QPB + \angle QPA = \angle PSQ + \angle PTQ$	(7) மற்றும் (8) –லிருந்து
10	$\angle QPB + \angle QPA = \angle QPB + \angle PTQ$	(6) –லிருந்து $\angle QPB = \angle PSQ$
11	$\angle QPA = \angle PTQ$	எனவே (ii) நிரூபிக்கப்பட்டது. தேற்றமும் நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு

4.24 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 5 செ.மீ தொலைவில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்டது: OP = 5 செ.மீ மற்றும்
ஆரம் r = 3 செ.மீ
தொடுகோட்டின் நீளம் PT ஐ காண
செங்கோண முக்கோணம் OTP –யில் $\angle T = 90^\circ$

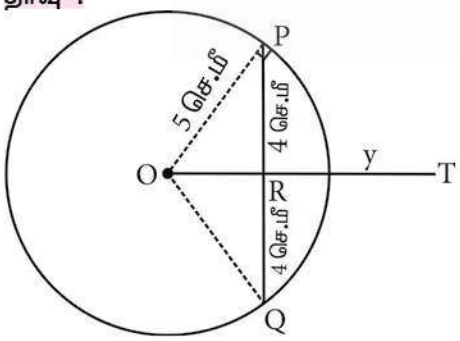
$OP^2 = OT^2 + PT^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

$5^2 = 3^2 + PT^2 \Rightarrow PT^2 = 25 - 9 = 16$

தொடுகோட்டின் நீளம் PT = 4 செ.மீ

4.25 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் PQ ஆனது 8 செ.மீ நீளமுள்ள நாண் ஆகும். P மற்றும் Q –வின் வழியே செல்லும் தொடுகோடுகள் T என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது எனில், TP என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



TR = y என்க. OT ஆனது PQ – யின் செங்குத்து இருசம வெட்டி ஆகும்.

PR = QR = 4 செ.மீ

ΔORP – யில் $OP^2 = OR^2 + PR^2$

$OR^2 = OP^2 - PR^2$

$OR^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ –லிருந்து

$\Rightarrow$ OR = 3 செ.மீ

$OT = OR + RT = 3 + y$ ... (1)

ΔPRT – யில், $TP^2 = TR^2 + PR^2$ ... (2)

மற்றும் ΔOPT –லிருந்து, $OT^2 = TP^2 + OP^2$

$OT^2 = (TR^2 + PR^2) + OP^2$

((2) – லிருந்து, TP^2 –ஐ பிரதியிட)

$(3 + y)^2 = y^2 + 4^2 + 5^2$

((1) –லிருந்து, OT –ஐ பிரதியிட)

$9 + 6y + y^2 = y^2 + 16 + 25$

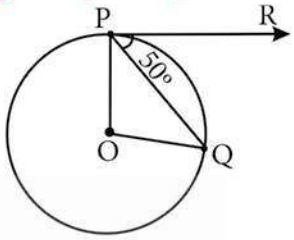
$6y = 41 - 9$ எனவே, $y = \frac{16}{3}$

(2) – லிருந்து, $TP^2 = TR^2 + PR^2$

$$TP^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2 = \frac{256}{9} + 16 = \frac{400}{9}$$

எனவே $TP = \frac{20}{3}$ செ.மீ

4.26 படத்தில் O ஆனது வட்டத்தின் மையம். PQ ஆனது ஒரு நாண் ஆகும். தொடுகோடு PR ஆனது நாண் PQ –வுடன் P –யில் 50° கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், $\angle POQ$ காண்க.



தீர்வு :

$\angle OPQ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ (தொடுகோட்டிற்கும், ஆரத்திற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் 90°)

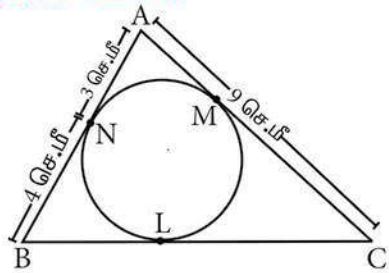
OP = OQ (வட்டத்தின் ஆரங்கள் சமம்)

$\angle OPQ = \angle OQP = 40^\circ$ (ΔOPQ ஆனது இரு சமபக்க முக்கோணம்)

$\angle POQ = 180^\circ - \angle OPQ - \angle OQP$

$\angle POQ = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$

4.27 அருகிலுள்ள படத்தில், ΔABC ஆனது ஒரு வட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு வட்டத்தைச் சுற்றி அமைந்துள்ளது எனில், BC –யின் நீளத்தைக் காண்க.



தீர்வு :

AN = AM = 3 செ.மீ (ஒரே வெளிப்புறப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் சமம்)

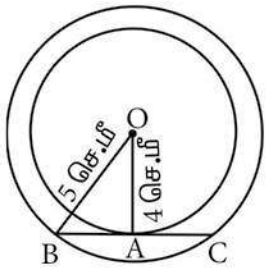
BN = BL = 4 செ.மீ;

CL = CM = AC – AM = 9 – 3 = 6 செ.மீ

BC = BL + CL = 4 + 6 = 10 செ.மீ

4.28 இரண்டு பொது மைய வட்டங்களின் ஆரங்கள் 4 செ.மீ, 5 செ.மீ ஆகும். ஒரு வட்டத்தின் நாணானது மற்றொரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைந்தால் அவ்வட்டத்தின் நாணின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



$OA = 4$ செ.மீ, $OB = 5$ செ.மீ;

மேலும் $OA \perp BC$.

$OB^2 = OA^2 + AB^2$

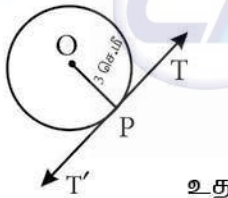
$5^2 = 4^2 + AB^2$ –லிருந்து $AB^2 = 9$

எனவே $AB = 3$ செ.மீ

$BC = 2AB$ எனவே $BC = 2 \times 3 = 6$ செ.மீ

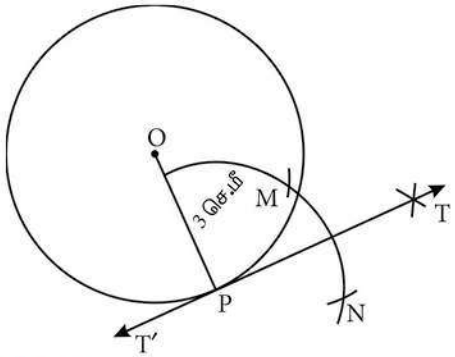
4.29 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக.

தீர்வு :



உதவிப்படம்

ஆரம், r = 3 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



வரைமுறை:

படி 1: O –வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

படி 2: வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து OP –ஐ இணைக்கவும்.

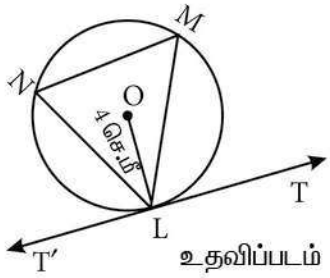
படி 3: P என்ற புள்ளி வழியே OP –க்கு செங்குத்தாக TT' வரைக

படி 4: TT' ஆனது தேவையான தொடுகோடு ஆகும்.

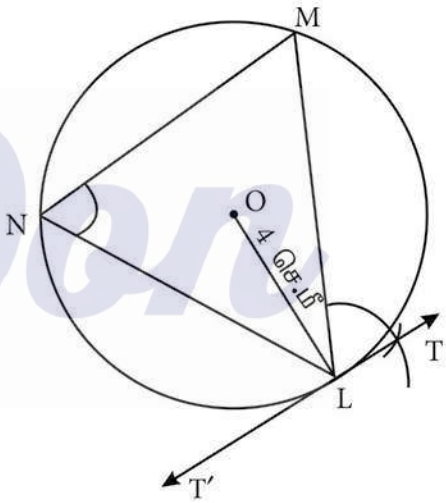
4.30 4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மீதுள்ள L என்ற புள்ளி வழியாக மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைக.

தீர்வு :

ஆரம் = 4 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: O – வை மையமாகக் கொண்டு 4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

படி 2: வட்டத்தின் மேல் L என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். L வழியே ஏதேனும் ஒரு நாண் LM வரைக.

படி 3: L மற்றும் M – ஐ தவிர்த்து வட்டத்தின் மேல் N என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். L,M மற்றும் N என்பன கடிகார முள்ளோட்டத்தின் எதிர் திசையில் அமையுமாறு குறிக்கவும். LN மற்றும் NM – ஐ இணைக்கவும்.

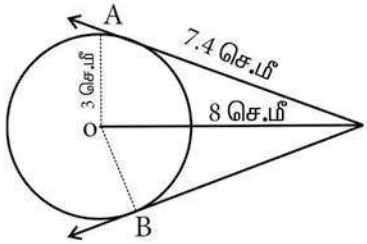
படி 4: $\angle TLM = \angle MNL$ என அமையுமாறு L வழியே TT' என்ற தொடுகோடு வரைக.

படி 5: TT' என்பது தேவையான தொடுகோடாகும்.

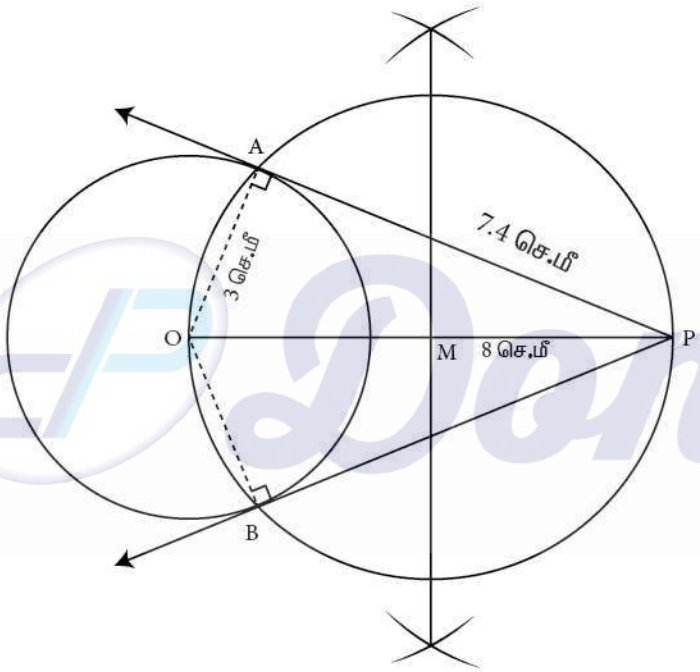
4.31 6 செ.மீ விட்டமுள்ள வட்டம் வரைந்து வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செ.மீ தொலைவில் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். அப்புள்ளியிலிருந்து PA மற்றும் PB என்ற இரு தொடுகோடுகள் வரைந்து அவற்றின் நீளங்களை அளவிடுக.

தீர்வு :

விட்டம் (d) = 6 செ.மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆரம் (r) = $\frac{6}{2}$ = 3 செ.மீ



உதவிப்படம்



PA = PB = 7.4 செ.மீ

வரைமுறை:

படி 1: O –வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

படி 2: 8 செ.மீ நீளமுள்ள OP என்ற ஒரு கோடு வரைக.

படி 3: OP – க்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைக. அது OP – ஐ M – ல் சந்திக்கும்.

படி 4: M – யை மையமாகவும், MO – வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை A மற்றும் B – யில் சந்திக்கிறது.

படி 5: AP மற்றும் BP – யை இணைக்கவும். AP மற்றும் BP தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 7.4 செ.மீ.

சரிபார்த்தல்: செங்கோண முக்கோணம் OAP – யில்,

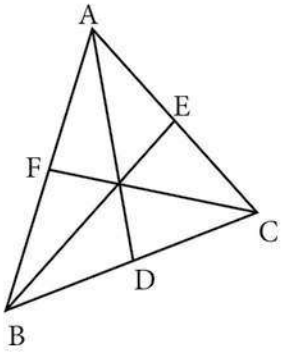
$PA^2 = OP^2 - OA^2 = 64 - 9 = 55$

$PA = \sqrt{55}$ = 7.4 செ.மீ (தோராயமாக).

276

4.32 ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் அதன் எதிர் பக்கத்தின் மையப்புள்ளிக்கு வரையப்படும் கோட்டுத்துண்டு நடுக்கோடு எனப்படும்.

பக்கங்கள் BC, CA மற்றும் AB –யின் மையப்புள்ளிகள் முறையே D,E மற்றும் F – க்கு வரையப்படும் நடுக்கோடுகளானது சீவியன்களாகவும் இருக்கும்.

BC – ன் நடு புள்ளி D. எனவே, BD = DC

அதாவது $\frac{BD}{DC} = 1$ ... (1)

CA – ன் நடு புள்ளி E. எனவே, CE = EA

அதாவது $\frac{CE}{EA} = 1$ ... (2)

AB – ன் நடு புள்ளி F. எனவே, AF = FB

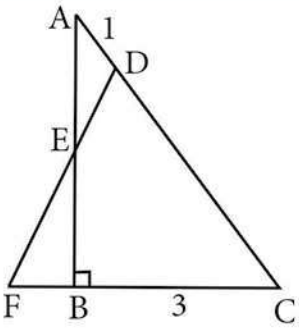
அதாவது $\frac{AF}{FB} = 1$ ... (3)

(1), (2) மற்றும் (3) –ஐ பெருக்க நாம் பெறுவது,

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

எனவே, சீவாஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.
ஆகையால், நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்கின்றன.

4.33 கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், முக்கோணம் ABC – யில் $\angle B = 90^\circ$, BC = 3 செ.மீ மற்றும் AB = 4 செ.மீ ஆகும். AD = 1 செ.மீ என்றவாறு AC– யின் மீது D எனும் புள்ளி உள்ளது. AB – யின் மையப்புள்ளி E ஆகும். D மற்றும் E ஐ இணைத்து CB ஐ F –யில் சந்திக்குமாறு DE ஐ நீட்டுக. BF ஐ காண்க.



தீர்வு :

ΔABC என்பது ஒரு முக்கோணம். D, E மற்றும் F ஆகியன முறையே பக்கங்கள் CA, AB மற்றும் BC – யில் அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். D, E, மற்றும் F ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைவன எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே மெனிலாஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{CD}{DA} = 1 \quad \text{... (1)}$$

AE = EB = 2, DA = 1 ஆகும்

மேலும் FC = FB + BC = BF + 3

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16 + 9 = 25.$

எனவே AC = 5

மேலும், CD = AC – AD = 5 – 1 = 4.

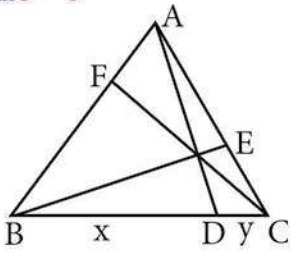
FC, AE, EB, DA, CD – யின் மதிப்புகளை (1) – ல் பிரதியிட,

$$\frac{2}{2} \times \frac{BF}{BF+3} \times \frac{4}{1} = 1$$

4BF = BF + 3

4BF – BF = 3 எனவே BF = 1

4.34 AB, AC மற்றும் BC ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே 13, 14 மற்றும் 15 ஆகும். $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$ மற்றும் $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$ எனில், BD மற்றும் DC காண்க.



தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது AB = 13, AC = 14 மற்றும் BC = 15.
BD = x மற்றும் DC = y என்க.

சீவாஸ் தேற்றத்தின்படி $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ ... (1)

$\frac{AF}{FB}$ மற்றும் $\frac{CE}{EA}$ – யின் மதிப்புகளை (1) – யில் பிரதியிட,

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = 1$$

$$\frac{x}{y} \times \frac{10}{40} = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{1}{4} = 1.$$

எனவே $x = 4y$ ... (2)

$BC = 15 \Rightarrow BD + DC = 15$

எனவே $x + y = 15$ ... (3)

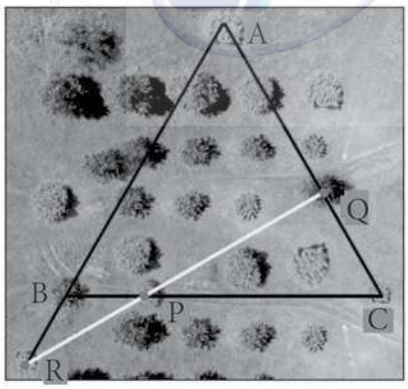
$x = 4y$ –ஐ (3) – யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$4y + y = 15$ – லிருந்து $5y = 15$, எனவே $y = 3$.

$y = 3$ –ஐ (3) – யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது $x = 12$.

எனவே $BD = 12, DC = 3$

4.35 பல மரங்களைக் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தில் P, Q, R என்ற மூன்று மரங்கள் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளன. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC - யின் மீது P - யும், AC - யின் மீது Q - வும், AB - யின் மீது R - ம் புள்ளிகளாக உள்ளன. மேலும் BP = 2 மீ, CQ = 3 மீ, RA = 10 மீ, PC = 6 மீ, QA = 5 மீ, RB = 2 மீ ஆகும். மரங்கள் P, Q, R ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமா எனச் சோதிக்கவும்.



தீர்வு :

மெனிலாஸ் தேற்றத்தின்படி P, Q, R என்ற மரங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைய வேண்டுமெனில்,

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1 \quad \text{... (1)}$$

ஆக அமைய வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்டது BP = 2 மீ, CQ = 3 மீ,

RA = 10 மீ, PC = 6மீ, QA = 5 மீ மற்றும் RB = 2 மீ

மதிப்புகளை (1) –யில் பிரதியிட,

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{RA}{RB} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{10}{2} = \frac{60}{60} = 1$$

எனவே, மரங்கள் P, Q, R ஒரே நேர்க்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ளன.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. நேர்கோடு, வட்டத்தினைத் தொட்டுச் செல்லும் பொதுவான புள்ளி _____ என்று அழைக்கப்படுகிறது.
விடை: தொடுகோடு

2. _____ – யின் ஒரு பகுதி நாண் ஆகும்.
விடை: வெட்டுக்கோட்டின்

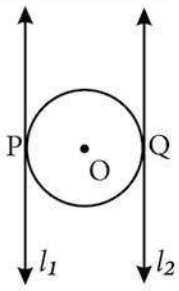
3. வட்டத்திற்கு _____ உள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுக்கோட்டின் நீளங்கள் சமம்.
விடை: வெளியே

4. வட்டத்தின் _____ புள்ளியிலிருந்து எந்தத் தொடுகோடும் வரைய இயலாது.
விடை: உள்ளே

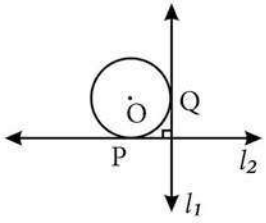
5. _____ என்ற சீவியன் (cevian) முக்கோணத்தின் கோணங்களை இரு சமபகுதிகளாக பிரிக்கின்றன.
விடை: கோண இருசமவெட்டி

சிந்தனைக் களம்

1. ஒன்றுக்கொன்று இணையாக ஒரு வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைய முடியுமா?
விடை: ஆம். வட்டத்தின் மேல் இரு வேறு புள்ளிகளிலிருந்து ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இரு தொடுகோடுகள் வரைய முடியும்.



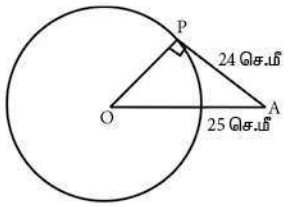
2. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக ஒரு வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைய முடியுமா?
விடை: ஆம். வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும்.



பயிற்சி 4.4

1. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 25 செ.மீ தொலைவில் உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் 24 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

தீர்வு :



'O' வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AP என்பது தொடுகோடு என்க.

கணக்கின்படி OA = 25 செ.மீ; AP = 24 செ.மீ, OP = ஆரம்

தொடுபுள்ளியில் தொடுகோடும், ஆரமும் செங்குத்து ஆகும்.

$\therefore$ செங்கோண ΔOPA இல்

$OA^2 = OP^2 + PA^2$

$25^2 = OP^2 + 24^2$

$625 = OP^2 + 576$

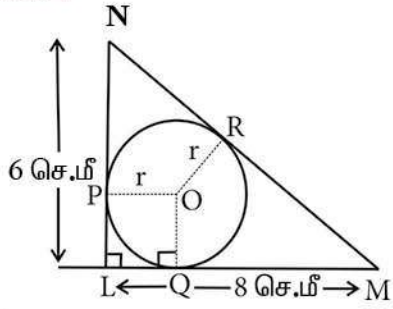
$OP^2 = 625 - 576 = 49$

$OP = 7$ செ.மீ

$\therefore$ ஆரம் = 7 செ.மீ

2. செங்கோண முக்கோணம் LMN - யில் $\angle L = 90^\circ$ ஆகும். ஒரு வட்டமானது செங்கோண முக்கோணத்தின் உள்ளே அதன் பக்கங்களைத் தொடுமாறு வரையப்படுகிறது. செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் 6 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு :



ΔLMN ஆனது $\angle L = 90^\circ$ உடைய செங்கோண முக்கோணம்.

மேலும் PL || OQ, PL = r = OP

எனவே NR = NP = NL − PL

[$\because$ NR மற்றும் NP தொடுகோடுகள்]

= (6 − r) செ.மீ

MR = MQ = ML − LQ = (8 − r) செ.மீ

[$\because$ MR மற்றும் MQ தொடுகோடுகள்]

NM = NR + RM

= (6 − r + 8 − r) செ.மீ

= (14 − 2r) செ.மீ

இங்கு $NM^2 = NL^2 + LM^2$ [பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

$\Rightarrow (14 - 2r)^2 = 8^2 + 6^2$

$(14 - 2r)^2 = 64 + 36$

$(14 - 2r)^2 = 100$

$14 - 2r = 10$

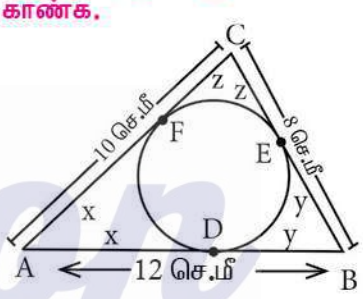
$-2r = 10 - 14$

$-2r = -4$

$r = 2$

$\therefore$ ஆரம் = 2 செ.மீ

3. படத்தில் காட்டியுள்ளபடி, 8 செ.மீ, 10 செ.மீ மற்றும் 12 செ.மீ பக்கங்கள் உடைய முக்கோணத்தினுள் ஒரு வட்டம் அமைந்துள்ளது எனில், AD, BE மற்றும் CF ஐக் காண்க.



தீர்வு :

வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியில் இருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.

$\therefore$ AD = AF = x

BD = BE = y

மற்றும் CE = CF = z என்க.

இங்கு AB = 12 செ.மீ, BC = 8 செ.மீ, CA = 10 செ.மீ

$x + y = 12; y + z = 8$ மற்றும் $z + x = 10$

$(x + y) + (y + z) + (z + x) = 12 + 8 + 10$

$2(x + y + z) = 30$

$\Rightarrow x + y + z = 15$

மேலும் $x + y = 12$ மற்றும் $x + y + z = 15$

$\Rightarrow 12 + z = 15$

$z = 3$

$y + z = 8$ மற்றும் $x + y + z = 15$

$\Rightarrow x + 8 = 15 \Rightarrow x = 7$

மற்றும் $z + x = 10$ மற்றும் $x + y + z = 15$

$\Rightarrow y + 10 = 15$

$y = 5$

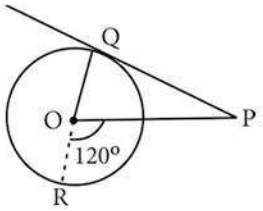
எனவே AD = x = 7 செ.மீ

BE = y = 5 செ.மீ

CF = z = 3 செ.மீ

4. O-வை மையமாக கொண்டு உடைய வட்டத்திற்கு P - யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடு PQ. QOR ஆனது விட்டம் ஆகும். வட்டத்தில் $\angle POR = 120^\circ$ எனில், $\angle OPQ$ - ஐக் காண்க.

தீர்வு :



OQ – ஆரம்; PQ என்பது வட்டத்தின் வெளியே உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு. தொடு புள்ளியில் ஆரமும் தொடுகோடும் செங்குத்து.

$\therefore \angle PQO = 90^\circ$

$\angle POQ = 180 - 120 = 60^\circ$

[$\because \angle POQ$ மற்றும் $\angle POR$ என்பவை நேரிய கோண இணை]

ΔPQO இல் $\angle POQ + \angle PQO + \angle OPQ = 180^\circ$

[$\because$ முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல்]

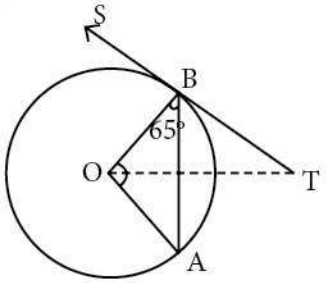
$60^\circ + 90^\circ + \angle OPQ = 180^\circ$

$\angle OPQ = 180^\circ - 150^\circ$

$\angle OPQ = 30^\circ$

5. தொடுகோடு ST வட்டத்தினை B என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது. $\angle ABT = 65^\circ$. AB என்பது ஒரு நாண் எனில், $\angle AOB$ - ஐ காண்க. இதில் "O" என்பது வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

தீர்வு :



வட்டத்தின் வெளியே உள்ள T என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடு TB ஆகும். OB-ஆரம்

$\therefore \angle OBT = 90^\circ$

மேலும் $\angle ABT = 65^\circ$ (கொடுக்கப்பட்டது)

$\therefore \angle OBA = \angle OBT - \angle ABT$

$= 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

$OA = OB$ [ஆரம்]

ΔABO ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம்.

$\therefore$ இருசமபக்க முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்.

$\therefore \angle OBA = \angle BAO = 25^\circ$

ΔAOB இல்

$\angle AOB + \angle OBA + \angle OAB = 180^\circ$

$\angle AOB + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$

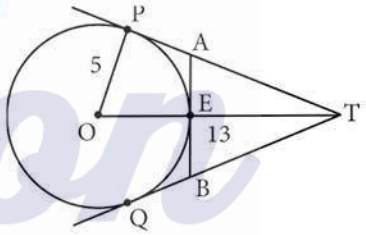
[முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180°]

$\angle AOB + 50^\circ = 180^\circ$

$\angle AOB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\therefore \angle AOB = 130^\circ$

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் O - வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் ஆரம் 5 செ.மீ ஆகும். T - யானது OT = 13 செ.மீ என அமைந்த ஒரு புள்ளி மற்றும் OT யானது வட்டத்தை E - யில் வெட்டுகிறது. வட்டத்தில் E என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தொடுகோடு AB எனில், AB - யின் நீளம் காண்க.



தீர்வு :

TP – தொடுகோடு; OP – ஆரம்.

$\angle OPT = 90^\circ$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி ΔOPT இல்,

$OT^2 = OP^2 + PT^2$

$13^2 = 5^2 + PT^2$

$PT^2 = 169 - 25$

$PT^2 = 144$

$PT = 12$ செ.மீ

வட்டத்தின் வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம்.

$\therefore AP = AE = x$

$\Rightarrow AT = PT - AP = (12 - x)$ செ.மீ

AB ஆனது E இல் தொடுகோடு

$\therefore OE \perp AB$

$\Rightarrow \angle OEA = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AET = 90^\circ$

$AT^2 = AE^2 + ET^2$

[பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி ΔAET இல்]

$(12 - x)^2 = x^2 + (13 - 5)^2$

$144 - 24x + x^2 = x^2 + 64$

$24x = 144 - 64$

$24x = 80$

$\Rightarrow \quad 3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

மேலும் $BE = \frac{10}{3}$ செ.மீ

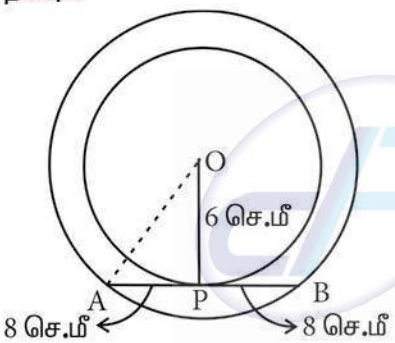
$\therefore \quad AB = AE + BE$

$= \left(\frac{10}{3} + \frac{10}{3}\right)$ செ.மீ $= \frac{20}{3}$ செ.மீ

$AB = \frac{20}{3}$ செ.மீ

7. இரண்டு பொது மையவட்டங்களில், 16 செ.மீ நீளமுடைய பெரிய வட்டத்தின் நாணானது 6 செ.மீ ஆரமுள்ள சிறிய வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைந்தால், பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு :



பொது மைய வட்டங்களின் மையம் O என்க. APB என்பது16 செ.மீ நீளமுடைய பெரிய வட்டத்தின் நாண். அது சிறு வட்டத்தை P இல் தொட்டுச் செல்கிறது.

எனவே OP ⊥ AB. மேலும் P ஆனது AB இன் நடுப்புள்ளி.

$\therefore \quad AP = PB = 8$ செ.மீ

ΔOPA இல்,

$OA^2 = OP^2 + AP^2$ [பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

$OA^2 = 6^2 + 8^2$

$OA^2 = 36 + 64$

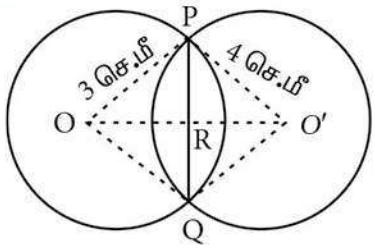
$OA^2 = 100$

$OA = 10$ செ.மீ

∴ பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ.

8. O மற்றும் O' - ஐ மையப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 3 செ.மீ மற்றும் 4 செ.மீ ஆகும். இவை இரண்டும் P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. OP மற்றும் $O'P$ ஆகியவை வட்டங்களின் இரு தொடுகோடுகள் எனில், பொது நாண் PQ -யின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



தொடுபுள்ளியில் தொடுகோடும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து ஆகும்.

$\therefore \angle OPO' = 90^\circ$

$\Delta OPO'$ இல்,

$OP^2 + O'P^2 = (OO')^2$ [பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

$3^2 + 4^2 = (OO')^2$

$9 + 16 = (OO')^2$

$25 = (OO')^2$

$OO' = 5$ செ.மீ

இரு வெட்டும் வட்டங்களின் ஆரங்களை இணைக்கும் கோடானது அவற்றின் பொது நாணுக்கு செங்குத்து ஆகும்.

$OR \perp PQ$ மற்றும் $O'R \perp PQ$

மேலும் $PR = QR$

$OR = x$ எனில், $O'R = 5 - x$

$PR = QR = y$ செ.மீ

ΔORP மற்றும் $\Delta O'RP$ இல்

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$OP^2 = OR^2 + RP^2$ மற்றும் $O'P^2 = O'R^2 + RP^2$

$3^2 = x^2 + y^2$ மற்றும் $4^2 = (5 - x)^2 + y^2$

கழிக்க $\Rightarrow 4^2 - 3^2 = \{(5 - x)^2 + y^2\} - (x^2 + y^2)$

$16 - 9 = 25 - 10x + x^2 + y^2 - x^2 - y^2$

$7 = 25 - 10x$

$10x = 25 - 7$

$10x = 18$

$\Rightarrow \quad x = 1.8$ செ.மீ

$3^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{9 - (1.8)^2} = \sqrt{5.76}$

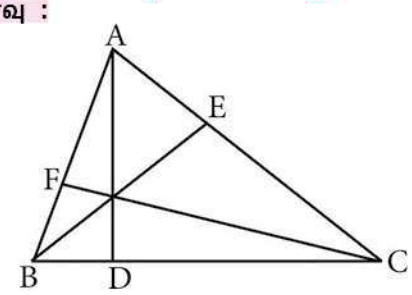
$y = 2.4$ செ.மீ

எனவே, $PR = QR = 2.4$ செ.மீ

$PQ = 2y = 4.8$ செ.மீ.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் கோண இருசம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



ΔABC இல் D, E, F என்பன $\angle A$, $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ இன் கோண இருசமவெட்டிகள்.

கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின்படி

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \frac{BD \times AC}{DC} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{FB} \Rightarrow AC = \frac{AF \times BC}{FB} \quad \ldots (2)$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{AE \times BC}{EC} \quad \ldots (3)$$

(1) மற்றும் (3) இலிருந்து,

$$\frac{BD \times AC}{DC} = \frac{AE \times BC}{EC} \quad \ldots (4)$$

(2) ஐ (4) இல் பிரதியிட,

$$\frac{BD \times \left(\frac{AF \times BC}{FB}\right)}{DC} = \frac{AE \times BC}{EC}$$

$$\frac{BD \times AF \times BC}{DC \times FB} = \frac{AE \times BC}{EC}$$

$$BD \times AF \times EC = \frac{AE \times BC \times DC \times FB}{BC}$$

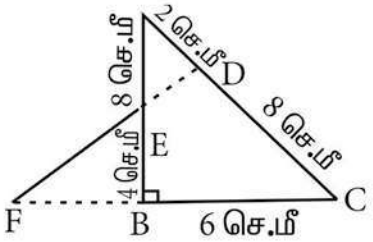
$$BD \times AF \times CE = EA \times FB \times DC$$

$$\therefore \frac{BD \times AF \times CE}{EA \times FB \times DC} = 1$$

எனவே சீவாஸ் தேற்றத்தின்படி முக்கோணத்தின் கோண இருசம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

10. ΔABC - யில் $\angle B = 90^\circ$, BC = 6 செ.மீ மற்றும் AB = 8 செ.மீ ஆகும். AD = 2 செ.மீ என்றவாறு AC - யின் மீதுள்ள புள்ளி D மற்றும் AB - யின் மையப்புள்ளி E ஆகும். DE -யின் நீட்சியானது CB - யின் நீட்சியை F -யில் சந்திக்கும் எனில், BF ஐக் காண்க.

தீர்வு :



கணக்கின்படி AB = 8 செ.மீ, AD = 2 செ.மீ

BC = 6 செ.மீ.; $AE = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ செ.மீ.

ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம்

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2$$

$$= 64 + 36 = 100$$

$$AC^2 = 100$$

$$AC = 10 \text{ செ.மீ.}$$

$$DC = AC - AD = 10 - 2 = 8 \text{ செ.மீ.}$$

ΔABC இல், D, E, F என்பன பக்கங்கள் CA, AB மற்றும் BC இல் அமைந்த புள்ளிகள்

அமைப்பு படி D, E, F ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்.

$\therefore$ மெனிலாஸ் தேற்றத்தின்படி

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{CD}{DA} = 1$$

$$\frac{4}{4} \times \frac{BF}{(FB + BC)} \times \frac{8}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \times \frac{BF}{FB + 6} \times 4 = 1$$

$$4BF = FB + 6$$

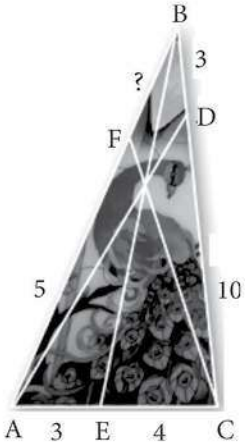
$$4FB - FB = 6$$

$$3BF = 6$$

$$BF = \frac{6}{3}$$

$$BF = 2 \text{ செ.மீ}$$

11. படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு முக்கோண வடிவக் கண்ணாடி ஜன்னலை முழுமையாக உருவாக்க ஒரு சிறிய கண்ணாடித்துண்டு ஒரு கலை நிபுணருக்குத் தேவைப்படும். மற்ற கண்ணாடி துண்டுகளின் நீளங்களைப் பொருத்து அவருக்குத் தேவையான கண்ணாடித் துண்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும்.



தீர்வு :

ΔABC இல் D, E, F என்பன கோடுகள். BC, CA, AB இல் அமைந்த புள்ளிகள்.

சீவாஸ் தேற்றத்தின்படி

$$\frac{AE}{EC} \times \frac{CD}{DB} \times \frac{BF}{FA} = 1 \qquad \ldots (1)$$

படத்திலிருந்து

AE = 3, EC = 4, CD = 10, DB = 3, FA = 5

(1) இல் மதிப்புகளை பிரதியிட

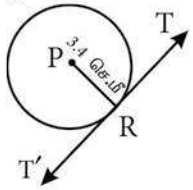
$$\frac{3}{4} \times \frac{10}{3} \times \frac{BF}{5} = 1$$

$$BF = \frac{1 \times 4 \times 3 \times 5}{3 \times 10} = 2 \text{ செ.மீ}$$

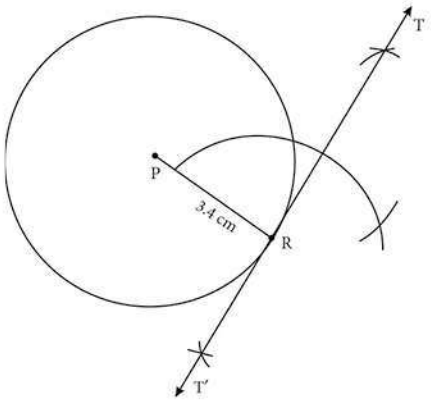
12. P ஐ மையமாகக் கொண்ட 3.4 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திற்கு R என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு வரைக.

தீர்வு :

ஆரம் = 3.4 செ.மீ



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: P ஐ மையமாகக் கொண்டு 3.4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: வட்டத்தின் மேல் R என்ற புள்ளியைக் குறித்து PR ஐ இணைத்தேன்.

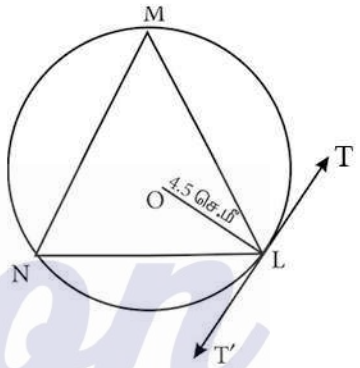
படி 3: R என்ற புள்ளி வழியே PR க்கு செங்குத்தாக TT' வரைந்தேன்.

படி 4: TT' ஆனது தேவையான தொடுகோடு ஆகும்.

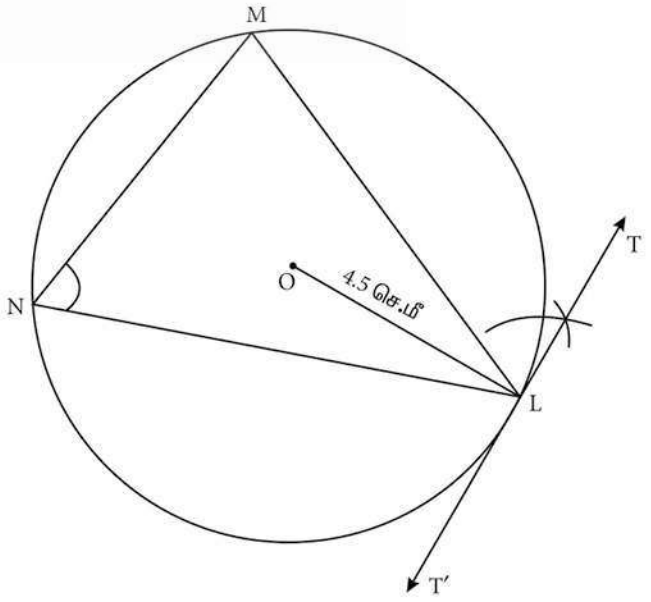
13. 4.5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்தித் தொடுகோடு வரைக.

தீர்வு :

ஆரம் = 4.5 செ.மீ



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

படி 1: O – வை மையமாகக் கொண்டு 4.5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: வட்டத்தின் மேல் L என்ற புள்ளியைக் குறித்தேன். L வழியே ஏதனும் ஒரு நாண்

LM வரைந்தேன்.

படி 3: L மற்றும் M – ஐ தவிர்த்து வட்டத்தின் மேல் N என்ற புள்ளியைக் குறித்தேன். L, M மற்றும் N என்பன கடிகார முள்ளோட்டத்தின் எதிர்த் திசையில் அமையுமாறு குறித்தேன். LN மற்றும் NM ஐ இணைத்தேன்.

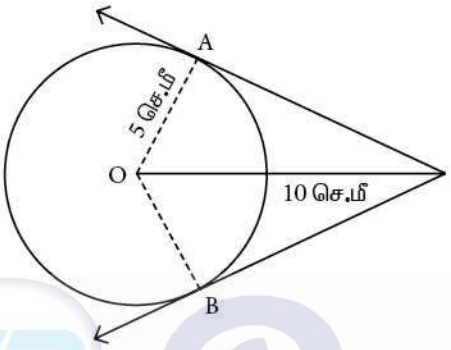
படி 4: $\angle TLM = \angle MNL$ என அமையுமாறு L வழியே TT' என்ற தொடுகோடு வரைந்தேன்.

படி 5: TT' என்பது தேவையான தொடுகோடு ஆகும்.

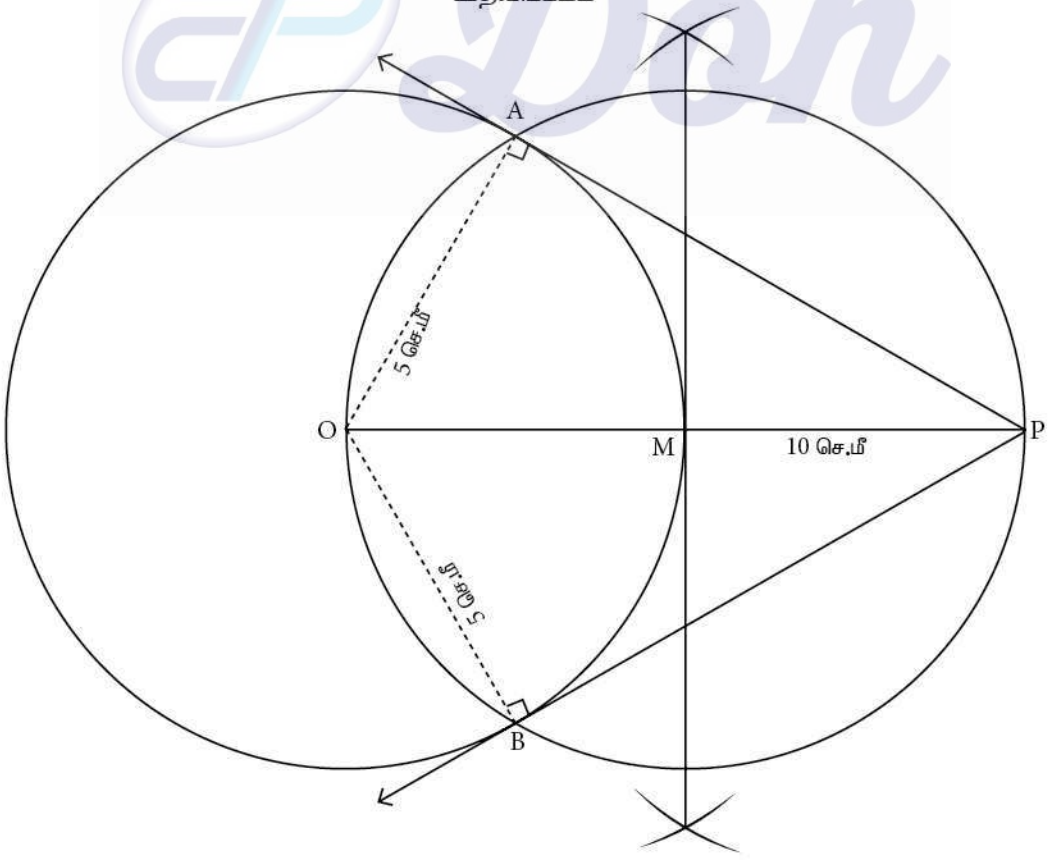
14. 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 10 செ.மீ தொலைவிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரையவும். மேலும் தொடுகோட்டின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஆரம் r = 5 செ.மீ



உதவிப்படம்



தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 8.7 செ.மீ

வரைமுறை:

படி 1: O வை மையமாகக் கொண்டு 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: 10 செ.மீ நீளமுள்ள OP என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 3: OP க்கு மையக் குத்துக்கோடு வரைந்தேன். அது OP – ஐ M இல் சந்திக்கும்.

படி 4: M ஐ மையமாகவும் MO வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை A மற்றும் B இல் சந்திக்கிறது.

படி 5: AP மற்றும் BP யை இணைக்கவும். AP மற்றும் BP தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும்.

தொடுகோடுகளின் நீளங்கள்
PA = PB = 8.7 செ.மீ

சரிபார்த்தல்: .

செங்கோண முக்கோணம் OPA இல்

$PA^2 = OP^2 - OA^2$

$= 10^2 - 5^2$

$= 100 - 25$

$PA^2 = 75$

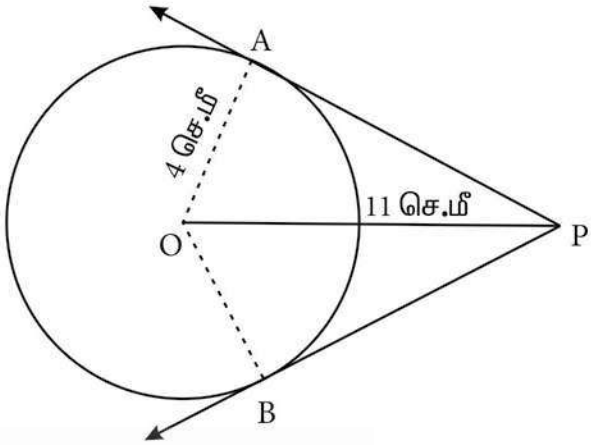
$PA = \sqrt{75}$

PA = 8.7 செ.மீ (தோராயமாக)

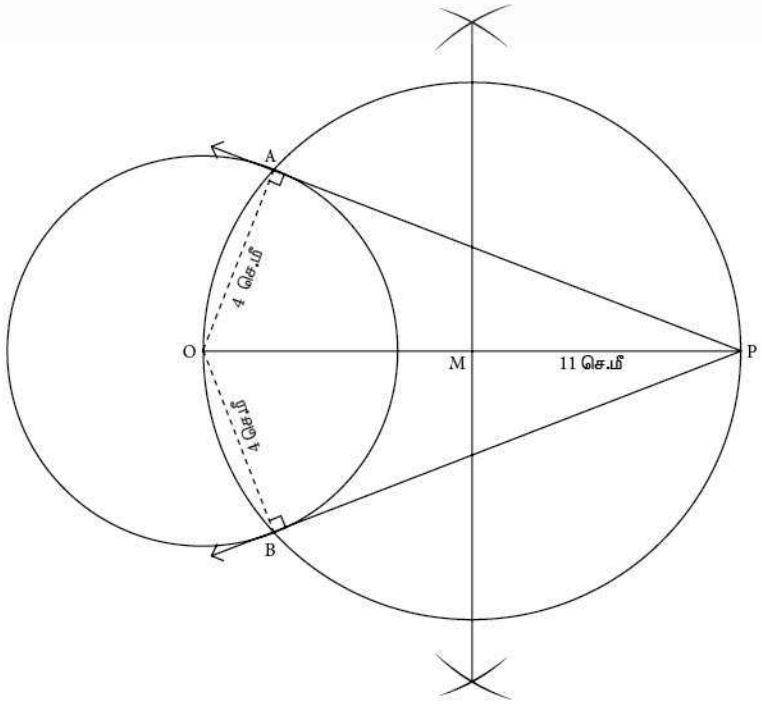
15. 4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 11 செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறித்து, அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரைக.

தீர்வு :

வட்டத்தின் ஆரம் = 4 செ.மீ



உதவிப்படம்



தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 10.2 செ.மீ

வரைமுறை:

படி 1: O வை மையமாகக்கொண்டு 4 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: 11 செ.மீ நீளமுள்ள OP என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 3: OP இக்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைந்தேன். அது OP ஐ M இல் சந்திக்கும்.

படி 4: Mஐ மையமாகவும் MO – வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை A மற்றும் B இல் சந்திக்கிறது.

படி 5: APமற்றும் BPஐ இணைத்தேன். APமற்றும் BP தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 10.2 செ.மீ

சரிபார்த்தல்:

செங்கோண முக்கோணம் OPA இல்

$PA^2 = OP^2 - OA^2$

$= 11^2 - 4^2$

$= 121 - 16$

$PA^2 = 105$

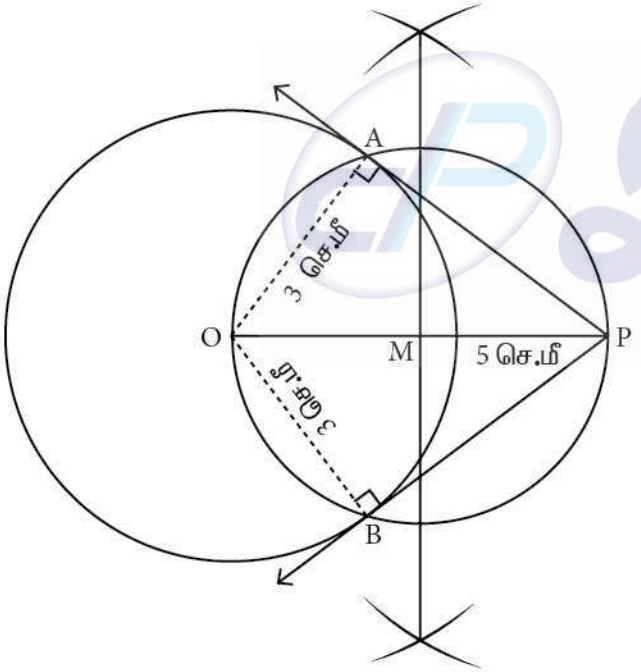
$PA = 10.2$ செ.மீ (தோராயமாக)

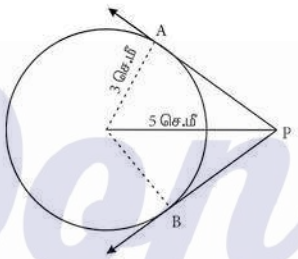
16. 6 செ.மீ விட்டமுள்ள வட்டம் வரைந்து வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 5 செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறித்க்கவும். அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைந்து, தொடுகோட்டின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

வட்டத்தின் விட்டம் $d = 6$ செ.மீ

$\therefore$ வட்டத்தின் ஆரம் $r = \frac{6}{2} = 3$ செ.மீ





உதவிப்படம்

தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 4 செ.மீ

வரைமுறை:

படி 1: O வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: 5 செ.மீ நீளமுள்ள OP என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 3: OP க்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைந்தேன். அது OP – ஐ M இல் சந்திக்கும்.

படி 4: M – ஐ மையமாகவும் MO –வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை A மற்றும் B இல் சந்திக்கிறது.

படி 5: AP மற்றும் BP –யை இணைத்தேன். AP மற்றும் BP தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 4 செமீ

சரிபார்த்தல்:

செங்கோண முக்கோணம் OPA இல்,

$PA^2 = OP^2 - OA^2$

$PA^2 = 5^2 - 3^2$

$= 25 - 9$

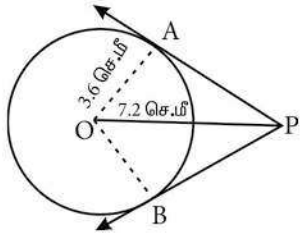
$PA^2 = 16$

$PA = 4$ செ.மீ (தோயமாக)

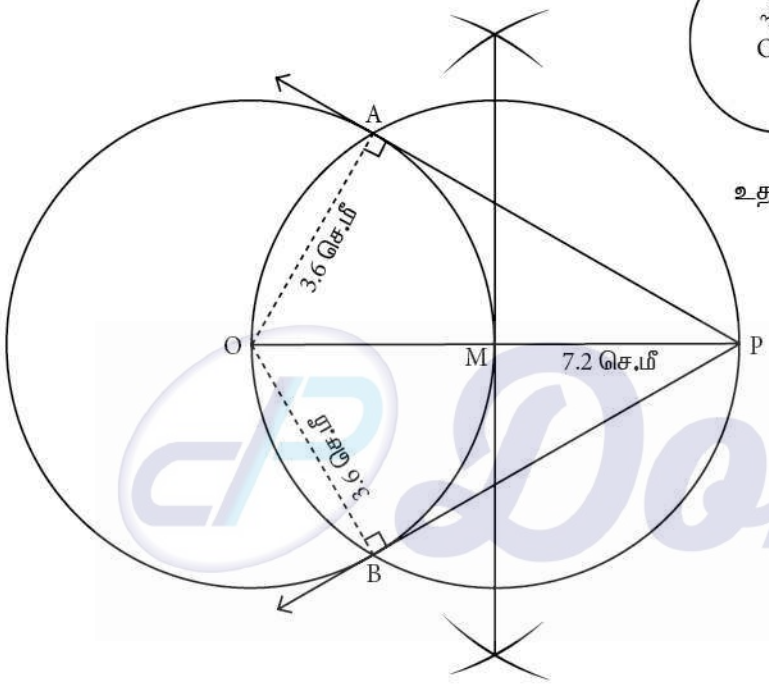
17. O -வை மையமாகக் கொண்ட 3.6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 7.2 செ.மீ தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைக.

தீர்வு :

ஆரம் r = 3.6 செ.மீ



உதவிப்படம்



தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 6.2 செ.மீ

வரைமுறை:

படி 1: O வை மையமாகக் கொண்டு 3.6 செ.மீ ஆரமுடைய வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: 7.2 செ.மீ நீளமுடைய OP என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 3: OP இக்கு மையக்குத்துக் கோடு வரைந்தேன். அது OP ஐ M இல் சந்திக்கும்.

படி 4: M ஐ மையமாகவும் MO – வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை A மற்றும் B இல் சந்திக்கிறது.

படி 5: AP மற்றும் BP ஐ இணைத்தேன். AP மற்றும் BP தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும்.

தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் PA = PB = 6.2 செ.மீ.

சரிபார்த்தல்:

செங்கோண முக்கோணம் OPA இல்,

$PA^2 = OP^2 - OA^2$

$= (7.2)^2 - (3.6)^2$

$= 51.84 - 12.96$

$PA^2 = 38.88$

$PA = \sqrt{38.88}$

PA = 6.2 செ.மீ (தோராயமாக)

பயிற்சி 4.5

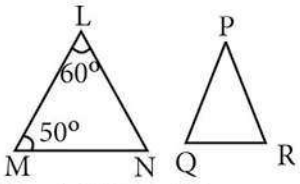
1. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD}$ எனில், முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் EDF எப்பொழுது வடிவொத்தவையாக அமையும்?

(1) $\angle B = \angle E$ (2) $\angle A = \angle D$
(3) $\angle B = \angle D$ (4) $\angle A = \angle F$ **[விடை: (3)]**

2. ΔLMN - யில் $\angle L = 60^\circ$, $\angle M = 50^\circ$. மேலும் $\Delta LMN \sim \Delta PQR$ எனில், $\angle R$ - யின் மதிப்பு

(1) 40° (2) 70°
(3) 30° (4) 110° **[விடை: (2)]**

தீர்வு :



$\Delta LMN \sim \Delta PQR$ எனில்

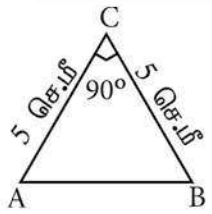
$\angle R = \angle N = 180 - (60 + 50)$

$= 180 - 110 = 70^\circ$

3. இருசமபக்க முக்கோணம் ΔABC - யில் $\angle C = 90^\circ$ மற்றும் AC = 5 செ.மீ எனில், AB ஆனது

(1) 2.5 செ.மீ (2) 5 செ.மீ
(3) 10 செ.மீ (4) $5\sqrt{2}$ செ.மீ **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

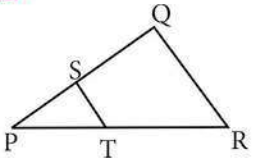


$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 5^2 + 5^2 = 50$

$AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ செ.மீ

4. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் ST || QR, PS = 2 செ.மீ மற்றும் SQ = 3 செ.மீ எனில், ΔPQR - யின் பரப்பளவுக்கும் ΔPST - யின் பரப்பளவுக்கும் உள்ள விகிதம்



(1) 25 : 4 (2) 25 : 7
(3) 25 : 11 (4) 25 : 13 **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

$$\left(\frac{PQ}{SP}\right)^2 = \frac{\Delta PQR \text{ இன் பரப்பு}}{\Delta PST \text{ இன் பரப்பு}}$$

$PQ = PS + SQ = 2 + 3 = 5$

$$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{(\Delta PQR) \text{ இன் பரப்பு}}{(\Delta PST) \text{ இன் பரப்பு}}$$

$$= \frac{25}{4} \Rightarrow 25 : 4$$

5. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ΔABC மற்றும் ΔPQR - யின் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ ஆகும். PQ = 10 செ.மீ எனில், AB -யின் நீளம்

(1) $6\frac{2}{3}$ செ.மீ (2) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ செ.மீ
(3) $66\frac{2}{3}$ செ.மீ (4) 15 செ.மீ **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ எனில்,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{\Delta ABC \text{ இன் சுற்றளவு}}{\Delta PQR \text{ இன் சுற்றளவு}}$$

AB + BC + CA = 36 செ.மீ

PQ + QR + PR = 24 செ.மீ

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24} \Rightarrow \frac{AB}{10} = \frac{36}{24}$$

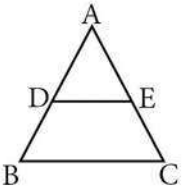
$$AB = \frac{36 \times 10}{24}$$

AB = 15 செ.மீ

6. ΔABC -யில் DE || BC. AB = 3.6 செ.மீ, AC = 2.4 செ.மீ மற்றும் AD = 2.1 செ.மீ எனில், AE - யின் நீளம்

(1) 1.4 செ.மீ (2) 1.8 செ.மீ
(3) 1.2 செ.மீ (4) 1.05 செ.மீ **[விடை: (1)]**

தீர்வு :



AE = x எனில், EC = 2.4 – x

AB = 3.6, AD = 2.1, ∴ DB = 3.6 – 2.1 = 1.5

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{2.1}{1.5} = \frac{x}{2.4 - x}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{x}{2.4 - x}$$

$$7[2.4 - x] = 5x$$

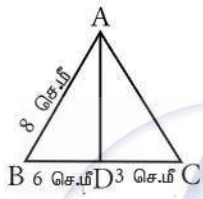
$$16.8 = 5x + 7x = 12x$$

$$x = \frac{16.8}{12} = 1.4 \text{ செ.மீ}$$

7. ΔABC - யில் AD ஆனது, $\angle BAC$ - யின் இருசமவெட்டி. AB = 8 செ.மீ, BD = 6 செ.மீ மற்றும் DC = 3 செ.மீ எனில், பக்கம் AC - யின் நீளம்

(1) 6 செ.மீ (2) 4 செ.மீ
(3) 3 செ.மீ (4) 8 செ.மீ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

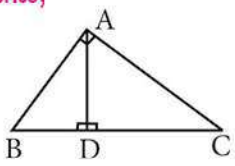


$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{8}{AC} = \frac{6}{3}$$

$$AC = \frac{8}{6} \times 3 = 4 \text{ செ.மீ}$$

8. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $\angle BAC = 90^\circ$ மற்றும் $AD \perp BC$ எனில்,

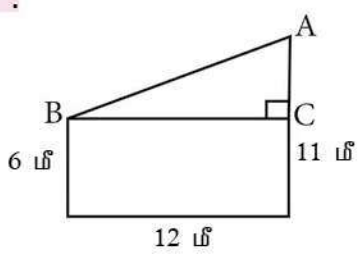


(1) $BD \cdot CD = BC^2$
(2) $AB \cdot AC = BC^2$
(3) $BD \cdot CD = AD^2$
(4) $AB \cdot AC = AD^2$ **[விடை: (3)]**

9. 6 மீ மற்றும் 11 மீ உயரமுள்ள இரு கம்பங்கள் சமதளத் தரையில் செங்குத்தாக உள்ளன. அவற்றின் அடிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு 12 மீ எனில் அவற்றின் உச்சிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு என்ன?

(1) 13 மீ (2) 14 மீ
(3) 15 மீ (4) 12.8 மீ **[விடை: (1)]**

தீர்வு :



$$AC = 11 - 6 = 5 \text{ மீ}$$

செங்கோண ΔABC இல்

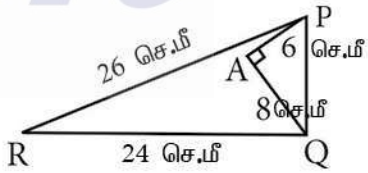
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2$$
$$= 144 + 25 = 169$$
$$AB = 13 \text{ மீ}$$

10. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், PR = 26 செ.மீ, QR = 24 செ.மீ, $\angle PAQ = 90^\circ$, PA = 6 செ.மீ மற்றும் QA = 8 செ.மீ எனில், $\angle PAQ$ - ஐக் காண்க.

(1) 80° (2) 85°
(3) 75° (4) 90° **[விடை: (4)]**



தீர்வு :



$$PQ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$
$$PQ = 10 \text{ செ.மீ}$$
$$\text{எனவே } PQ^2 + QR^2 = 10^2 + 24^2$$
$$= 100 + 576 = 676$$
$$= 26^2 = PR^2$$
$$\therefore \quad \angle PQR = 90^\circ$$

11. வட்டத்தின் தொடுகோடும் அதன் ஆரமும் செங்குத்தாக அமையும் இடம்

(1) மையம் (2) தொடு புள்ளி
(3) முடிவிலி (4) நாண் **[விடை: (2)]**

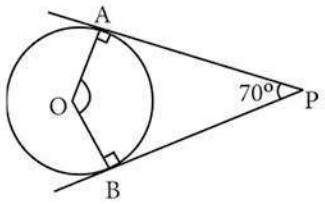
12. வட்டத்தின் வெளிப்புறப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு எத்தனை தொடுகோடுகள் வரையலாம்?

(1) ஒன்று
(2) இரண்டு
(3) முடிவற்ற எண்ணிக்கை
(4) பூஜ்ஜியம் **[விடை: (2)]**

13. O - வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு, வெளியேயுள்ள புள்ளி P - யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் PA மற்றும் PB ஆகும். $\angle APB = 70^\circ$ எனில், $\angle AOB$ - யின் மதிப்பு

(1) 100° (2) 110°
(3) 120° (4) 130° **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

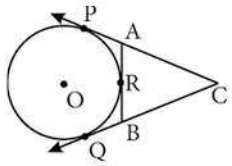


APBO என்ற நாற்கரத்தில்

$70^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle AOB = 360^\circ$

$\angle AOB = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$

14. படத்தில் O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் CP மற்றும் CQ ஆகும். ARB ஆனது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி R வழியாகச் செல்லும் மற்றொரு தொடுகோடு ஆகும். CP = 11 செ.மீ மற்றும் BC = 7 செ.மீ எனில், BR -யின் நீளம்



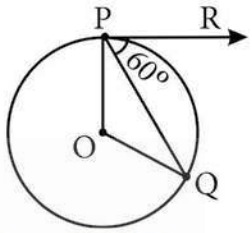
(1) 6 செ.மீ (2) 5 செ.மீ
(3) 8 செ.மீ (4) 4 செ.மீ **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

CP = 11 செ.மீ; BC = 7 செ.மீ

$\therefore$ CQ = 11 செ.மீ BQ = 11 – 7 = 4 செ.மீ = BR

15. படத்தில் உள்ளவாறு O - வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடு PR எனில், $\angle POQ$ ஆனது



(1) 120° (2) 100°
(3) 110° (4) 90° **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

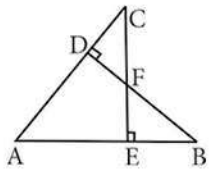
$60 \times 2 = 120^\circ$

அலகு பயிற்சி - 4

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $BD \perp AC$ மற்றும் $CE \perp AB$ எனில்,

(i) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (ii) $\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$

என நிருபிக்கவும்.



தீர்வு :

(i) ΔAEC மற்றும் ΔADB இல்

$\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$

$\angle CAE = \angle BAD$ [∵ பொதுக்கோணம்]

[AA விதிமுறைப்படி]

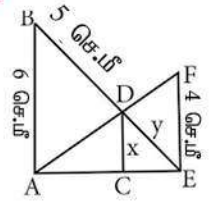
$\Delta AEC \sim \Delta ADB$

(ii) அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமம்.

$\therefore \quad \frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் AB || CD || EF. AB = 6 செ.மீ, CD = x செ.மீ, EF = 4 செ.மீ, BD = 5 செ.மீ மற்றும் DE = y செ.மீ எனில், x மற்றும் y - யின் மதிப்பு காண்க.



தீர்வு :

AB || CD || EF என தரப்பட்டுள்ளது.

AB = 6 செ.மீ, BD = 5 செ.மீ, EF = 4 செ.மீ,

CD = x செ.மீ, DE = y செ.மீ

ΔECD மற்றும் ΔEAB இல்

$\angle CED = \angle AEB$ [பொதுக்கோணம்]

$\angle ECD = \angle EAB$ [ஒத்த கோணங்கள்]

$\Delta ECD \sim \Delta EAB$

[AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி] ... (1)

$\therefore \quad \frac{EC}{EA} = \frac{CD}{AB}$

[∵ வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமம்]

$\frac{EC}{EA} = \frac{x}{6}$ ... (2)

ΔACD மற்றும் ΔAEF இல்

$\angle CAD = \angle EAF$ [பொதுக்கோணம்]

$\angle ACD = \angle AEF$ [ஒத்த கோணங்கள்]

$\Delta ACD \sim \Delta AEF$ [AA விதிமுறைப்படி]

$\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EF}$

[∴ வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமம்]

$\therefore \quad \frac{AC}{AE} = \frac{x}{4}$ ... (3)

$(2) + (3) \Rightarrow \frac{EC}{EA} + \frac{AC}{AE} = \frac{x}{6} + \frac{x}{4}$

$$\frac{EC + AC}{AE} = \frac{4x + 6x}{24}$$

$$\frac{AE}{AE} = \frac{10x}{24}$$

$$1 = \frac{10x}{24}$$

$$x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \text{ செ.மீ}$$

(1) இலிருந்து $\Delta ECD \sim \Delta EAB$

$$\frac{DC}{AB} = \frac{ED}{EB}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{5+y}$$

$$\Rightarrow \frac{12/5}{6} = \frac{y}{5+y} \quad \because x = \frac{12}{5}$$

$$\frac{12}{5 \times 6} = \frac{y}{5+y}$$

$$12(5 + y) = 30y$$

$$60 + 12y = 30y$$

$$60 = 30y - 12y$$

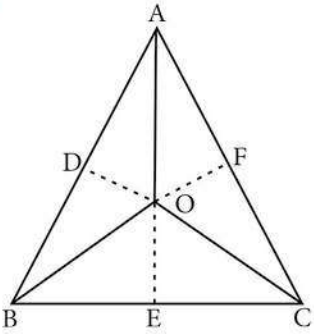
$$18y = 60$$

$$y = \frac{60}{18}$$

$$y = \frac{10}{3} \text{ செ.மீ}$$

3. O ஆனது முக்கோணம் ABC - யின் உள்ளே அமைந்த ஒரு புள்ளி ஆகும். $\angle AOB, \angle BOC$ மற்றும் $\angle COA$ -யின் இருசமவெட்டிகள், பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA -வை முறையே D, E மற்றும் F -ல் சந்திக்கின்றன எனில், AD × BE × CF = DB × EC × FA எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



ΔAOB இல், OD ஆனது $\angle AOB$ –ன் இருசமவெட்டி

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{DB} \quad \ldots (1)$$

ΔBOC இல், OE ஆனது $\angle BOC$ –ன் இருசமவெட்டி

$$\therefore \quad \frac{OB}{OC} = \frac{BE}{EC} \quad \ldots (2)$$

ΔCOA இல், OF ஆனது $\angle COA$ –ன் இருசமவெட்டி

$$\therefore \quad \frac{OC}{OA} = \frac{CF}{FA} \quad \ldots (3)$$

(1), (2) மற்றும் (3) இன் ஒத்த பக்கங்களை பெருக்க.

$$\frac{OA}{OB} \times \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OA} = \frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA}$$

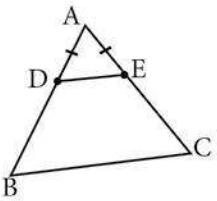
$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA}$$

$\Rightarrow$ DB × EC × FA = AD × BE × CF

$\Rightarrow$ AD × BE × CF = DB × EC × FA

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ABC - யில் AB = AC ஆகும். AD = AE என இருக்குமாறு D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் AC - யின் மீது அமைந்துள்ளன. B, C, E மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.



தீர்வு :

B, C, E மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்ட

$\angle ABC + \angle CED = 180^\circ$ மற்றும்

$\angle ACB + \angle BDE = 180^\circ$ எனக் காட்டினால் போதுமானது.

BCED என்ற நாற்கரத்தின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் என நிறுவ வேண்டும்.

ΔABC இல்

AB = AC மற்றும் AD = AE

$\Rightarrow$ AB – AD = AC – AE

$\Rightarrow$ DB = EC

எனவே AD = AE மற்றும் DB = EC

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$\Rightarrow$ DE || BC [$\because$ தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை படி]

$\Rightarrow$ $\angle ABC = \angle ADE$ [$\because$ ஒத்த கோணங்கள்]

$\Rightarrow$ $\angle ABC + \angle BDE = \angle ADE + \angle BDE$

[$\angle BDE$ ஐ இருபுறமும் கூட்ட]

$\Rightarrow$ $\angle ABC + \angle BDE = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle ACB + \angle BDE = 180^\circ$ ... (1)

[$\because$ AB = AC, $\angle ABC = \angle ACB$]

மேலும் DE || BC

$\Rightarrow$ $\angle ACB = \angle AED$

$\Rightarrow$ $\angle ACB + \angle CED = \angle AED + \angle CED$

[$\angle CED$ ஐ இருபுறமும் கூட்ட]

$\Rightarrow$ $\angle ACB + \angle CED = 180^\circ$

[$\because$ $\angle ABC = \angle ACB$]

$\Rightarrow$ $\angle ABC + \angle CED = 180^\circ$ ... (2)

(1) , (2) லிருந்து

BDEC ஆனது ஒரு நாற்கரம்

அதில் $\angle ACB + \angle BDE = 180^\circ$

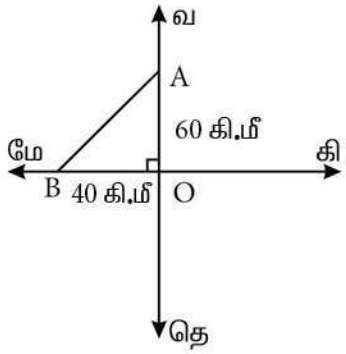
மற்றும் $\angle ABC + \angle CED = 180^\circ$

$\therefore$ BDCE ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

$\therefore$ B, C, E மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமையும்.

5. இரண்டு தொடர்வண்டிகள் ஒரே நேரத்தில் ஒரு தொடர்வண்டி நிலையத்திலிருந்து புறப்படுகின்றன. முதல் வண்டி மேற்கு நோக்கியும், இரண்டாவது வண்டி வடக்கு நோக்கியும் செல்கின்றன. முதல் தொடர்வண்டி 20 கி.மீ/மணி வேகத்திலும், இரண்டாவது வண்டி 30 கி.மீ/மணி வேகத்திலும் செல்கின்றன. இரண்டு மணி நேரத்திற்குப் பின்னர் அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு எவ்வளவு?

தீர்வு :



முதல் தொடர் வண்டி 2 மணி நேரத்தில் கடந்த தொலைவு $= 2 \times 20 = 40$ கி.மீ

இரண்டாவது தொடர் வண்டி 2 மணி நேரத்தில் கடந்த தொலைவு $= 2 \times 30 = 60$ கி.மீ

இந்த தூரங்களை OA , OB என்க.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 60^2 + 40^2$$
$$= 3600 + 1600$$
$$= 5200$$
$$AB = \sqrt{5200}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5 \times 5 \times 13}$$
$$= 2^2 \times 5\sqrt{13}$$
$$= 20\sqrt{13} \text{ கி.மீ}$$

∴ 2 மணி நேரத்திற்குப் பின் வண்டிகளுக்கிடைப்பட்ட தொலைவு

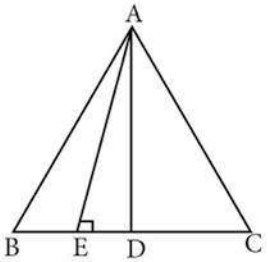
$= 20\sqrt{13}$ கி.மீ

6. BC - யின் மையப்புள்ளி D மற்றும் AE ⊥ BC BC = a, AC = b, AB = c, ED = x, AD = p மற்றும் AE = h எனில்,

(i) $b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ **(ii)** $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$

(iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$ **என நிரூபிக்க.**

தீர்வு :



$\angle AED = 90^\circ$ [$\because AE \perp BC$]

BC = a, AC = b, AB = c, ED = x, AD = p மற்றும் AE = h என தரப்பட்டுள்ளது.

(i) ΔAEC இல், பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$AC^2 = AE^2 + EC^2$$
$$AC^2 = AE^2 + (ED + DC)^2$$
$$AC^2 = AE^2 + ED^2 + DC^2 + 2 \cdot ED \cdot DC$$
$$AC^2 = (AE^2 + ED^2) + DC^2 + 2\,ED \cdot DC$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,ED \cdot DC$$
$$AC^2 = AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)DE$$

[$\because$ D ஆனது BC இன் மையப்புள்ளி, BD = DC]

$$AC^2 = AD^2 + BC \cdot DE + \frac{1}{4}BC^2 \quad \ldots (1)$$
$$b^2 = p^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$$
$$b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

(ii) ΔABC இல், $\angle AED = \angle AEB = 90^\circ$.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

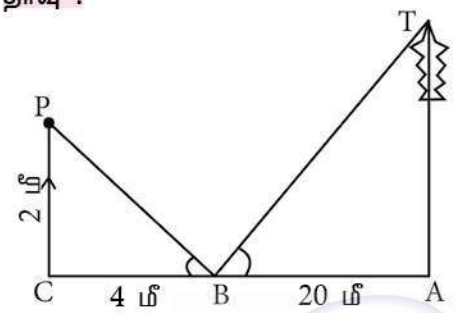
$$AB^2 = AE^2 + EB^2 \quad [\because AE^2 = AD^2 - DE^2]$$
$$= AD^2 - DE^2 + (BD - DE)^2$$
$$= AD^2 - DE^2 + BD^2 + DE^2 - 2\,BD \cdot DE$$
$$= AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DE$$
$$AB^2 = AD^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\,BC \cdot DE$$
$$AB^2 = AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 - BC \cdot DE$$
$$AB^2 = AD^2 - BC \cdot DE + \frac{1}{4}BC^2 \quad \ldots (2)$$
$$c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$$

(iii) (1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$AC^2 + AB^2 = AD^2 + BC \cdot DE + \frac{1}{4}BC^2 + AD^2 - BC \cdot DE + \frac{BC^2}{4}$$
$$= 2\,AD^2 + 2\left(\frac{BC^2}{4}\right)$$
$$AC^2 + AB^2 = 2\,AD^2 + \frac{BC^2}{2}$$
$$b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$$

7. 2 மீ உயரமுள்ள மனிதர் ஒரு மரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிட விரும்புகிறார். மரத்தின் அடியிலிருந்து 20 மீ தொலைவில் B என்ற புள்ளியில் ஒரு கண்ணாடி கிடைமட்டமாக மேல் நோக்கி வைக்கப்படுகிறது. கண்ணாடியிலிருந்து 4 மீ தொலைவில் C என்ற புள்ளியில் நிற்கும் மனிதர் மரத்தின் உச்சியில் பிரதிபலிப்பைக் கண்ணாடியில் காண முடிகிறது எனில், மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (மரத்தின் அடி, கண்ணாடி, மனிதர் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளதாகக் கொள்க).

தீர்வு :



CP ஆனது 2 மீ உயரமுள்ள மனிதர் என்க.
AT என்பது மரத்தின் உயரம் என்க.
ΔCBP மற்றும் ΔABT இல்

$\angle C = \angle A = 90^\circ$

CA ⊥ PC மற்றும் CA ⊥ TA

$\angle CBP = \angle ABT$ [$\because \angle CBP$ என்பது $\angle ABT$ இன் எதிரொளிப்புக் கோணம்]

∴ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta CBP \sim \Delta ABT$

$$\therefore \quad \frac{CB}{AB} = \frac{BP}{BT} = \frac{CP}{AT}$$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CP}{AT}$$

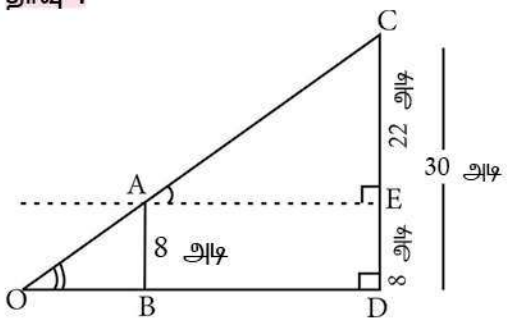
$$\frac{4}{20} = \frac{2}{AT}$$

$$AT = \frac{2 \times 20}{4} = 10 \text{ மீ}$$

∴ மரத்தின் உயரம் = 10 மீ.

8. 30 அடி உயரமுள்ள ஒரு தூணின் அடிப்பகுதியிலிருந்து 8 அடி உயரமுள்ள ஒரு ஈமு கோழி விலகி நடந்து செல்கிறது. ஈமு கோழியின் நிழல் அது நடந்து செல்லும் திசையில் அதற்கு முன் விழுகிறது. ஈமு கோழியின் நிழலின் நீளத்திற்கும், ஈமு தூணிலிருந்து இருக்கும் தொலைவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :



AB என்பது ஈமு என்க. ∴ AB = 8 அடி
CD என்பது தூண் = 30 அடி
OB – நிழல், BD –தூணுக்கும், ஈமுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம்
BD யிலிருந்து 8 அடி தூரத்தில் AE ∥ OD வரைக.

$\angle CAE = \angle AOB$ [ஒத்த கோணங்கள்]
$\angle OBA = \angle AEC = 90^\circ$

∴ AA விதிமுறைப்படி

$\Delta CEA \sim \Delta ABO$

$$\frac{CE}{AB} = \frac{EA}{BO}$$

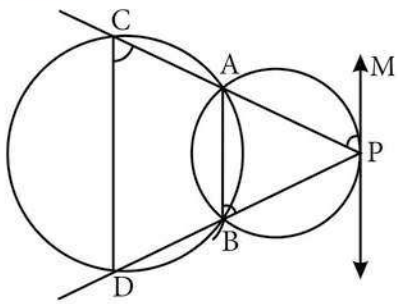
$$\frac{22}{8} = \frac{BD}{OB} \quad [\because EA = BD]$$

$$\frac{11}{4} = \frac{\text{தூரம்}}{\text{நிழல்}}$$

∴ நிழலின் நீளம் = $\frac{4}{11} \times$ தூரம்

9. A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளில் இரு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்கின்றன. ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி P - யிலிருந்து வரையப்படும் PAC மற்றும் PBD என்ற கோடுகள் இரண்டாவது வட்டத்தினை முறையே C மற்றும் D - யில் வெட்டுகின்றன எனில், CD - யானது P வழியே வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கு இணை என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :



MP ஆனது P இல் தொடுகோடு என்க. AB ஐ இணைக்க.

$\angle MPA = \angle PBA$ ... (1)

[மாற்று வட்டத்துண்டில் அமைந்த கோணங்கள்]

$\angle PBA = \angle ACD$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$\angle MPA = \angle ACD$

$\Rightarrow \angle MPC = \angle PCD$

இவை ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்.

$\therefore$ MP || CD

10. ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் AB, BC, AC -யின் (அல்லது பக்கங்களின் நீட்சி) மீது முறையே D, E, F என்ற புள்ளிகள் உள்ளன. AD : DB = 5 : 3, BE : EC = 3 : 2 மற்றும் AC = 21 எனில், கோட்டுத்துண்டு CF - யின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :

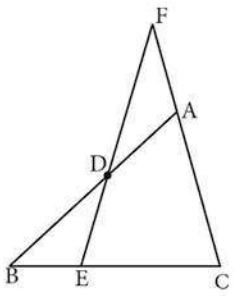
கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ΔABC இல் D, E, F என்பவை முறையே பக்கங்கள் AB, BC, AC இல் அல்லது அவற்றின் நீட்சியில் அமைந்த புள்ளிகள்.

AD : DB = 5 : 3;

BE : EC = 3 : 2.

$AD = 5k_1$; $DB = 3k_1$; $BE = 3k_2$; $EC = 2k_2$ என்க

மெனிலாஸ் தேற்றத்தின்படி



$$\frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} \times \frac{AD}{DB} = -1$$

$$\frac{3k_2}{2k_2} \times \frac{CF}{FC - AC} \times \frac{5k_1}{3k_1} = -1$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{CF}{FC - 21} \times \frac{5}{3} = -1$$

$$\frac{CF}{FC - 21} = \frac{-1 \times 2}{5}$$

$$\frac{CF}{(-CF) - 21} = \frac{-2}{5}$$

$5\,CF = -2\,[(-CF) - 21]$

$5CF = 2\,CF + 42$ [$\because FC = -CF$]

$5CF - 2CF = 42$

$3CF = 42$

$CF = \frac{42}{3} = 14$ அலகுகள்

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்

வடிவொத்த முக்கோணங்கள்:

1. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் ஒத்த பக்கங்கள் 4 : 9 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன எனில், அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம்

(1) 2 : 3 (2) 4 : 9

(3) 81 : 16 (4) 16 : 81 **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த வடிவங்களின் பரப்புகளின் விகிதம் = ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதம்.

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{81}\right)$$

விகிதம் = 16 : 81

2. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளாவன 9 செ.மீ^{2} மற்றும் 16 செ.மீ^{2}. அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதமானது

(1) 3 : 4 (2) 4 : 3

(3) 2 : 3 (4) 4 : 5 **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

(ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம்)^2 $= \frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2}$

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் $= \frac{3}{4}$

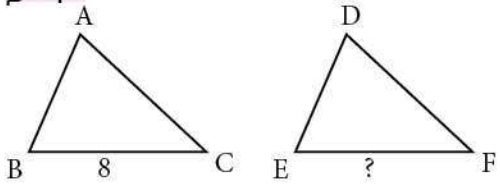
விகிதம் = 3 : 4

3. ΔABC மற்றும் ΔDEF ஆகியன வடிவொத்த முக்கோணங்கள். அதில் 2AB = DE மற்றும் BC = 8 செ.மீ எனில், EF = ?

(1) 16 செ.மீ (2) 12 செ.மீ

(3) 8 செ.மீ (4) 4 செ.மீ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ எனில்,

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

$2AB = DE;\ BC = 8$ செ.மீ

$$\therefore \quad \frac{AB}{2AB} = \frac{8}{EF}$$

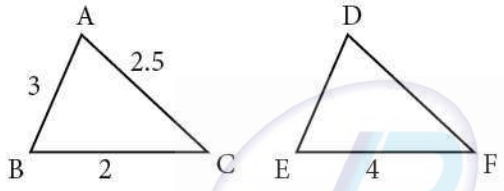
$EF = 8 \times 2$

$EF = 16$ செ.மீ

4. ΔABC இல் AB = 3 செ.மீ, BC = 2 செ.மீ மற்றும் CA = 2.5 செ.மீ. $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ மற்றும் EF = 4 செ.மீ, ΔDEF இன் சுற்றளவு

(1) 7.5 செ.மீ (2) 15 செ.மீ
(3) 22.5 செ.மீ (4) 30 செ.மீ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



ΔABC –ன் சுற்றளவு = AB + BC + CA

= 3 + 2 + 2.5

= 7.5 செ.மீ

$$\frac{\Delta ABC \text{ இன் சுற்றளவு}}{\Delta DEF \text{ இன் சுற்றளவு}} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

[$\because \quad \Delta ABC \sim \Delta DEF$]

$$\frac{7.5}{\Delta DEF \text{ இன் சுற்றளவு}} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ΔDEF –இன் சுற்றளவு = $2 \times 7.5 = 15$ செ.மீ

5. ΔABC உம் ΔDEF உம் வடிவொத்த முக்கோணங்கள். அதில் $\angle A = 47°$ மற்றும் $\angle B = 83°$ எனில், $\angle F$ =

(1) 50° (2) 60°
(3) 70° (4) 80° **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$\angle A = \angle D\ ;\ \angle B = \angle E\ ;\ \angle C = \angle F$

$\angle A = \angle D = 47°;\ \angle B = \angle E = 83°$

$\angle C = 180 - (\angle A + \angle B)$

$= 180° - (47° + 83°)$

$= 180° - 130°$

$= 50°$

$\therefore \quad \angle C = \angle F = 50°$

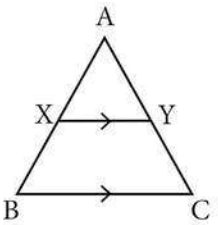
$\therefore \quad \angle F = 50°$

தேல்ஸ் தேற்றம் மற்றும் கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்:

6. ΔABC இல் XY ஆனது பக்கம் BC க்கு இணையாக வரையப்படுகிறது. அது AB யை x இலும் AC ஐ y இலும் சந்திக்கின்றது. AB = 4 BX மற்றும் YC = 2 செ.மீ எனில், AY =

(1) 2 செ.மீ (2) 4 செ.மீ
(3) 6 செ.மீ (4) 8 செ.மீ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :



$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$$ [தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி]

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{2}$$

$$\frac{AB - XB}{XB} = \frac{AY}{2}$$

$$\frac{4BX - BX}{BX} = \frac{AY}{2}$$

$$\frac{3BX}{BX} = \frac{AY}{2}$$

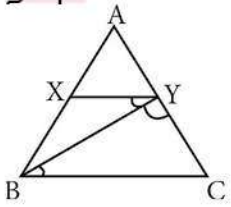
$AY = 2 \times 3$

$AY = 6$ செ.மீ

7. ΔABC இல் BC இக்கு இணையாக வரையப்படும் XY கோடானது AB ஐ X இலும் AC ஐ Y இலும் சந்திக்கின்றன. BY ஆனது $\angle XYC$ இன் இருசமவெட்டி எனில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மை?

(1) BC = CY (2) BC = BY
(3) BC ≠ CY (4) BC ≠ BY **[விடை : (1)]**

தீர்வு :



$XY \parallel BC$

$\angle XYB = \angle YBC$ ... (1)

[$\because$ ஒன்றுவிட்ட உட் கோணங்கள்]

YB ஆனது $\angle XYC$ இன் கோண இருசமவெட்டி

எனவே $\angle XYB = \angle BYC$ ... (2)

$\angle YBC = \angle BYC$ [$\because$ (1), (2) லிருந்து]

$\therefore$ BC = YC

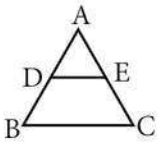
[$\because$ அடி கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள் சமம்.]

8. ΔABC இல் D மற்றும் E என்பவை $DE \parallel BC$ என்றவாறு முறையே பக்கம் AB மற்றும் AC மீது அமைந்த புள்ளிகள். மேலும் AD : DB = 3 : 1. EA = 3.3 செ.மீ எனில், AC =

(1) 1.1 செ.மீ (2) 4 செ.மீ

(3) 4.4 செ.மீ (4) 5.5 செ.மீ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :



$DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{3.3}{EC}$$

$$EC = \frac{3.3}{3}$$

$$EC = 1.1$$

$$AC = AE + EC$$

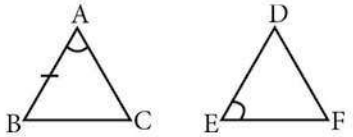
$$= 3.3 + 1.1 = 4.4 \text{ செ.மீ}$$

9. ΔABC இல் $\angle A = \angle E = 40^\circ$, AB : ED = AC : EF மற்றும் $\angle F = 65^\circ$ எனில், $\angle B$ =

(1) 35° (2) 65°

(3) 75° (4) 85° **[விடை : (3)]**

தீர்வு :



$$\angle A = \angle E = 40^\circ$$

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EF}$$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EDF$

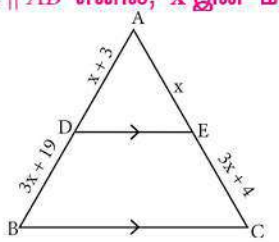
$\therefore \quad \angle F = \angle C = 65^\circ$

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$$

$$= 180^\circ - (\angle 40^\circ + \angle 65^\circ)$$

$$\angle B = \angle D = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

10. படத்தில் $DE \parallel AB$ எனில், x இன் மதிப்பு



(1) 4 (2) 1

(3) 3 (4) 2 **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

$DE \parallel AB$ என்பதால்

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ [தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி]

$$\frac{x+3}{3x+19} = \frac{x}{3x+4}$$

$$(x + 3)(3x + 4) = x(3x + 19)$$

$$3x^2 + 13x + 12 = 3x^2 + 19x$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

பிதாகரஸ் தேற்றம்:

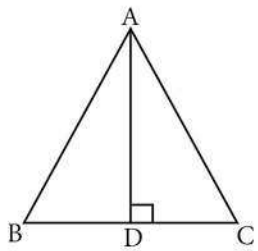
11. ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ABC இல் $AD \perp BC$ எனில், கீழ்க்கண்ட எது சரி?

(1) $2AB^2 = 3AD^2$ (2) $4AB^2 = 3AD^2$

(3) $3AB^2 = 4AD^2$ (4) $3AB^2 = 2AD^2$

[விடை: (3)]

தீர்வு :



AB = BC = AC மற்றும் $BD = DC = \frac{1}{2}$ BC

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

$$AB^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + AD^2$$

$$AB^2 = \frac{1}{4}BC^2 + AD^2$$

$$4AB^2 = BC^2 + 4AD^2$$

$$4AB^2 - BC^2 = 4AD^2$$

$$4AB^2 - AB^2 = 4AD^2 \quad [\because AB = BC]$$

$$3AB^2 = 4AD^2$$

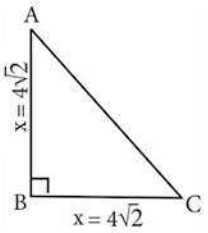
12. ஒரு இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்க அளவு $4\sqrt{2}$ செ.மீ எனில், அதன் கர்ணம்

(1) 12 செ.மீ (2) 8 செ.மீ

(3) $8\sqrt{2}$ செ.மீ (4) $12\sqrt{2}$ செ.மீ

[விடை : (2)]

தீர்வு :



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= x^2 + x^2$

$= 2x^2$

$= 2(4\sqrt{2})^2$

$= 2 \times 16 \times 2$

$AC^2 = 64$

$AC = 8$ செ.மீ

மாற்று முறை:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$

$= (16 \times 2) + (16 \times 2)$

$= 32 + 32$

$AC^2 = 64$

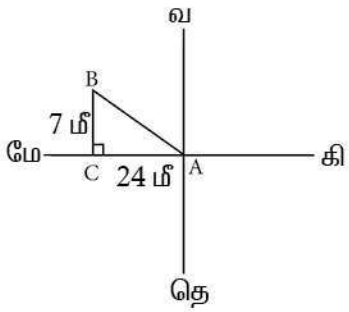
$AC = 8$ செ.மீ

13. ஒருவர் அவர் நின்ற இடத்திலிருந்து 24 மீ மேற்கு திசையில் நடந்த பின் 7 மீ வடக்கு திசை நோக்கி நடக்கிறார் எனில், அவர் நின்ற இடத்தில் இருந்து தற்போது நிற்கும் இடத்தின் தூரம் என்ன?

(1) 31 மீ (2) 17 மீ

(3) 25 மீ (4) 26 மீ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$AB^2 = 625$

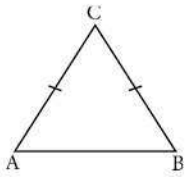
$AB = 25$ மீ

14. ΔABC என்ற இருசமபக்க முக்கோணத்தில் $AC = BC$ மற்றும் $AB^2 = 2AC^2$ எனில், $\angle C$ =

(1) 30° (2) 45°

(3) 90° (4) 60° **[விடை: (3)]**

தீர்வு :



$AB^2 = 2AC^2$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ [$\because AC = BC$]

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை படி

$\angle C = 90°$

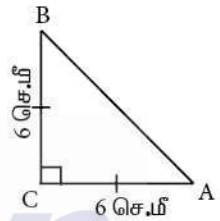
15. ΔABC என்ற இருசமபக்க முக்கோணத்தில் $\angle C = 90°$. மேலும் AC = 6 செ.மீ எனில், AB =

(1) $6\sqrt{2}$ செ.மீ (2) 6 செ.மீ

(3) $2\sqrt{6}$ செ.மீ (4) $4\sqrt{2}$ செ.மீ

[விடை : (1)]

தீர்வு :



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 6^2 + 6^2$

$= 36 + 36$

$= 72$

$AB = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ செ.மீ

வட்டங்களும் தொடுகோடுகளும் மற்றும் மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றம்:

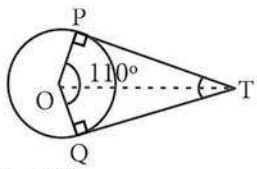
16. O வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் TP மற்றும் TQ என்பன இரு தொடுகோடுகள். மேலும் $\angle POQ = 110°$ எனில், $\angle PTQ$ =

(1) 60° (2) 70°

(3) 80° (4) 90° **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

POQT என்ற நாற்கரத்தில்



$\angle O = 110°$

$\angle P = 90°$

$\angle Q = 90°$

$\therefore \angle T = 360° - (110° + 90° + 90°)$

[$\because$ நாற்கரத்தின் நான்கு கோணங்களின் கூடுதல் 360°]

$= 360° - 290°$

$\angle T = 70°$

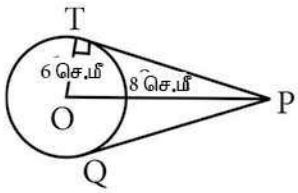
$\angle PTQ = 70°$

17. 6 செ.மீ ஆரமுடைய வட்ட மையத்திலிருந்து 8 செ.மீ தொலைவிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள்

(1) $\sqrt{7}$ செ.மீ (2) $2\sqrt{7}$ செ.மீ

(3) 10 செ.மீ (4) 5 செ.மீ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



$OP^2 = PT^2 + TO^2$

$8^2 = PT^2 + 6^2$

$64 - 36 = PT^2$

$PT^2 = 28$

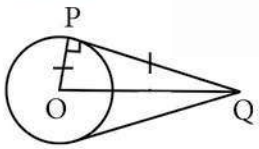
$PT = 2\sqrt{7}$ செ.மீ

18. O வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் P என்ற வெளிப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு PQ ஆகும். மேலும் ΔOPQ ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் எனில், $\angle OQP$ =

(1) 30° (2) 45°

(3) 60° (4) 90° **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



$\angle P = 90°$

[$\because$ ஆரம் $\perp$ தொடுகோடு]

$OP = PQ$

[ΔOPQ இரு சமபக்க Δ]

$\Rightarrow \angle POQ = \angle PQO$

$\angle POQ + \angle PQO = 180° - \angle P$

$= 180° - 90° = 90°$

$\therefore \angle POQ = \angle PQO = \frac{1}{2} \times 90°$

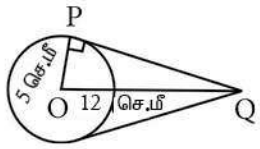
$\therefore \angle OQP = 45°$

19. 5 செ.மீ ஆரமுடைய வட்டத்திற்கு P என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடானது O வழியாக வரையப்படும் நேர்கோட்டை Q இல் OQ = 12 செ.மீ என்றவாறு சந்திக்கிறது எனில், PQ =

(1) 12 செ.மீ (2) 13 செ.மீ

(3) 8.5 செ.மீ (4) $\sqrt{119}$ செ.மீ **[விடை : (4)]**

தீர்வு :



$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$ [பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

$12^2 = 5^2 + PQ^2$

$144 - 25 = PQ^2$

$PQ^2 = 119$

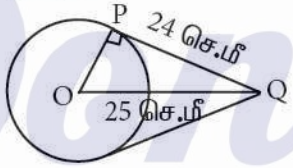
$PQ = \sqrt{119}$ செ.மீ

20. Q என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் 24 செ.மீ. வட்ட மையத்திலிருந்து Q ஆனது 25 செ.மீ தொலைவில் உள்ளது எனில், வட்டத்தின் ஆரம்

(1) 7 செ.மீ (2) 12 செ.மீ

(3) 15 செ.மீ (4) 24.5 செ.மீ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :



(ஆரம்)$^2 + 24^2 = 25^2$ [பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

(ஆரம்)$^2 + 576 = 625$

(ஆரம்)$^2 = 625 - 576$

$= 49$

(ஆரம்)$^2 = \sqrt{49}$

ஆரம் = 7 செ.மீ

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ΔABC மற்றும் ΔDEF என்ற இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே 81 செ.மீ^{2} மற்றும் 100 செ.மீ^{2} EF = 5 செ.மீ எனில், BC -இன் நீளம் காண்க.

தீர்வு :

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\frac{(\Delta ABC) \text{ இன் பரப்பு}}{(\Delta DEF) \text{ இன் பரப்பு}} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\frac{81}{100} = \frac{BC^2}{(5)^2}$$

$$\frac{BC}{5} = \frac{9}{10}$$

$$BC = \frac{9}{10} \times 5 = \frac{9}{2} \text{ செ.மீ}$$
$$= 4.5 \text{ செ.மீ}$$
$$\therefore \quad BC = 4.5 \text{ செ.மீ}$$

2. ΔPQR இன் பரப்பு 64 மீ². $\frac{PQ}{LM} = \frac{4}{5}$ மற்றும் $\Delta PQR \sim \Delta LMN$ எனில், ΔLMN இன் பரப்பளவு காண்க.

தீர்வு :

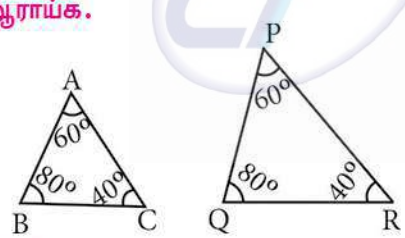
$\Delta PQR \sim \Delta LMN$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{(\Delta PQR) \text{ இன் பரப்பு}}{(\Delta LMN) \text{ இன் பரப்பு}} = \frac{PQ^2}{LM^2}$$

$$\frac{64}{(\Delta LMN) \text{ இன் பரப்பு}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \Delta LMN \text{ இன் பரப்பு} = \frac{64 \times 25}{16}$$
$$= 100 \text{ மீ}^2$$
ΔLMN இன் பரப்பு $= 100$ மீ²

3. கீழே தரப்பட்ட முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையா என ஆராய்க.



தீர்வு :

ΔABC மற்றும் ΔPQR இல்

$\angle A = \angle P = 60°$

$\angle B = \angle Q = 80°$

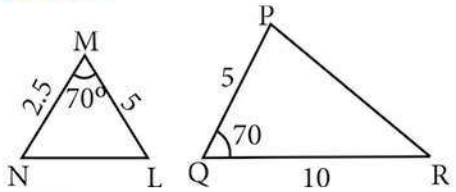
$\angle C = \angle R = 40°$

ஒத்த கோணங்கள் சமம்

AA விதிமுறைப்படி

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

4. கீழே தரப்பட்ட முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமையை சோதிக்கவும்.



தீர்வு :

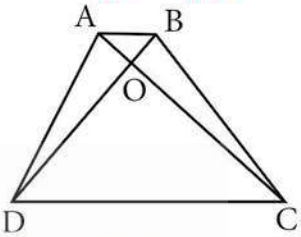
ΔMNL மற்றும் ΔQPR இல்

$$\frac{MN}{QP} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{ML}{QR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{ML}{QR} = \frac{MN}{QP}$$
$$\angle NML = \angle PQR$$

SAS வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta MNL \sim \Delta QPR$

5. ABCD என்ற சரிவகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD வெட்டும் புள்ளி O ஆகும். மேலும் AB || DC எனில், $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ என நிரூபி.



தீர்வு :

சாய்சதுரம் ABCD இல் AB || DC.

மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD, O –வில் வெட்டுகின்றன.

ΔOAB மற்றும் ΔOCD இல்

AB || DC

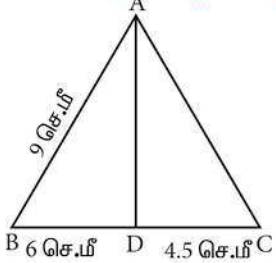
$\therefore \angle OBA = \angle ODC$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

$\angle OAB = \angle OCD$ (ஒன்றுவிட்ட உட்கோணங்கள்)

AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி

$\Delta OAB \sim \Delta OCD$

6. படத்தில் $\angle A$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டி AD ஆகும். BD = 6 செ.மீ, DC = 4.5 செ.மீ மற்றும் AB = 9 செ.மீ எனில், AC இன் மதிப்பு காண்க.



தீர்வு :

ΔABC இல் AD ஆனது $\angle A$ இன் இருசமவெட்டி

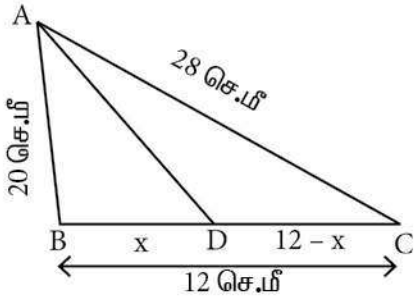
$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{6}{4.5} = \frac{9}{AC}$$

$$AC = \frac{9}{6} \times 4.5$$

$$AC = 6.75 \text{ செ.மீ}$$

7. படத்தில் $\angle BAC$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டி AD ஆகும். AB = 20 செ.மீ, AC = 28 செ.மீ மற்றும் BC = 12 செ.மீ எனில், BD மற்றும் DC காண்க.



தீர்வு :

BD = x செ.மீ,

DC = (12 – x) செ.மீ

AD ஆனது $\angle A$ இன் இருசமவெட்டி

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{20}{28} = \frac{x}{12-x}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{x}{12-x} \Rightarrow 5(12 - x) = 7x$$

$$60 - 5x = 7x$$

$$12x = 60$$

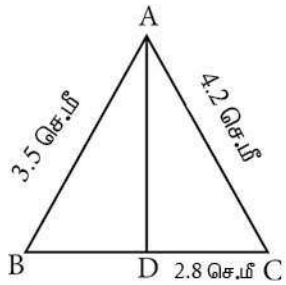
$$x = \frac{60}{12} = 5$$

BD = 5 செ.மீ

DC = 12 – 5 = 7 செ.மீ

8. ΔABC இல் $\angle A$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டி AD ஆனது BC யை D இல் சந்திக்கிறது. AB = 3.5 செ.மீ, AC = 4.2 செ.மீ மற்றும் DC = 2.8 செ.மீ எனில், BD காண்க.

தீர்வு :



AD ஆனது $\angle A$ இன் இரு சமவெட்டி

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{3.5}{4.2} = \frac{BD}{2.8}$$

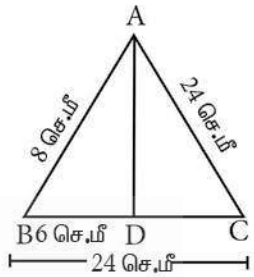
$$BD = \frac{3.5 \times 2.8}{4.2}$$

$$= \frac{0.70}{0.3} = \frac{7}{3} = 2.33$$

BD = 2.33 செ.மீ

9. ΔABC இல் AB = 8 செ.மீ, AC = 24 செ.மீ, BD = 6 செ.மீ மற்றும் BC = 24 செ.மீ எனில், AD ஆனது $\angle A$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டி ஆகுமா?

தீர்வு :



BC = 24 செ.மீ, BD = 6 செ.மீ

$\therefore$ DC = BC – BD

= 24 – 6 = 18 செ.மீ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

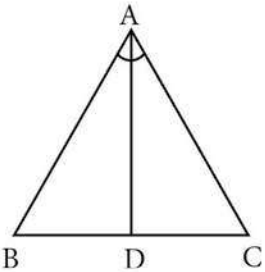
$$\frac{BD}{DC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$\therefore$ கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் மறுதலைபடி AD ஆனது $\angle A$ இன் கோண இருசமவெட்டி ஆகும்.

10. ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் உட்கோண இருசமவெட்டியானது அதன் எதிர்ப்பக்கத்தை இருசமக் கூறிடும் எனில், அம்முக்கோணம் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் என நிரூபி.

தீர்வு :



ΔABC இல் $\angle A$ இன் கோண இருசமவெட்டி. AD ஆனது BC ஐ இருசமபாகங்களாக பிரிக்கிறது.

நிரூபிக்க வேண்டியது: AB = AC

நிரூபணம்: ΔABC இல் AD ஆனது $\angle A$ இன் இருசமவெட்டி

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{AB}{AC} = 1$$

[$\because$ D ஆனது BC இன் நடுப்புள்ளி; BD = DC]

AB = AC.

$\therefore$ Δ ABC இருசமபக்க முக்கோணமாகும்.

11. கீழே தரப்பட்ட பக்கங்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் பக்கங்கள் ஆகுமா? என ஆராய்க.

(i) a = 6 செ.மீ, b = 8 செ.மீ மற்றும் c = 10 செ.மீ

(ii) a = 5 செ.மீ, b = 8 செ.மீ மற்றும் c = 11 செ.மீ

தீர்வு :

(i) a = 6 செ.மீ, b = 8 செ.மீ மற்றும் c = 10 செ.மீ

பெரிய பக்கம் c = 10 செ.மீ

$\therefore a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2$

$= 36 + 64 = 100$

$= (10)^2 = c^2$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகும்.

(ii) a = 5 செ.மீ, b = 8 செ.மீ மற்றும் c = 11 செ.மீ

பெரிய பக்கம் c = 11 செ.மீ

$a^2 + b^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64$

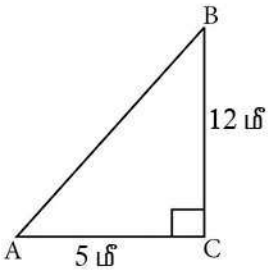
$a^2 + b^2 = 89$

ஆனால் $c^2 = 11^2 = 121$

$\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$ எனவே இந்த பக்கங்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்காது.

12. சுவரிலிருந்து 5 மீ தூரத்தில் அடிப்பக்கம் அமையுமாறு வைக்கப்பட்ட ஏணி 12 மீ உயரத்தில் உள்ள சன்னலைத் தொடுமாறு சாய்த்து வைக்கப்படுகிறது எனில் ஏணியின் நீளம் காண்க.

தீர்வு :



AB –ஏணி; B –சன்னல் என்க.

BC = 12 மீ மற்றும் AC = 5 மீ

ΔABC ஆனது $\angle C = 90^\circ$ என்றவாறு அமைந்த செங்கோண முக்கோணம்

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144$

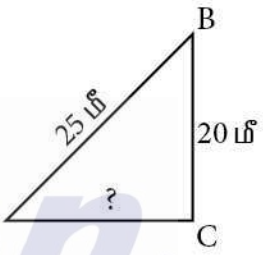
$AB^2 = 169$

AB = 13 மீ

எனவே ஏணியின் நீளம் 13 மீ.

13. 25 மீ நீளமுள்ள ஒரு ஏணியானது சுவரில் 20 மீ உயரத்தில் உள்ள சன்னலைத் தொடுமாறு சாய்த்து வைக்கப்படுகிறது எனில், ஏணியின் அடிப்பக்கத்திற்கும் சுவருக்கும் இடையில் உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :



AB –ஏணி; B –சன்னல்; CB – கட்டிடம் என்க.

இங்கு ΔABC ஆனது $\angle C = 90^\circ$ என்று அமைந்த செங்கோண முக்கோணமாகும்.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$(25)^2 = AC^2 + 20^2$

$625 = AC^2 + 400$

$AC^2 = 625 - 400$

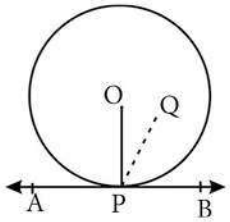
$AC^2 = 225$

AC = 15

எனவே ஏணியின் அடிப்பக்கமானது கட்டிடத்திலிருந்து 15 மீ தூரத்தில் உள்ளது.

14. தொடுபுள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிரூபி.

தீர்வு :



படத்தில் O வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB என்ற தொடுகோடு புள்ளி P வழியே செல்கிறது.

முடிந்தால் PQ ⊥ AB என்றவாறு 'O' வழிச் செல்லாத Q என்ற புள்ளியை கருதுக. தொடுபுள்ளியில் தொடுகோடானது ஆரத்திற்கு செங்குத்து.

$AB \perp OP$

$\angle OPB = 90^\circ$ ... (1)

அமைப்பின்படி

$AB \perp PQ \Rightarrow \angle QPB = 90^\circ$ ... (2)

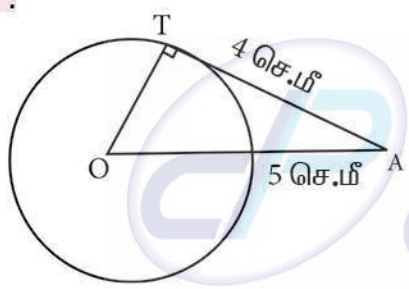
(1) , (2) இலிருந்து, $\angle QPB = \angle OPB$

∴ இது O மற்றும் Q ஒரே புள்ளியில் அமைந்தால் மட்டுமே சாத்தியம்.

∴ தொடுபுள்ளியில் தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக அமையும் கோடு வட்டமையம் வழிச் செல்லும்.

15. வட்ட மையத்திலிருந்து 5 செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் 4 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

தீர்வு :



தொடுபுள்ளியில் தொடுகோடானது வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு செங்குத்தாக அமையும்.

$\angle OTA = 90^\circ$

செங்கோண ΔOTA

$OA^2 = OT^2 + TA^2$

$5^2 = OT^2 + 4^2$

$OT^2 = 5^2 - 4^2$

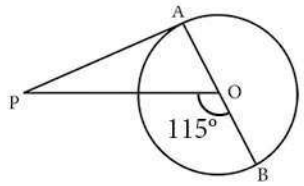
$= 25 - 16 = 9$

$OT = 3$

வட்டத்தின் ஆரம் = 3 செ.மீ.

16. படத்தில் P என்ற வெளிப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு PA. O வட்ட மையம் மற்றும் $\angle POB = 115^\circ$ எனில், $\angle APO$ காண்க.

தீர்வு :



இங்கு PA –தொடுகோடு; OA –ஆரம், தொடுபுள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரம் தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்து ஆகும்.

$OA \perp PA$

$\angle PAO = 90^\circ$

ΔOAP இல் $\angle POB$ வெளிக்கோணம்.

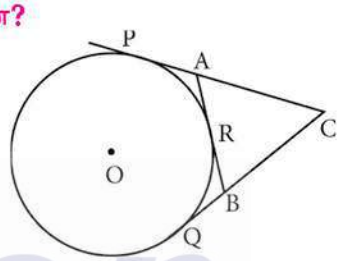
$\therefore \angle APO + \angle PAO = \angle POB$

$\angle APO + 90^\circ = 115^\circ$

$\angle APO = 115^\circ - 90^\circ = 25^\circ$

$\angle APO = 25^\circ$

17. படத்தில் CP மற்றும் CQ என்பன O வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள். ARB என்ற மற்றுமோர் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி R. மேலும் QC = 11 செ.மீ, BC = 7 செ.மீ எனில், BR என்ன?



தீர்வு :

வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம்.

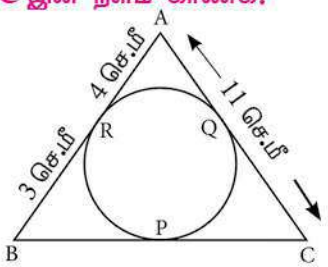
$BQ = BR$ மற்றும் $CQ = CP$

$\because BC + BQ = QC$

$7 + BR = 11 \quad [\because BQ = BR]$

$BR = 11 - 7 = 4$ செ.மீ

18. படத்தில், ΔABC இன் உள்வட்டம் தரப்பட்டுள்ளது எனில், BC இன் நீளம் காண்க.



தீர்வு :

வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம்.

$AR = AQ = 4$ செ.மீ

$BR = BP = 3$ செ.மீ

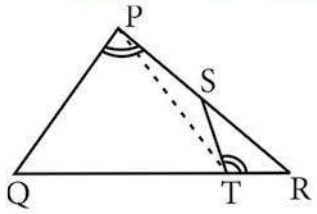
$PC = QC$

$QC = AC - AQ = 11 - 4 = 7$ செ.மீ

$BC = BP + PC = 3 + QC$

$= (3 + 7)$ செ.மீ $= 10$ செ.மீ.

19. ΔPQR இல் S மற்றும் T என்பன முறையே PR மற்றும் QR பக்கங்களின் மீது அமைந்த புள்ளிகள். $\angle P = \angle RTS$ எனில், $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ என நிரூபி.



தீர்வு :

T மற்றும் S முறையே QR மற்றும் PR மீது அமைந்த புள்ளிகள்.

$\angle RTS = \angle P$

ΔRPQ மற்றும் ΔRTS இல்

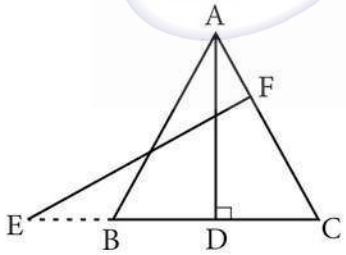
$\angle RPQ = \angle RTS$ (தரப்பட்டது)

$\angle PRQ = \angle TRS$ [பொதுக்கோணம்]

$\therefore$ AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி,

$\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

20. படத்தில் தரப்பட்ட ΔABC இல் $AB = AC$ பக்கம் CB இன் நீட்சியில் அமைந்த புள்ளி E. மேலும் $AD \perp BC$ மற்றும் $EF \perp AC$ எனில், $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ என நிரூபி.



தீர்வு :

ΔABC என்ற இருசமபக்க முக்கோணத்தில்

$AB = AC.$

ΔABD மற்றும் ΔECF இல்

$AB = AC$ (தரப்பட்டது)

$\Rightarrow$ அவற்றின் எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்.

$\therefore \angle ACB = \angle ABC$

$\angle ECF = \angle ABD$ ... (1)

$AD \perp BC$ மற்றும் $EF \perp AC$

$\angle ADB = \angle EFC = 90^\circ$ ... (2)

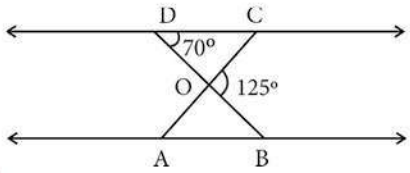
(1) மற்றும் (2) இலிருந்து

AA வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி

$\Delta ABD \sim \Delta ECF$

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. படத்தில் $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ மற்றும் $\angle CDO = 70^\circ$ எனில், $\angle DOC$, $\angle DCO$ மற்றும் $\angle OAB$ காண்க.



தீர்வு :

கணக்கின்படி $\angle BOC = 125^\circ$ மற்றும்

$\angle CDO = 70^\circ$

$\because \angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$

[நேரிய கோண இணை]

$\angle DOC = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ ... (1)

ΔDOC இல், முக்கோணத்தின் 3 கோணங்களின் கூடுதல் 180°.

$\angle DOC + \angle ODC + \angle DCO = 180^\circ$

$55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$

$\angle DCO = 180^\circ - 55^\circ - 70^\circ$

$\angle DCO = 55^\circ$ ... (2)

மேலும் $\Delta ODC \sim \Delta OBA$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமம்.

$\angle OCD = \angle OAB$

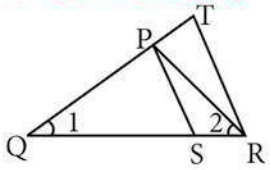
$= 55^\circ$ ... (3)

$\therefore$ (1), (2) இலிருந்து,

$\angle DOC = 55^\circ$, $\angle DCO = 55^\circ$ மற்றும்

$\angle OAB = 55^\circ$

2. படத்தில் $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ மற்றும் $\angle 1 = \angle 2$ எனில், $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ என்க் காட்டுக.



தீர்வு :

ΔPQR இல் $\angle 1 = \angle 2$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$PR = QP$ ... (1)

[$\because$ சம கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள் சமம்]

கணக்கின்படி $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து

$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$$

$$\frac{QS}{QR} = \frac{QP}{QT} \quad \ldots (3)$$

ΔPQS மற்றும் ΔTQR இல்

$$\frac{QS}{QR} = \frac{QP}{QT}$$

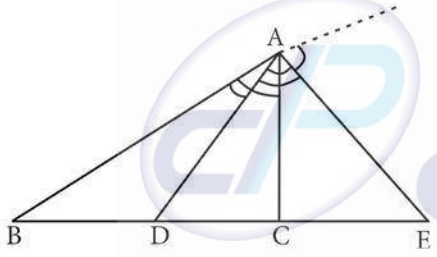
$\angle SQP = \angle RQT = \angle 1$ [(3) லிருந்து]

$\therefore$ SAS வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$

3. ΔABC இன் கோணம் $\angle A$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டி பக்கம் BC மற்றும் D இலும் வெளிக்கோண இருசமவெட்டி BC இன் நீட்சியை E இலும் சந்திக்கின்றன எனில், $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$ என நிருபி.

தீர்வு :



தரப்பட்டது: ΔABC இல் AD மற்றும் AE என்பவை முறையே A இல் அமைந்த உள் மற்றும் வெளிக்கோணங்களாகும்.

நிரூபிக்க வேண்டியது:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$$

நிரூபணம்: AD ஆனது $\angle A$ இன் கோண இருசமவெட்டி.
அது BC ஐ D ல் சந்திக்கிறது.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \ldots (1)$$

AE ஆனது $\angle A$ இன் வெளிக்கோண இருசமவெட்டி. அது BC ஐ E இல் சந்திக்கிறது.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} \quad \ldots (2)$$

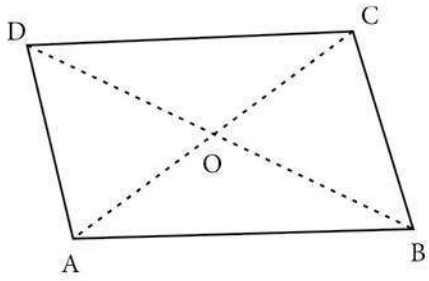
(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{CE}$$

$$\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$$

4. நாற்கரம் ABCD இன் மூலைவிட்டம் BD ஆனது $\angle B$ மற்றும் $\angle D$ இன் கோண இருசமவெட்டி எனில், $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ என நிரூபி.

தீர்வு :



தரப்பட்டது: நாற்கரம் ABCD இன் மூலைவிட்டம் BD ஆனது $\angle B$ மற்றும் $\angle D$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டி

நிரூபிக்க வேண்டியது: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

அமைப்பு: AC ஐ இணைக்கும் கோடு BD ஐ O வில் சந்திக்கிறது.

நிரூபணம்:

ΔABC இல், BO ஆனது $\angle B$ இன் இருசமவெட்டி

$$\frac{AO}{OC} = \frac{BA}{BC}$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{BC} \quad \ldots\ldots (1)$$

ΔADC இல், DO ஆனது $\angle D$ இன் இருசமவெட்டி

$$\frac{AO}{OC} = \frac{DA}{DC}$$

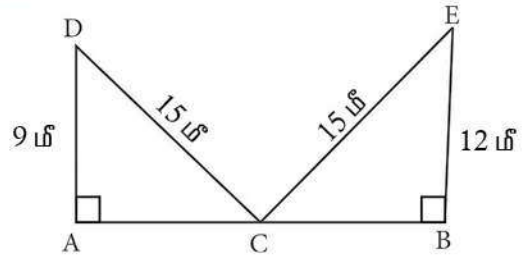
$$\frac{OA}{OC} = \frac{AD}{CD} \quad \ldots\ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

5. 15 மீ நீளமுள்ள ஒரு ஏணியானது, தரையிலிருந்து 9 மீ உயரத்தில் உள்ள ஒரு சன்னலை தெருவின் ஒரு பக்கத்திலும், அதே புள்ளியிலிருந்து தெருவின் மறுபக்கத்தில் உள்ள கட்டிடத்தில் 12 மீ உயரத்தில் உள்ள சன்னலையும் தொடுமாறு உள்ளது எனில், தெருவின் அகலம் என்ன?

தீர்வு :



AB என்பது தெருவின் அகலம் என்க. C என்பது ஏணியின் அடிப்பகுதி. D மற்றும் E என்பன தரையிலிருந்து 9 மீ மற்றும் 12 மீ உயரத்தில் அமைந்த சன்னல்கள்.

CD மற்றும் CE என்பன ஏணியின் இரு நிலைகள்.
AD = 9 மீ, BE = 12 மீ, CD = CE = 15 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔACD இல்

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$
$$15^2 = AC^2 + 9^2$$
$$AC^2 = 225 - 81 = 144$$
$$AC = 12 \text{ மீ}$$

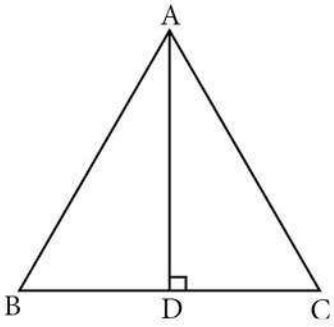
ΔBCE இல்

$$CE^2 = BC^2 + BE^2$$
$$15^2 = BC^2 + 12^2$$
$$BC^2 = 225 - 144 = 81$$
$$BC = 9 \text{ மீ}$$

தெருவின் அகலம் AB = AC + CB
= 12 + 9 = 21 மீ

6. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கத்தின் மூன்று மடங்கானது அம்முக்கோணத்தின் செங்குத்துக் கோட்டின் வர்க்கத்தின் நான்கு மடங்கிற்கு சமம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



ΔABC என்ற சமபக்க முக்கோணத்தில் AD ⊥ BC
ΔADB மற்றும் ΔADC இல்

$$AB = AC$$
$$\angle B = \angle C$$
மற்றும் $\angle ADB = \angle ADC$

∴ RHS விதிமுறைப்படி

$$\Delta ADB \cong \Delta ADC$$

$$BD = DC \quad [\because \text{சர்வசம முக்கோணங்களின் ஒத்த பாகங்கள் சமம்}]$$

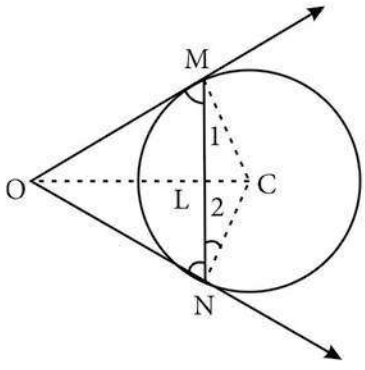
$$\Rightarrow BD = DC = \frac{1}{2} BC$$

ΔADB ஆனது $\angle D = 90°$ கொண்ட செங்கோண முக்கோணம்

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + \left(\frac{1}{2} BC\right)^2$$
$$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$$
$$AB^2 = AD^2 + \frac{AB^2}{4} \quad [\because BC = AB]$$
$$AD^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4}$$
$$= \frac{4AB^2 - AB^2}{4}$$
$$AD^2 = \frac{3AB^2}{4}$$
$$4AD^2 = 3AB^2$$

7. ஒரு வட்டத்திலுள்ள நாணின் முனைகளுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் அந்த நாணில் சம கோணங்களை உருவாக்கும் எனக் காட்டு.

தீர்வு :



C ஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் NM ஆனது நாண்.
M மற்றும் N இல் அமைந்த தொடுகோடுகள் O இல் சந்திக்கின்றன.

$\therefore \angle OMC = 90^\circ$

$\angle ONC = 90^\circ$

$\because$ CM = CN

ΔCMN இல் $\angle 1 = \angle 2$

[$\because$ சம பக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம்.]

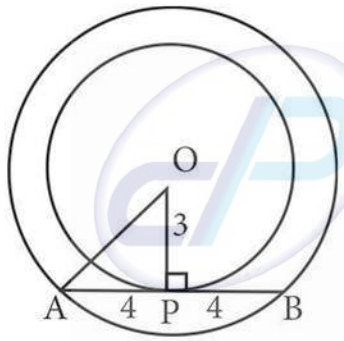
$\angle OMC - \angle 1 = \angle ONC - \angle 2$

$\angle OML = \angle ONL$

எனவே தொடுகோடுகள் நாணில் சம கோணங்களை உருவாக்கும்.

8. இரு பொது மைய வட்டங்களில் பொது வட்ட மையம் 'O'. பெரிய வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது சிறிய வட்டத்தை P இல் தொட்டுச் செல்கிறது. OP = 3 செ.மீ மற்றும் AB = 8 செ.மீ எனில், பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?

தீர்வு :



$\therefore$ AB ஆனது சிறிய வட்டத்தை P இல் தொடுகிறது.

$\therefore$ OP $\perp$ AB $\Rightarrow \angle OPA = 90^\circ$

AB ஆனது பெரிய வட்டத்தின் ஒரு நாண். வட்ட மையத்திலிருந்து வரையப்படும் ஆரம் தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்து.

$\therefore$ AB இன் நடுப்புள்ளி P

$$AP = \frac{8}{2} = 4 \text{ செ.மீ}$$

செங்கோண ΔAPO இல்

$AO^2 = OP^2 + AP^2$

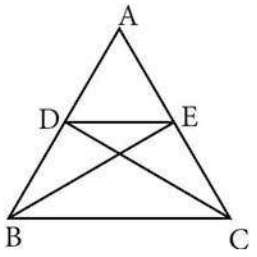
$AO^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$

$AO^2 = 25$

$AO = 5$ செ.மீ

$\therefore$ பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் = 5 செ.மீ

9. படத்தில் $\Delta ABE \cong \Delta ACD$, எனில் $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ எனக் காட்டுக.



தீர்வு :

$\Delta ABE \cong \Delta ACD$ என தரப்பட்டுள்ளது

$\therefore$ அவற்றின் ஒத்த பாகங்கள் சமம்.

AB = AC

AE = AD

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad [\because AE = AD] \quad \ldots (1)$$

ΔADE மற்றும் ΔABC இல்

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad [(1)\text{இலிருந்து}]$$

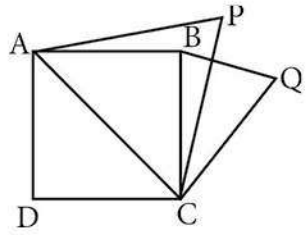
$\angle DAE = \angle BAC$ [பொதுவானது]

SAS வடிவொப்புமை விதிமுறைப்படி

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

10. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தில் உருவாகும் சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது அந்த சதுரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டத்தில் உருவாகும் சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவில் பாதியாகும் என நிரூபி.

தீர்வு :



சதுரம் ABCD இன் மூலைவிட்டம் AC.

சமபக்க முக்கோணம் BQC ஆனது BC என்ற பக்கத்தின் மேல் அமைந்துள்ளது. ΔAPC என்ற சமபக்க முக்கோணம், பக்கம் AC இன் மீது அமைந்துள்ளது.

$\therefore$ எல்லா சமபக்க முக்கோணங்களும் வடிவொத்தவை.

$\Delta APC \sim \Delta BQC$

$$\therefore \frac{(\Delta \text{APC}) \text{ இன் பரப்பளவு}}{(\Delta \text{BQC}) \text{ இன் பரப்பளவு}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \quad \ldots (1)$$

சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் $= \sqrt{2} \times$ பக்கம்

$$AC = \sqrt{2} \times BC \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து

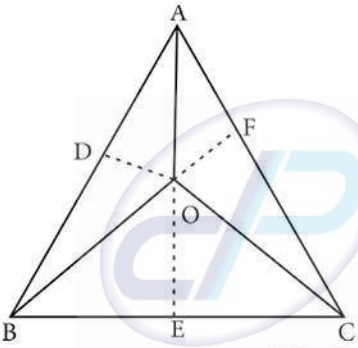
$$\frac{(\Delta APC) \text{ இன் பரப்பு}}{(\Delta BQC) \text{ இன் பரப்பு}} = \left(\frac{\sqrt{2}\,BC}{BC}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

$$\therefore (\Delta BQC) \text{ இன் பரப்பு} = \frac{1}{2} (\Delta APC) \text{ இன் பரப்பு}$$

11. ΔABC இன் உள்ளே அமைந்த புள்ளி O ஆகும். $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டிகள் முறையே AB, BC மற்றும் CA ஐ D, E மற்றும் F இல் சந்திக்கின்றன எனில், $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



ΔAOB இல், OD ஆனது $\angle AOB$ இன் கோண இருசமவெட்டி

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{DB} \quad \ldots (1)$$

ΔBOC இல், OE ஆனது $\angle BOC$ இன் கோண இருசமவெட்டி

$$\frac{OB}{OC} = \frac{BE}{EC} \quad \ldots (2)$$

ΔCOA இல், OF ஆனது $\angle COA$ இன் கோண இருசமவெட்டி

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CF}{FA} \quad \ldots (3)$$

(1), (2) , (3) இல் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த அளவுகளை பெருக்க.

$$\frac{OA}{OB} \times \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OA} = \frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA}$$

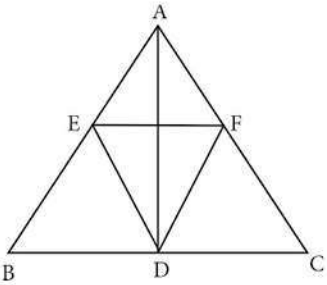
$$1 = \frac{AD}{DB} \times \frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA}$$

$$DB \times EC \times FA = AD \times BE \times CF$$

$$AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$$

12. ΔABC இல் AD என்பது நடுக்கோடு. $\angle ADB$ மற்றும் $\angle ADC$ இன் உட்கோண இருசமவெட்டிகள் AB மற்றும் AC ஐ E மற்றும் F இல் சந்திக்கின்றன எனில், $EF \parallel BC$ என நிரூபி.

தீர்வு :



ΔABC இல் AD என்பது நடுக்கோடு. $\angle ADB$ மற்றும் $\angle ADC$ இன் கோண இருசமவெட்டிகள் DE மற்றும் DF ஆனது AB மற்றும் AC ஐ E, F இல் சந்திக்கின்றன.

நிரூபிக்க வேண்டியது: $EF \parallel BC$

நிரூபணம்:

ΔADB இல், DE ஆனது $\angle ADB$ இன் கோண இருசமவெட்டி

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB} \quad \ldots (1)$$

ΔADC இல், DF ஆனது $\angle ADC$ இன் கோண இருசமவெட்டி

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$$

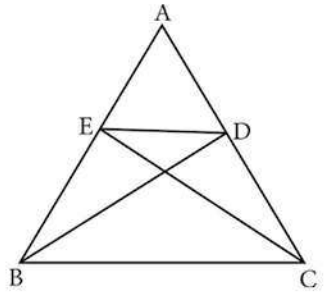
[$\because$ AD நடுக்கோடு, BD = DC] ... (2)

(1) , (2) இலிருந்து,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

13. ΔABC இன் $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ கோணங்களின் உட்கோண இருசமவெட்டிகள் எதிர்ப்பக்கங்களை D மற்றும் E இல் சந்திக்கின்றன. $DE \parallel BC$ எனில், அம்முக்கோணம் ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் என நிரூபி.

தீர்வு :



தரப்பட்டுள்ளது: ΔABC இல் $\angle B$ மற்றும் $\angle C$ இன் கோண இருசம வெட்டிகள் AC மற்றும் AB ஐ D மற்றும் E இல் சந்திக்கின்றன.

நிரூபிக்க வேண்டியது: AB = AC

அமைப்பு: DE ஐ இணைக்க.

நிரூபணம்: ΔABC இல், $\angle B$ இன் கோண இருசமவெட்டி BD

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \quad \ldots (1)$$

ΔABC இல், CE ஆனது $\angle C$ இன் கோண இருசமவெட்டி

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BE} \quad \ldots (2)$$

DE ∥ BC

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC} \text{ [தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி]} \quad \ldots (3)$$

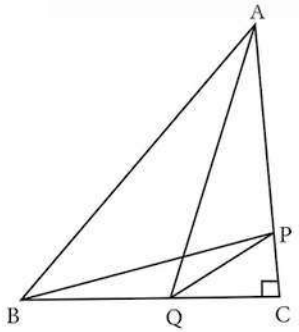
(1), (2) லிருந்து

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AB = AC$$

எனவே, ΔABC ஒரு இருசமபக்க முக்கோணமாகும்.

14. ΔABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $\angle C = 90^\circ$. P, Q என்பன CA மற்றும் CB பக்கங்களின் மீது அமைந்த புள்ளிகள் எனில், $AC^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$ என நிரூபி.

தீர்வு :



Δ ACQ, Δ PCB என்ற செங்கோண முக்கோணங்களில்,

$$AQ^2 = AC^2 + CQ^2 \text{ மற்றும்}$$

$$PB^2 = PC^2 + CB^2$$

$$\Rightarrow AQ^2 + BP^2 = (AC^2 + CQ^2) + (PC^2 + CB^2)$$

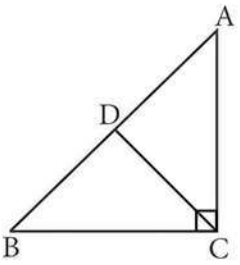
$$\Rightarrow AQ^2 + BP^2 = (AC^2 + BC^2) + (PC^2 + QC^2)$$

[பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி $AC^2 + BC^2 = AB^2$ மற்றும் $PC^2 + QC^2 = PQ^2$]

$$\therefore AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$$

15. Δ ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $\angle C = 90^\circ$ மற்றும் $AC = \sqrt{3}\,BC$ எனில், $\angle ABC = 60^\circ$ என நிரூபி.

தீர்வு :



AB இன் நடுப்புள்ளி D; CD ஐ இணைக்க.

ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம், $\angle ACB = 90^\circ$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = \left(\sqrt{3}\,BC\right)^2 + BC^2 \quad [\because AC = \sqrt{3}\,BC]$$

$$AB^2 = 3BC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4\,BC^2$$

$$AB = 2\,BC \quad \ldots(1)$$

ஆனால், $BD = \frac{1}{2}\,AB$

$$AB = 2\,BD \quad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) $\Rightarrow$ BD = BC

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியானது அதன் முனைகளிலிருந்து சம தொலைவில் இருக்கும்.

$$\therefore CD = AD = BD$$

$$\Rightarrow CD = BC$$

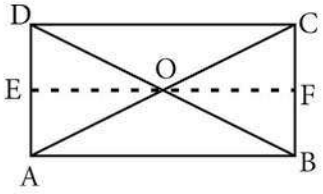
ΔABC இல் BD = CD = BC

$\therefore \Delta BCD$ ஒரு சமபக்க முக்கோணம்

$$\Rightarrow \therefore \angle ABC = 60^\circ$$

16. ABCD என்ற செவ்வகத்தின் உட்பகுதியில் அமைந்த புள்ளி O ஆனது A, B, C ,D என்ற உச்சிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $OB^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2$ என நிரூபி.

தீர்வு :



ABCD என்ற சதுரத்தின் உள் அமைந்த புள்ளி 'O'. OA, OB, OC மற்றும் OD ஐ இணைக்க.

O வழியாக EOF || AB வரைக. ABFE ஒரு செவ்வகம்.

செங்கோண ΔOEA மற்றும் ΔOFC இல்

$OA^2 = OE^2 + AE^2$ மற்றும் $OC^2 = OF^2 + CF^2$

$OA^2 + OC^2 = (OE^2 + AE^2) + (OF^2 + CF^2)$

$OA^2 + OC^2 = OE^2 + OF^2 + AE^2 + CF^2$ ... (1)

மேலும் செங்கோண ΔOFB மற்றும் ΔDOE இல்

$OB^2 = OF^2 + FB^2$ மற்றும் $OD^2 = OE^2 + DE^2$

$OB^2 + OD^2 = (OF^2 + FB^2) + (OE^2 + DE^2)$

$OB^2 + OD^2 = OE^2 + OF^2 + DE^2 + BF^2$

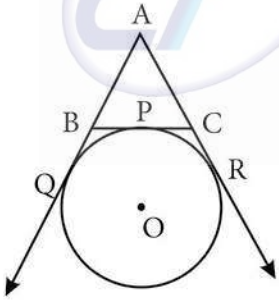
$OB^2 + OD^2 = OE^2 + OF^2 + CF^2 + AE^2$ ... (2)

[$\because$ DE = CF மற்றும் AE = BF]

(1) , (2) இலிருந்து, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

17. ΔABC இன் BC என்ற பக்கத்தை P இல் தொட்டுச் செல்லும் வட்டத்தினை AB மற்றும் BC இன் நீட்சிகள் Q மற்றும் R இல் சந்தித்தால் $AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC இன் சுற்றளவு) என நிரூபி.

தீர்வு :



வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.

$AQ = AR$ ... (1)

அதுபோல், $BQ = BP$ ... (2)

மற்றும் $CR = CP$ ... (3)

ΔABC இன் சுற்றளவு

$= AB + BC + AC$

$= AB + (BP + PC) + AC$

$= AB + (BQ + CR) + AC$ [(2) , (3) இலிருந்து]

$= (AB + BQ) + (CR + AC)$

$= AQ + AR$

$= AQ + AQ$ [(1) இலிருந்து]

$= 2\,AQ$

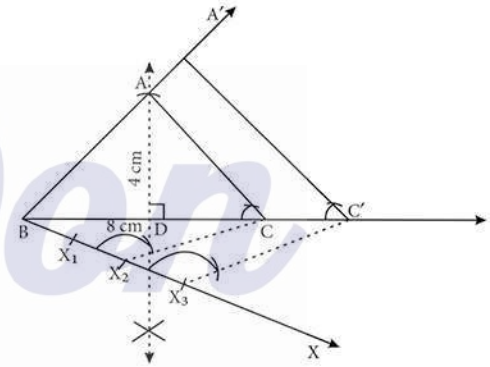
$AQ = \frac{1}{2}$ (ΔABC இன் சுற்றளவு)

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. அடிப்பக்கம் 8 செ.மீ மற்றும் குத்துயரம் 4 செ.மீ கொண்ட இருசம பக்க முக்கோணத்திற்கு ஒத்தப் பக்கங்களின் விகிதம் $1\frac{1}{2}$ என அமையுமாறு வடிவொத்த முக்கோணம் வரைக.

தீர்வு :

ABC என்ற இருசமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு $\frac{3}{2}\left(1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right)$ அளவுடைய ஒத்த பக்கங்களின் மற்றொரு முக்கோணம் அமைப்போம்.

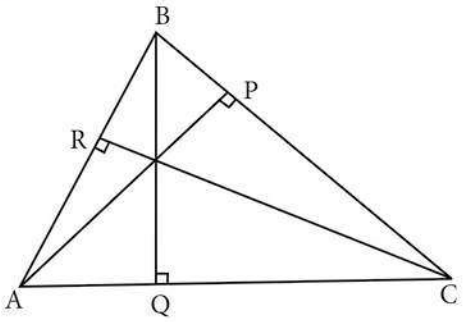


வரைதலின் படிகள்:

1. BC = 8 செ.மீ உள்ளவாறு கோடு வரைந்தேன்..
2. BC இக்கு வரைந்த குத்துக்கோடு BC ஐ D இல் வெட்டுகிறது.
3. DA = 4 செ.மீ என்றவாறு A என்ற புள்ளியை BC இக்கு மேல்பகுதியில் குறித்தேன்.
4. AB மற்றும் AC ஐ இணைக்க $\Delta ABCD$ கிடைத்தது.
5. $\angle CBX$ குறுங்கோணமாக அமையுமாறு BX என்ற கதிரை வரைந்தேன்.
6. BX இன் மேல் X_1, X_2, X_3 என்ற புள்ளிகளை $BX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$ என்றவாறு குறித்தேன்.
7. X_2 வை C உடன் இணைத்தேன்.
8. X_3 வழியாக X_2C இக்கு இணையாக வரையும் கோடு BC இன் நீட்சியை C' இல் சந்திக்கிறது.
9. C' வழியாக CA இக்கு வரையும் கோடு BA இன் நீட்சியை A' இல் சந்திக்கிறது. $\Delta A'BC'$ என்பது தேவையான முக்கோணமாகும்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் செங்குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிரூபி.

தீர்வு :



ΔABC இல், P, Q மற்றும் R என்பன A, B, C என்ற உச்சிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள்.

$\Delta BRC \sim \Delta BPA$

$\because \angle BRC = \angle BPA = 90^\circ$,

$\angle B$ பொதுவானது [$\therefore$ AA விதிமுறைப்படி]

$$\frac{BR}{BP} = \frac{BC}{BA} \quad \ldots (1)$$

அதுபோல் $\Delta AQB \sim \Delta ARC$

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{AP}{AC} \quad \ldots (2)$$

மற்றும் $\Delta CPA \sim \Delta CQB$

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{AC}{BC} \quad \ldots (3)$$

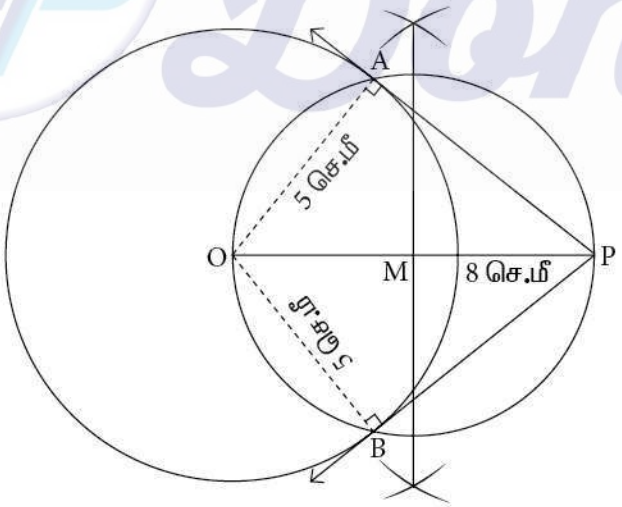
(1), (2), (3) ஐப் பெருக்க,

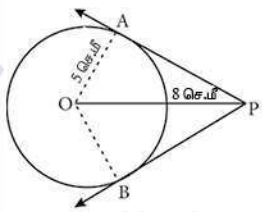
$$\frac{BR}{BP} \times \frac{AQ}{AR} \times \frac{CP}{CQ} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = 1$$

$\therefore$ சீவாஸ் தேற்றத்தின்படி செங்குத்துக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச்செல்லும்.

3. 5 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் மையத்திலிருந்து 8 செ.மீ தொலைவில் உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரைக.

தீர்வு :





உதவிப்படம்

AP = BP = 6.2 செ.மீ

வரைமுறை:

படி 1: 'O' வை மையமாகக் கொண்டு 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைந்தேன்.

படி 2: 8 செ.மீ நீளமுள்ள OP என்ற கோடு வரைந்தேன்.

படி 3: OP இக்கு வரையும் மையக்குத்துக் கோடு OP ஐ M இல் வெட்டுகிறது.

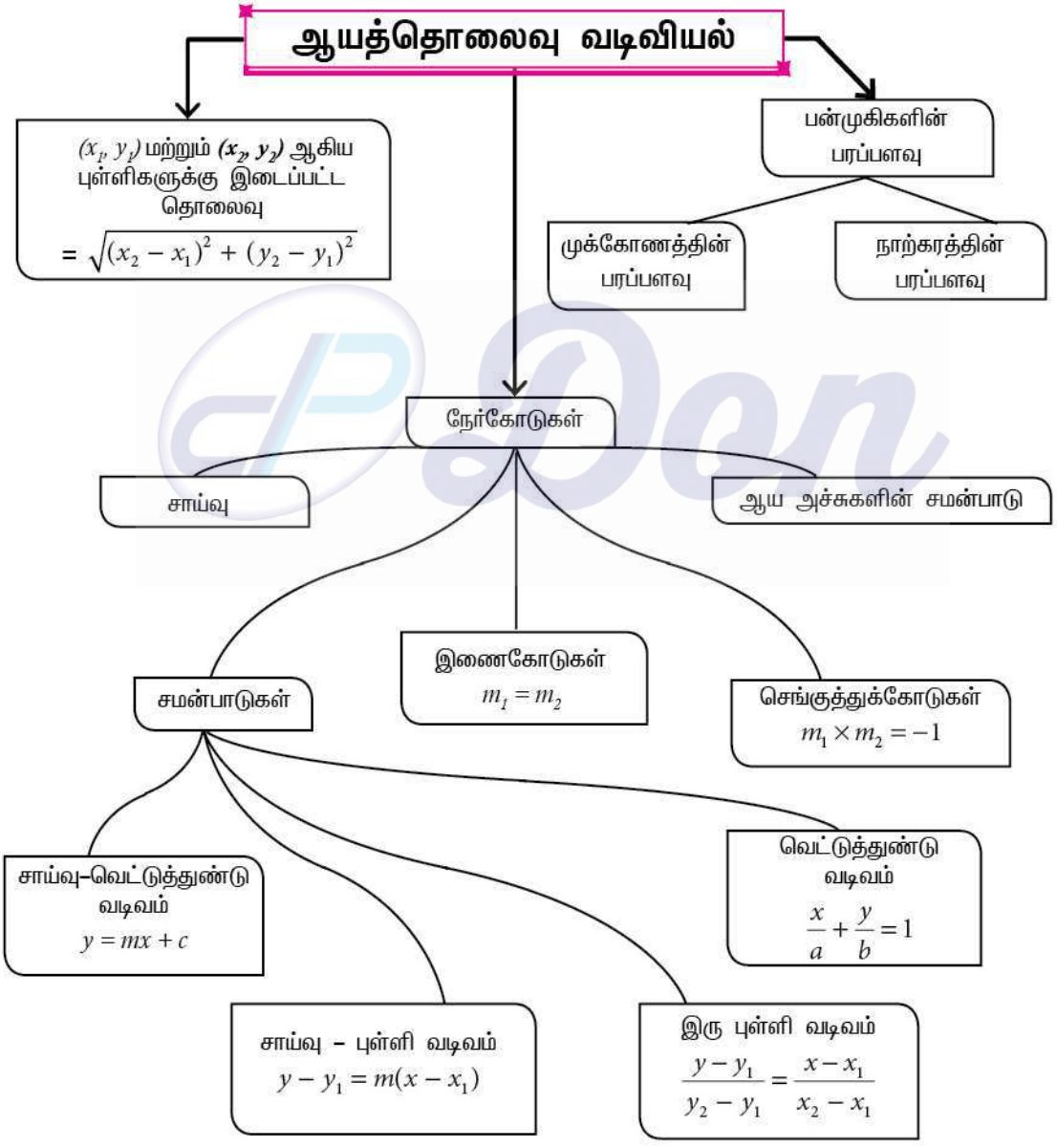
படி 4: M ஐ மையமாகவும், MO வை ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டமானது முந்தைய வட்டத்தை A மற்றும் B இல் சந்திக்கிறது.

படி 5: AP மற்றும் BP ஐ இணைக்கவும். AP மற்றும் BP தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும்.
தொடுகோட்டின் நீளம் = 6.2 செ.மீ.

அலகு 5

ஆயத்தொலைவு வடிவியல்

மன வரைபடம்



முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

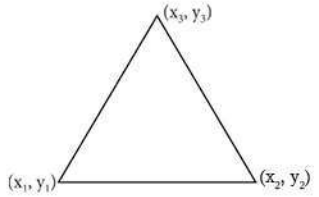
நினைவில் கொள்க

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

கொடுக்கப்பட்ட (x_1, y_1), (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) என்பனவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ சதுர அலகுகள்

(அல்லது) $\frac{1}{2} [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)]$ சதுர அலகுகள்



ஒரு கோட்டமை புள்ளிகளுக்கான நிபந்தனை

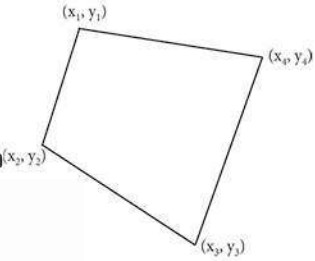
(x_1, y_1), (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) என்ற மூன்று வெவ்வேறான புள்ளிகள் ஒரே கோடமைவனவாக இருந்தால், அப்புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பூச்சியம்.

அதாவது, $x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$

நாற்கரத்தின் பரப்பு

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) மற்றும் (x_4, y_4) ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பளவு

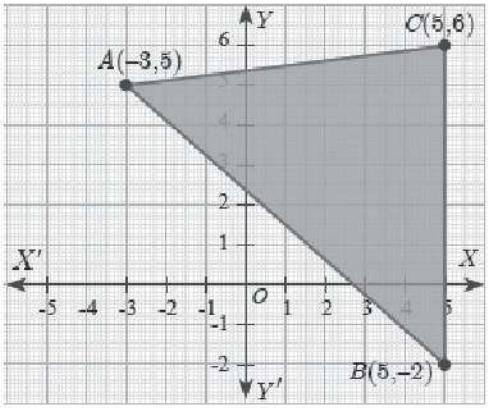
$= \frac{1}{2} [(x_1 - x_3) (y_2 - y_4) - (x_2 - x_4) (y_1 - y_3)]$ சதுர அலகுகள்.



எடுத்துக்காட்டு

5.1 **(–3, 5), (5, 6) மற்றும் (5, –2) ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.**

தீர்வு :



படத்தில், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைக் கடிகார முள்ளின் எதிர் திசையில் அமையுமாறு குறிக்கவும்.

A(–3, 5), B(5, – 2), C(5, 6) என்பன முக்கோணத்தின் முனைகள் என்க.

↓ ↓ ↓

(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

ΔABC -யின் பரப்பு

$= \frac{1}{2} \{(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)\}$

$= \frac{1}{2} \{(6 + 30 + 25) - (25 - 10 - 18)\}$

$= \frac{1}{2} \{61 + 3\}$

$= \frac{1}{2} (64) = 32$ சதுர அலகுகள்

5.2 **P(–1.5,3), Q(6,–2) மற்றும் R(–3,4) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.**

தீர்வு :

P(–1.5,3), Q(6,–2), R(–3,4) ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஆகும்.

ΔPQR -யின் பரப்பு

$= \frac{1}{2} \{(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)\}$

$= \frac{1}{2} \{(3 + 24 - 9) - (18 + 6 - 6)\}$

$= \frac{1}{2} \{18 - 18\} = 0$ சதுர அலகுகள்

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

5.3 A(–1, 2), B(k, – 2) மற்றும் C(7, 4) ஆகியவற்றை வரிசையான முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 22 சதுர அலகுகள் எனில், k-யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

A(–1, 2), B(k, – 2) மற்றும் C(7, 4) ஆகியன முனைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

ΔABC -யின் பரப்பு 22 சதுர அலகுகள்.

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 22$$

$$\frac{1}{2}\{(2 + 4k + 14) - (2k - 14 - 4)\} = 22$$

$$2k + 34 = 44$$

ஆகையால், $2k = 10$ எனவே, $k = 5$

5.4 P(–1, – 4), Q(b, c) மற்றும் R(5, – 1) என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் என்க. மேலும், $2b + c = 4$ எனில், b மற்றும் c -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

P(–1, –4), Q(b, c) மற்றும் R(5, –1) என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதால்

ΔPQR-யின் பரப்பு = 0

$$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(-c - b - 20) - (-4b + 5c + 1)\} = 0$$

$$-c - b - 20 + 4b - 5c - 1 = 0$$

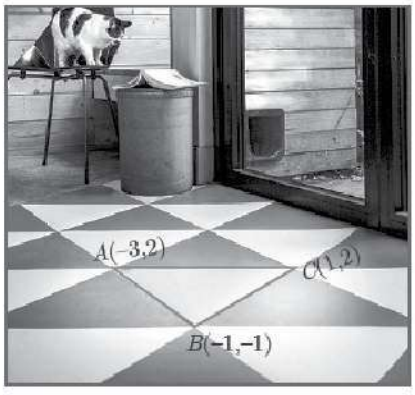
$$b - 2c = 7 \quad \ldots (1)$$

மேலும், $2b + c = 4$ ... (2) (கொடுக்கப்பட்டது)

(1) மற்றும் (2) -ஐ தீர்ப்பதன் மூலம் நாம் பெறுவது, $b = 3, c = -2$

5.5 ஓர் அறையின் தளமானது ஒரே மாதிரியான முக்கோண வடிவத் தரை ஓடுகளைக் கொண்டு (tiles) அமைக்கப்படுகிறது. அதில் ஓர் ஓட்டின் முனைகள் (– 3, 2), (– 1, – 1) மற்றும் (1, 2) ஆகும். தரைத்தளத்தை முழுமையாக அமைக்க 110 ஓடுகள் தேவைப்படுகின்றது எனில், அதன் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



ஓர் ஓட்டின் முனைப் புள்ளிகள் (– 3, 2), (– 1, – 1) மற்றும் (1, 2) ஆகும்.

இந்த ஓட்டின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(3 - 2 + 2) - (-2 - 1 - 6)\} \text{ சதுர அலகுகள்}$$

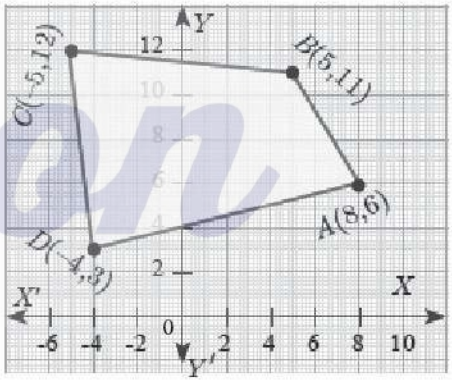
$$= \frac{1}{2}(12) = 6 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

தரைத்தளமானது ஒரே மாதிரியான 110 ஓடுகளால் நிரப்பப்படுவதால்,

தரைத்தளத்தின் பரப்பு = $110 \times 6 = 660$ ச. அலகுகள்

5.6 (8, 6), (5, 11), (– 5, 12) மற்றும் (– 4, 3) ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்பதற்கு முன்பாகக் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்க வேண்டும்.

A(8, 6), B(5, 11), C(– 5, 12) மற்றும் D(– 4, 3)

என்பன முனைப் புள்ளிகள் ஆகும். எனவே, நாற்கரம் ABCD- யின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\right\}$$

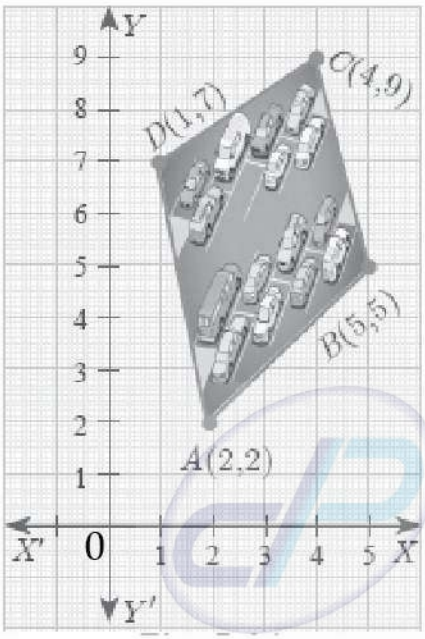
$$= \frac{1}{2}\{(88 + 60 - 15 - 24) - (30 - 55 - 48 + 24)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{109 + 49\}$$

$$= \frac{1}{2}\{158\}$$

= 79 சதுர அலகுகள்

5.7 கொடுக்கப்பட்ட படமானது ஒரு வளாகத்தில் புதிய வாகன நிறுத்தம் ஏற்படுத்த அமைக்கப்பட்ட பகுதியைக் காட்டுகிறது. இதை அமைப்பதற்கு ஒரு சதுர அடிக்கு ₹ 1300 செலவாகும் என மதிப்பிடப்படுகிறது எனில், வாகன நிறுத்தம் ஏற்படுத்துவதற்குத் தேவையான மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடவும்.



தீர்வு :

A(2, 2), B(5, 5), C(4, 9) மற்றும் D(1, 7) என்பது நாற்கர வடிவ வாகன நிறுத்தத்தின் முனைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

எனவே, வாகன நிறுத்தத்தின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\{(10 + 45 + 28 + 2) - (10 + 20 + 9 + 14)\}$

$= \frac{1}{2}\{85 - 53\}$

$= \frac{1}{2}(32)$

= 16 சதுர அடிகள்

எனவே, வாகன நிறுத்தத்தின் பரப்பு = 16 சதுர அடிகள்

ஒரு சதுர அடி அமைக்க ஆகும் செலவு = ₹ 1300

ஆகையால், வாகன நிறுத்தம் அமைக்க ஆகும் மொத்தச் செலவு = 16 × 1300 = ₹ 20800

முன்னேற்றச் சோதனை

1. அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்க.

வ எண்.	புள்ளிகள்	தொலைவு	நடுப் புள்ளி	உட்புறம்		வெளிப்புறம்	
				புள்ளி	விகிதம்	புள்ளி	விகிதம்
(i)	(3, 4), (5, 5)	...	...	...	2 : 3	...	2 : 3
(ii)	(−7, 13), (−3, 1)	...	...	$\left(-\frac{13}{3}, 5\right)$	...	(− 13, 15)	...

விடை: (i) (3, 4), (5, 5)

$$\text{தொலைவு} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(3-5)^2 + (4-5)^2}$$

$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ அலகுகள்}$$

$$\text{நடுப்புள்ளி} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+5}{2}\right) = \left(4, \frac{9}{2}\right)$$

உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி

$$= \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

$$= \left(\frac{2(5) + 3(3)}{2+3}, \frac{2(5) + 3(4)}{2+3}\right)$$

$$= \left(\frac{19}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி

$$= \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

$$= \left(\frac{2(5) - 3(3)}{2-3}, \frac{2(5) - 3(4)}{2-3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{-1}, \frac{-2}{-1}\right) = (-1, 2).$$

(ii) (– 7, 13), (– 3, 1)

தொலைவு $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(-7+3)^2 + (13-1)^2}$

$= \sqrt{16+144} = \sqrt{160}$

$= 4\sqrt{10}$ அலகுகள்.

நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-7-3}{2}, \frac{13+1}{2}\right) = (-5, 7)$

உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி விகிதத்தை k : 1 என்க.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி $\left(-\frac{13}{3}, 5\right)$

இப்போது, $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right) = \left(-\frac{13}{3}, 5\right)$

$\left(\frac{k(-3)+1(-7)}{k+1}, \frac{k(1)+1(13)}{k+1}\right) = \left(-\frac{13}{5}, 5\right)$

$\left(\frac{-3k-7}{k+1}, \frac{k+13}{k+1}\right) = \left(-\frac{13}{3}, 5\right)$

$\Rightarrow \frac{k+13}{k+1} = 5$

$k + 13 = 5k + 5$

$8 = 4k \Rightarrow 2 = k$

∴ விகிதம் 2 : 1

வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி விகிதத்தை k : 1 என்க.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி (– 13, 15)

இப்போது, $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right) = (-13, 15)$

$\left[\frac{k(-3)-1(-7)}{k-1}, \frac{k(1)-1(13)}{k-1}\right] = (-13, 15)$

$\Rightarrow \frac{k-13}{k-1} = 15$

$k - 13 = 15k - 15$

$15 - 13 = 15k - k$

$2 = 14k$

$k = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

∴ விகிதம் 1 : 7

2. A (0, 5), B (5, 0) மற்றும் C (–4, –7)-ஐ முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் _____.

விடை:

A (0, 5), B (5, 0) மற்றும் C (– 4, – 7)

முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$= \left(\frac{0+5-4}{3}, \frac{5+0-7}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

3. P (0, – 4), Q (3, 1) மற்றும் R (– 8, 1) என்பன ΔPQR-யின் முனைப் புள்ளிகள் எனில்

(i) வரைபடத்தாளில் ΔPQR -ஐ வரைக.

(ii) ΔPQR ஆனது சம பக்கம் உடையதா எனச் சோதிக்க.

(iii) ΔPQR -யின் பரப்பைக் காண்க.

(iv) QP-யின் மையம் M -யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க.

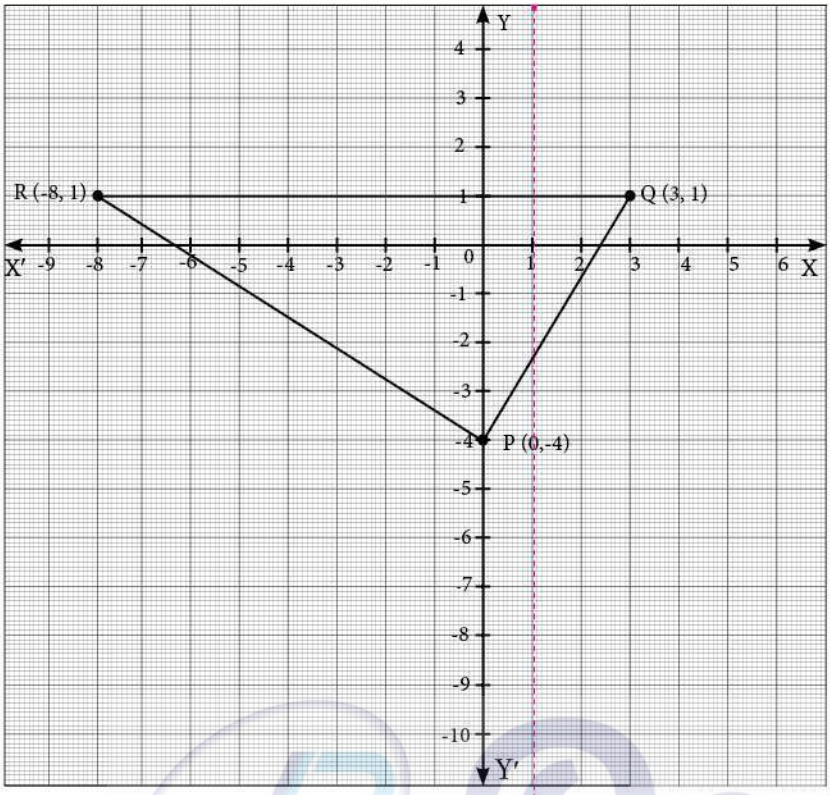
(v) QR-யின் மையம் N -யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க.

(vi) ΔMPN -யின் பரப்பைக் காண்க.

(vii) ΔMPN மற்றும் ΔPQR -யின் பரப்புகளின் விகிதம் என்ன?

விடை: கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் P (0, – 4), Q (3, 1) மற்றும் R (– 8, 1)

(i)



(ii) ΔPQR என்பது சமபக்க முக்கோணம் அல்ல.

(iii) ΔPQR -ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0(1-1) + 3(1+4) - 8(-4-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[15 + 40\right] = \frac{55}{2} \text{ சதுர அலகுகள்}$$

(iv) QP -ன் நடுப்புள்ளி

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{-4+1}{2}\right)$$

$$= M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

(v) QR -ன் நடுப்புள்ளி

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= N\left(\frac{3-8}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$$

$$= N\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

(vi) ΔMPN -ன் பரப்பளவு

$$M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), P(0, -4), N\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$$

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(-4-1) + 0\left(1+\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{3}{2}+4\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{15}{2} - \frac{25}{4}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{30+25}{4}\right] = \frac{55}{8} \text{ சதுர அலகுகள்}$$

[∵ பரப்பு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது.]

(vii) ΔPQR-ன் பரப்பு > ΔMPN -ன் பரப்பு

ΔPQR -ன் பரப்பு : ΔMPN -ன் பரப்பு

$$= \frac{55}{2} : \frac{55}{4} = 4 : 2$$

4. கொடுக்கப்பட்ட நாற்கரம் ABCD -யின் முனைகள் A (– 3, – 8), B (6, – 6), C (4, 2), D (– 8, 2) ஆகும்.

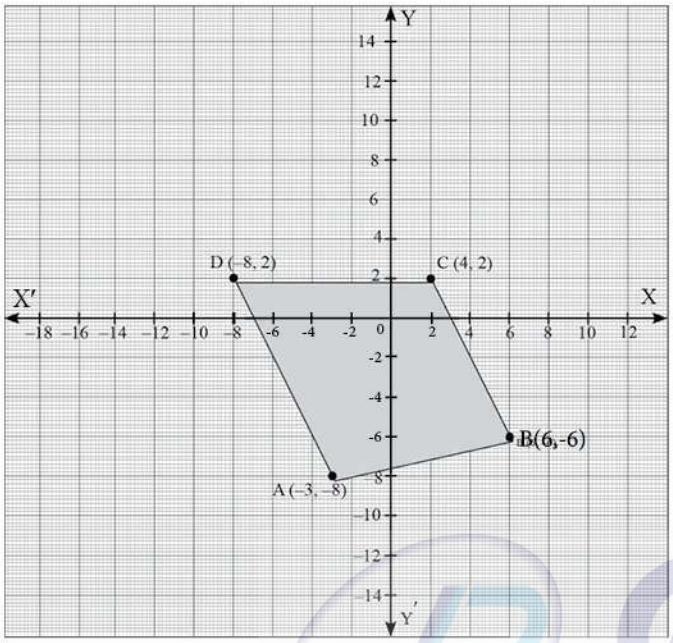
(i) ΔABC -யின் பரப்பு காண்க.

(ii) ΔABC -யின் பரப்பு காண்க.

(iii) ΔABC -யின் பரப்பு + ΔACD -யின் பரப்பு காண்க.

(iv) நாற்கரம் ABCD -யின் பரப்பு காண்க.

(v) கேள்வி 3 மற்றும் 4 -யின் விடைகளை ஒப்பிடுக.



விடை: நாற்கரம் ABCD ன் முனைப்புள்ளிகள் A (– 3, – 8), B (6, – 6), C (4, 2) மற்றும் D (– 8, 2)

(i) ΔABC -ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

சதுர அலகுகள்

$$= \frac{1}{2}\left[-3(-6-2) + 6(2+8) + 4(-8+6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(24 + 60 - 8)$$

$$= \frac{1}{2}(76)$$

$$= 38 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

(ii) ΔACD -ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}\left[-3(2-2) + 4(2+8) - 8(-8-2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[40 + 80] = 60 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

(iii) ΔABC -ன் பரப்பளவு + ΔACD ன் பரப்பளவு

$= 38 + 60$

$= 98$ சதுர அலகுகள்

(iv) நாற்கரம் ABCD -ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right]$$

சதுர அலகுகள்

$$= \frac{1}{2}\left[(-3-4)(-6-2) - (6+8)(-8-2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[56 + 140]$$

$$= \frac{196}{2} = 98 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

(v) (iii) , (iv) -லிருந்து

நாற்கரம் ABCD -ன் பரப்பளவு

= ΔABCன் பரப்பளவு + ΔACD -ன் பரப்பளவு என்பதை நாம் அறிவோம்.

சிந்தனைக் களம்

1. பரப்பு பூச்சியமாக உள்ளவாறு எத்தனை முக்கோணங்கள் அமைக்க முடியும்?

விடை: அவ்வாறான முக்கோணங்கள் கிடையாது.

2. (a, a), (– a, a), (a, – a) மற்றும் (– a, – a), (இங்கு $a \neq 0$) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு 64 சதுர அலகுகள் எனில்,

(i) அந்த நாற்கரத்தின் பெயர் என்ன?

(ii) a -யின் அனைத்து மதிப்புகளையும் காண்க.

விடை: கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (a, a), (– a, a), (a, – a) மற்றும் (– a, –a)

நாற்கரத்தின் பரப்பளவு = 64 சதுர அலகுகள்

$$\frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right] = 64$$

$$(a + a)(a + a) - (-a - a)(a + a) = 128$$

$$4a^2 + 4a^2 = 128$$

$$8a^2 = 128$$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

பரப்பளவு = 64 (முழுவர்க்கம்) மற்றும் புள்ளிகள் சமதூரத்தில் இருப்பதாலும் கொடுக்கப்பட்ட நாற்கரம் ஒரு சதுரமாகும்.

பயிற்சி 5.1

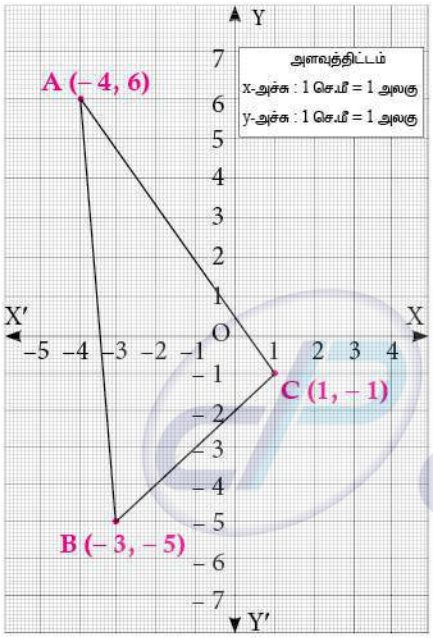
1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

(i) (1, – 1), (– 4, 6) மற்றும் (– 3, – 5)

(ii) (– 10, – 4), (– 8, – 1) மற்றும் (– 3, – 5)

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் (1, – 1), (– 4, 6) மற்றும் (– 3, – 5)



A(–4, 6), B(–3, –5), C(1, –1)

ΔABC-ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\ [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)]$

$= \frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ சதுர அலகுகள்

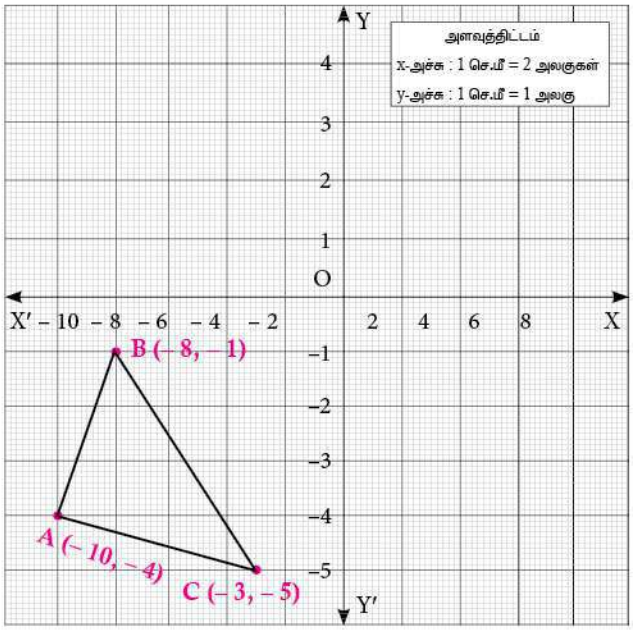
$= \frac{1}{2}\ [-4 (-5 + 1) - 3(-1 - 6) + 1(6 + 5)]$

$= \frac{1}{2}\ [-4 \times (-4) - 3 \times (-7) + 1 \times (11)]$

$= \frac{1}{2}\ [16 + 21 + 11]$

$= \frac{1}{2}\ (48) = 24$ சதுர அலகுகள்

(ii) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் A(– 10, – 4), B(– 8, – 1) மற்றும் C(– 3, – 5)



முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$

சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\ [-10 (-1 + 5) - 8 (-5 + 4) - 3 (-4 + 1)]$

$= \frac{1}{2}\ [-10 (4) - 8 (-1) - 3 (-3)]$

$= \frac{1}{2}\ [-40 + 8 + 9]$

$= \frac{1}{2}\ [-40 + 17] = -\frac{23}{2} = -11.5$

[∵ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

∴ முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = 11.5 சதுர அலகுகள்

2. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமா எனத் தீர்மானிக்கவும்.

(i) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, **(– 5, 6) மற்றும் (– 8, 8)**

(ii) (a, b + c), (b, c + a) மற்றும் (c, a + b)

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, (– 5, 6) மற்றும் (– 8, 8).

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(6-8)-5(8-3)-8(3-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-2)-5(5)-8(-3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1-25+24] = \frac{1}{2}(0) = 0$$

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பூச்சியம் என்பதால், புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகளாகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (a, b + c), (b, c + a) மற்றும் (c, a + b)

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}[a(c+a-a-b)+b(a+b-b-c)+c(b+c-c-a)]$$

$$= \frac{1}{2}[a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)]$$

$$= \frac{1}{2}[ac-ab+ab-bc+bc-ac]$$

$$= \frac{1}{2}(0) = 0$$

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பூச்சியம் என்பதால், புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகளாகும்.

3. வரிசையில் அமைந்த முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகளும், அதன் பரப்பளவுகளும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 'p' -யின் மதிப்பைக் காண்க.

வ. எண்	முனைப் புள்ளிகள்	பரப்பு (சதுர அலகில்)
(i)	(0, 0), (p, 8), (6, 2)	20
(ii)	(p, p), (5, 6), (5, – 2)	32

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் (0, 0), (p, 8) மற்றும் (6, 2)

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = 20 சதுர அலகுகள்

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$\frac{1}{2}[0(8-2)+p(2-0)+6(0-8)] = 20$$

$$2p - 48 = 40$$

$$2p = 40 + 48$$

$$2p = 88$$

$$p = \frac{88}{2} = 44$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் (p, p), (5, 6) மற்றும் (5, – 2)

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

= 32 சதுர அலகுகள்

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$\frac{1}{2}[p(6+2)+5(-2-p)+5(p-6) = 32$$

$$8p - 10 - 5p + 5p - 30 = 64$$

$$8p - 40 = 64$$

$$8p = 64 + 40 = 104$$

$$p = \frac{104}{8} = 13$$

4. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தவை எனில், 'a' -யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) (2, 3), (4, a) மற்றும் (6, – 3)

(ii) (a, 2 – 2a), (– a + 1, 2a) மற்றும் (– 4 – a, 6 – 2 a)

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (2, 3), (4, a) மற்றும் (6, – 3)

புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் என்பதால், முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

அதாவது,

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow 2(a+3)+4(-3-3)+6(3-a) = 0$$

$$2a + 6 - 24 + 18 - 6a = 0$$

$$-4a + 0 = 0$$

$$-4a = 0$$

$$a = 0$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (a, 2 – 2a), (– a + 1, 2a) மற்றும் (– 4 – a, 6 – 2a)

புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் என்பதால், முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

அதாவது,

$$\frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 0$$

$$a (2a - 6 + 2a) + (- a + 1) (6 - 2a - 2 + 2a) + (- 4 - a) (2 - 2a - 2a) = 0$$

$$a (4a - 6) + (- a + 1) (4) + (- 4 - a) (2 - 4a) = 0$$

$$4a^2 - 6a - 4a + 4 - 8 + 16 a - 2a + 4a^2 = 0$$

$$8a^2 + 4a - 4 = 0$$

(4 ஆல் வகுக்க)

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$(2a - 1) (a + 1) = 0$$

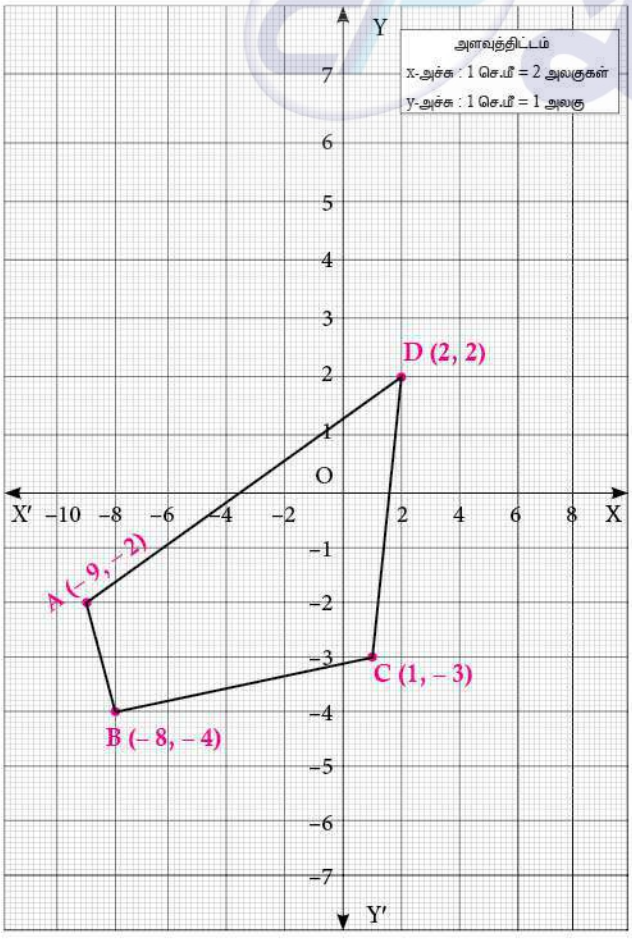
$$2a - 1 = 0, a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, - 1$$

5. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(i) (– 9, – 2), (– 8, – 4), (2, 2) மற்றும் (1, – 3)

(ii) (– 9, 0), (– 8, 6), (– 1, – 2) மற்றும் (– 6, – 3)

தீர்வு :



(i) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள்

A(– 9, – 2), B(– 8, – 4), C(1, –3) மற்றும் D(2, 2)

நாற்கரம் ABCD –ன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\ [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + x_1 y_4)]$ சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\ [(- 9) (- 4) + (- 8) (-3) + (1) (2) + (2) (- 2)] -$

$[(- 8) (- 2) + (1) (- 4) + (2) (-3) + (- 9) (2)]$

$= \frac{1}{2}\ [(36 + 24 + 2 - 4) - (16 - 4 - 6 - 18)]$

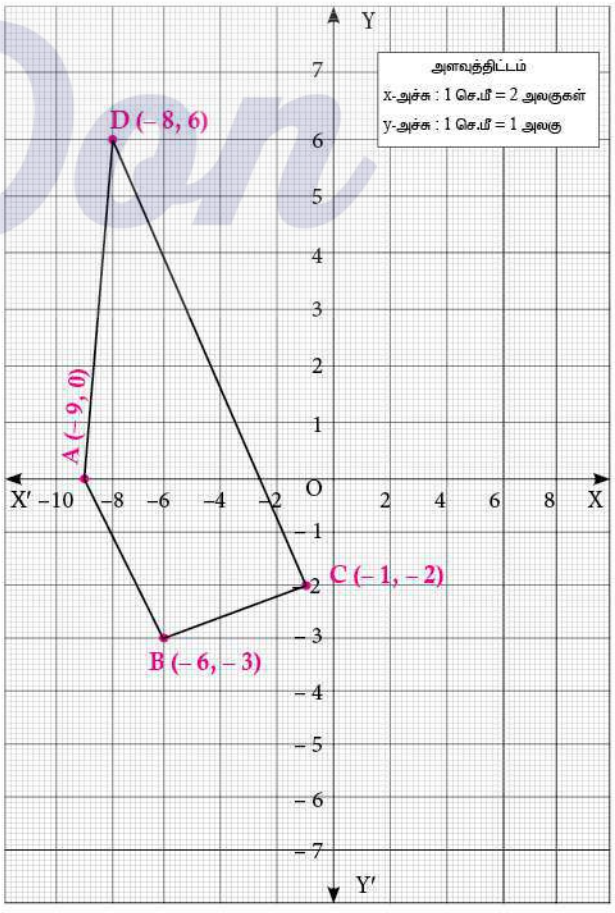
$= \frac{1}{2}\ [58 - (- 12)] = \frac{1}{2}\ [70]$

$= 35$ சதுர அலகுகள்

∴ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு = 35 சதுர அலகுகள்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள்

(– 9, 0), (– 8, 6), (– 1, – 2) மற்றும் (– 6, – 3)



நாற்கரம் ABCD -ன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\ [(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + x_1 y_4)]$

(அல்லது) $\frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)]$
சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}[(-9 + 1)(-3 - 6) - (-6 + 8)(0 + 2)]$

$= \frac{1}{2}[(-8)(-9) - (2)(2)] = \frac{1}{2}[72 - 4] = \frac{68}{2} = 34$

∴ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு = 34 சதுர அலகுகள்

6. $(-4, -2), (-3, k), (3, -2)$ மற்றும் $(2, 3)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு 28 சதுர அலகுகள் எனில், k -யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள்
$(-4, -2), (-3, k), (3, -2)$ மற்றும் $(2, 3)$

நாற்கரத்தின் பரப்பளவு 28 சதுர அலகுகள்
நாற்கரத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)]$

$\frac{1}{2}[(-4 - 3)(k - 3) - (-3 - 2)(-2 + 2)] = 28$

$(-7)(k - 3) - (-5)(0) = 56$

$-7k + 21 = 56$

$-7k = 56 - 21 = 35$

$k = \frac{35}{-7} = -5$

$k = -5$

7. A (– 3, 9), B (a, b) மற்றும் C (4, – 5) என்பன ஒரு கோட்டமைந்த புள்ளிகள் மற்றும் a + b = 1 எனில், a மற்றும் b -யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A (– 3, 9), B(a, b) மற்றும் C (4, – 5)

புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் என்பதால், முக்கோணம் ABC –ன் பரப்பளவு பூச்சியம் ஆகும்.

$\therefore \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$

$\Rightarrow -3(b + 5) + a(-5 - 9) + 4(9 - b) = 0$

$-3b - 15 - 14a + 36 - 4b = 0$

$(\div -7) \quad -14a - 7b + 21 = 0$

$2a + b = 3 \quad \ldots (1)$

கொடுக்கப்பட்டது $a + b = 1 \quad \ldots (2)$

(1), (2) ஐத் தீர்க்க,

$2a + b = 3 \quad \ldots (1)$

$a + b = 1 \quad \ldots (2)$

(1) – (2) ⇒ $a = 2$

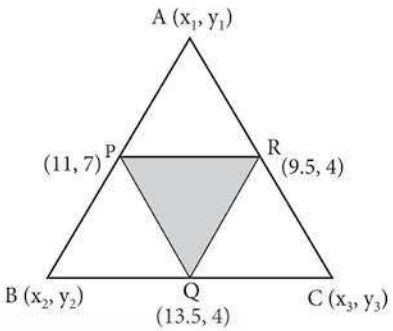
(2) ல் பிரதியிட,

$2 + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2 = -1$

∴ $a = 2, b = -1$

8. ΔABC -யின் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் AC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P (11, 7), Q (13.5, 4) மற்றும் R (9.5, 4) என்க. முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் A, B மற்றும் C காண்க. மேலும், ΔABC -யின் பரப்பை ΔPQR -யின் பரப்புடன் ஒப்பிடுக.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்டுள்ளது: P, Q, R என்பன முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள்.

முக்கோணம் ABC -ன் முனைப்புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்க.

P என்பது AB -ன் நடுப்புள்ளி

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = (11, 7)$

$x_1 + x_2 = 22$ மற்றும் $\quad \ldots (1)$

$y_1 + y_2 = 14 \quad \ldots (2)$

Q என்பது BC -ன் நடுப்புள்ளி

$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right) = (13.5, 4)$

$x_2 + x_3 = 27 \quad \ldots (3)$

$y_2 + y_3 = 8 \quad \ldots (4)$

R என்பது AC -ன் நடுப்புள்ளி

$\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) = (9.5, 4)$

$x_1 + x_3 = 19 \quad \ldots (5)$

$y_1 + y_3 = 8 \quad \ldots (6)$

(1), (3) மற்றும் (5) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க,

$x_1 = 7, \; x_2 = 15$ மற்றும் $x_3 = 12$

(2), (4) மற்றும் (6) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க கிடைப்பது, $y_1 = 7, \; y_2 = 7$ மற்றும் $y_3 = 1$

∴ முனைப்புள்ளிகள் A (7, 7), B (15, 7) மற்றும் C (12, 1)

ΔABC -ன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ ச.அலகுகள்

$= \frac{1}{2}[7(7-1) + 15(1-7) + 12(7-7)]$

$= \frac{1}{2}[42 - 90] = \frac{1}{2}(-48) = -24$

$= 24$ சதுர அலகுகள்

[∵ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

ΔPQR ன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}[11(4-4) + 13.5(4-7) + 9.5(7-4)]$

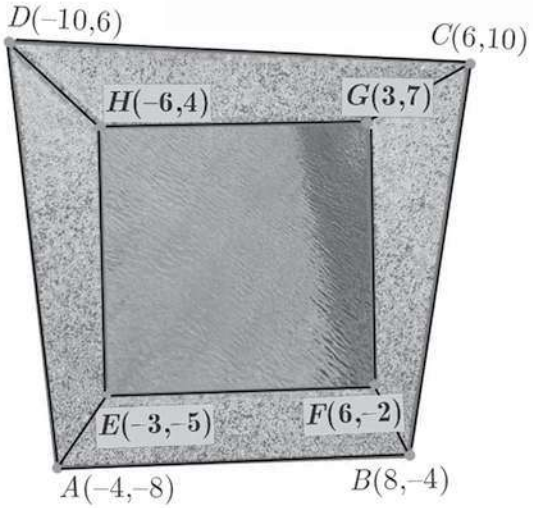
$= \frac{1}{2}[0 - 40.5 + 28.5] = \frac{-12}{2} = -6$

பரப்பளவு = 6 சதுர அலகுகள்

[∵ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

∴ ΔABC -ன் பரப்பளவு $= 4(\Delta PQR$ ன் பரப்பளவு)

9. நாற்கர வடிவ நீச்சல் குளத்தின் கான்கிரீட் உள்முற்றமானது படத்தில் காட்டியுள்ளபடி அமைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், உள்முற்றத்தின் பரப்பு காண்க.



தீர்வு : உள்முற்றத்தின பரப்பு = நாற்கரம் ABCD -ன் பரப்பு − நாற்கரம் EFGH ன் பரப்பு

நாற்கரம் ABCD ன் பரப்பு

A (− 4, − 8), B (8, − 4), C (6, 10) மற்றும் D (− 10, 6)

பரப்பு $= \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)]$

$= \frac{1}{2}[(-4-6)(-4-6) - (8+10)(-8-10)]$

$= \frac{1}{2}[100 + 324] = \frac{424}{2} = 212$ சதுர அலகுகள்

நாற்கரம் EFGH -ன் பரப்பு

E (− 3, − 5), F (6, − 2), G (3, 7) மற்றும் H (− 6, 4)

பரப்பு $= \frac{1}{2}[(-3,-3)(-2-4) - (6+6)(-5-7)]$

$= \frac{1}{2}[36 + 144] = \frac{180}{2} = 90$ சதுர அலகுகள்

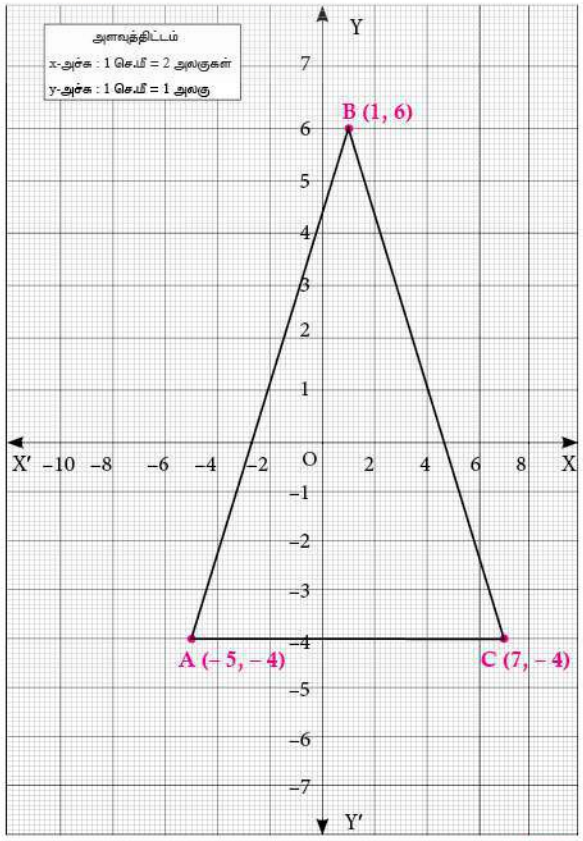
∴ உள்முற்றத்தின் பரப்பு

= நாற்கரம் ABCD -ன் பரப்பு − நாற்கரம் EFGH -ன் பரப்பு

= 212 − 90 = 122 சதுர அலகுகள்

10. A(− 5, − 4), B(1, 6) மற்றும் C(7, − 4) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோண வடிவக் கண்ணாடிக்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. 6 சதுர அடி பரப்புக்கு வர்ணம் பூச ஒரு வாளி தேவைப்படுகிறது எனில், கண்ணாடியின் முழுப் பகுதியையும் ஒரு முறை வர்ணம் பூச எத்தனை வாளிகள் தேவைப்படும்?

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் A (– 5, – 4), B (1, 6) மற்றும் C (7, – 4)

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$ சதுர அலகுகள்

முக்கோணம் ABC ன் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\left[-5(6+4) + 1(-4+4) + 7(-4-6)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-50 + 0 - 70\right] = \frac{-120}{2} = -60$

[∵ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

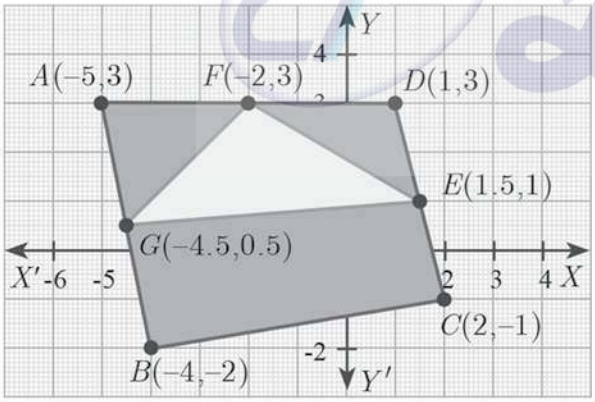
∴ பரப்பளவு= 60 சதுர அலகுகள்

கொடுக்கப்பட்டது: 6 சதுர அடி பரப்புக்கு வர்ணம் பூச ஒரு வாளி வர்ணம் தேவைப்படுகிறது.

∴ வாளிகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{60}{6} = 10$

11. படத்தை பயன்படுத்திப் பரப்பைக் காண்க.

(i) முக்கோணம் AGF (ii) முக்கோணம் FED (iii) நாற்கரம் BCEG.



தீர்வு :

(i) முக்கோணம் AGF ன் பரப்பளவு

முனைப்புள்ளிகள் A (– 5, 3), G (– 4.5, 0.5) மற்றும் F (– 2, 3).

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$

சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\left[-5(0.5 - 3) - 4.5(3 - 3) - 2(3 - 0.5)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[12.5 - 5\right] = \frac{7.5}{2} = 3.75$ சதுர அலகுகள்

(ii) முக்கோணம் FED-ன் பரப்பளவு

முனைப்புள்ளிகள் F (– 2, 3), E (1.5, 1) மற்றும் D (1, 3)

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$

சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\left[-2(1 - 3) + 1.5(3 - 3) + 1(3 - 1)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[4 + 2\right] = \frac{6}{2} = 3$ சதுர அலகுகள்

(iii) நாற்கரம் BCEG -ன் பரப்பளவு

முனைப்புள்ளிகள் B (– 4, – 2), C (2, – 1), E (1.5, 1) மற்றும் G (– 4.5, 0.5)

நாற்கரத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right]$

சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\left[(-4 - 1.5)(-1 - 0.5) - (2 + 4.5)(-2 - 1)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(-5.5)(-1.5) - (6.5)(-3)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[8.25 + 19.5\right] = \frac{1}{2}\left[27.75\right]$

$= 13.875 \approx 13.88$ சதுர அலகுகள்

கோட்டின் சாய்வு

நினைவில் கொள்க

கோட்டின் சாய்வு அல்லது சாய்வுக் கோணம் என்பது X -அச்சின் மிகை திசைக்கும், நேர்கோட்டிற்கும் இடையே கடிகார முள்ளின் எதிர்திசையில் அமைந்த கோணம் ஆகும். சாய்வுக் கோணம் θ எனக் குறிக்கப்படுகின்றது.

- X -அச்சிற்கு இணையான எந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வுக் கோணமும் பூச்சியம் (0°) ஆகும்.
- X -அச்சிற்கு செங்குத்தான அல்லது Y-அச்சிற்கு இணையான எந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வுக் கோணமும 90° ஆகும்.
- சாய்வு: 'θ' என்பது சாய்வுக் கோணம் எனில், '$\tan\theta$' என்பது நேர்கோட்டின் சாய்வு ஆகும். மேலும் இது 'm' எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- சாய்வு $m = \tan\theta$, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \neq 90^\circ$
- சாய்வு $= \dfrac{y \text{ ஆயத் தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x \text{ ஆயத் தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- $\tan 90^\circ$ = வரையறுக்கப்படவில்லை (முடிவிலி) என்பதால் நேர்குத்துக் கோட்டின் சாய்வும் வரையறுக்கப்படாததாகிறது.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சாய்வு $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ அல்லது $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ஆகும்.
- இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணை எனில், அவற்றின் சாய்வுகள் சமம். அதாவது $m_1 = m_2$.
- இரண்டு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 ஆகும். அதாவது, $m_1 \times m_2 = -1$.
- நேர்கோட்டின் சாய்வு என்பதை சாய்வின் அளவு என்றும் அழைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

5.8 (i) ஒரு கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் 30° எனில், அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

(ii) ஒரு கோட்டின் சாய்வு $\sqrt{3}$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் காண்க.

தீர்வு :

(i) இங்கு $\theta = 30^\circ$

சாய்வு $m = \tan\theta$

எனவே, சாய்வு $m = \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) சாய்வு $m = \sqrt{3}$, θ என்பது கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் என்க.

$\tan\theta = \sqrt{3}$

நாம் பெறுவது $\theta = 60^\circ$

5.9 கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

(i) $(-6, 1)$ மற்றும் $(-3, 2)$

(ii) $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$

(iii) $(14, 10)$ மற்றும் $(14, -6)$

தீர்வு :

(i) $(-6, 1)$ மற்றும் $(-3, 2)$

சாய்வு $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-1}{-3+6} = \dfrac{1}{3}$

(ii) $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$

$$\text{சாய்வு} = \frac{\frac{3}{7}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{7}+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{6-7}{14}}{\frac{6+7}{21}}$$

$$= -\frac{1}{14}\times\frac{21}{13} = -\frac{3}{26}.$$

(iii) (14, 10) மற்றும் (14, – 6)

$$\text{சாய்வு} = \frac{-6-10}{14-14} = \frac{-16}{0}$$

பூச்சியத்தால் வகுக்க முடியாததால் சாய்வை வரையறுக்க இயலாது.

5.10 (– 2, 2), (5, 8) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடு r மற்றும் (– 8, 7), (– 2, 0) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடு s ஆகும் எனில், நேர்கோடு r -ஆனது நேர்கோடு s -க்கு செங்குத்துத்தாக அமையுமா?

தீர்வு :

நேர்கோடு r - யின் சாய்வு $m_1 = \frac{8-2}{5+2} = \frac{6}{7}$

நர்கோடு s - யின் சாய்வு $m_2 = \frac{0-7}{-2+8} = \frac{-7}{6}$

சாய்வுகளின் பெருக்கல் $= \frac{6}{7}\times\frac{-7}{6} = -1$

அதாவது, $m_1 m_2 = -1$

எனவே, நேர்கோடு r ஆனது, நேர்கோடு s -க்கு செங்குத்தாக அமையும்.

5.11 (3, – 2), (12, 4) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடு p மற்றும் (6, – 2) மற்றும் (12, 2) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடு q ஆகும். p ஆனது q -க்கு இணையாகுமா?

தீர்வு :

p -யின் சாய்வு $m_1 = \frac{4+2}{12-3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

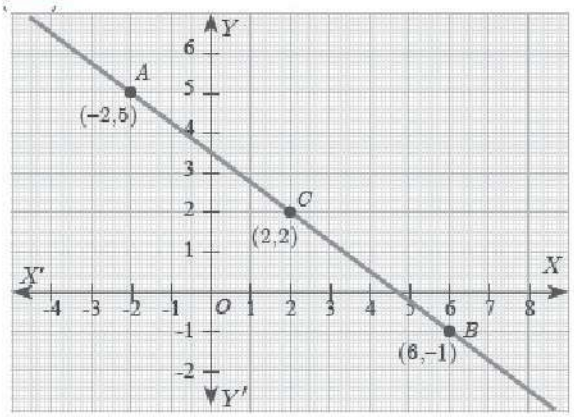
q -யின் சாய்வு $m_2 = \frac{2+2}{12-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

இதிலிருந்து, நேர்கோடு p -யின் சாய்வு = நேர்கோடு q-யின் சாய்வு. எனவே, நேர்கோடு

p -யானது நேர்கோடு q-க்கு இணை ஆகும்.

5.12 (– 2, 5), (6, – 1) மற்றும் (2, 2) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகள் எனக் காட்டு.

தீர்வு :



A(– 2, 5), B(6, – 1) மற்றும் C(2, 2) என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஆகும்.

AB -யின் சாய்வு $= \frac{-1-5}{6+2} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$

BC -யின் சாய்வு $= \frac{2+1}{2-6} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$

AB -யின் சாய்வு = BC -யின் சாய்வு

எனவே, A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளன. ஆகவே, A, B, C என்பன ஒரு கோட்டமைந்த புள்ளிகள் ஆகும்.

5.13 A(1, – 2), B(6, – 2), C(5, 1) மற்றும் D(2, 1) என்பன நான்கு புள்ளிகள் எனில்,

(i) (a) AB (b) CD என்ற கோட்டுத் துண்டுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.

(ii) (a) BC (b) AD என்ற கோட்டுத் துண்டுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.

(iii) விடைகளிலிருந்து நீங்கள் அறிவது என்ன?

தீர்வு :

(i) (a) AB -யின் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2+2}{6-1} = 0$

(b) CD -யின் சாய்வு $= \frac{1-1}{2-5} = \frac{0}{-3} = 0$

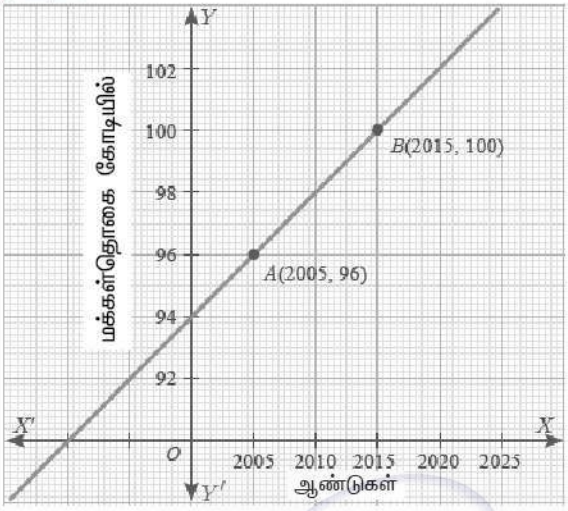
(ii) (a) BC -யின் சாய்வு $= \frac{1+2}{5-6} = \frac{3}{-1} = -3$

(b) AD -யின் சாய்வு $= \frac{1+2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

(iii) AB -யின் சாய்வும், CD -யின் சாய்வும் சமமாக இருப்பதால், அவைகள் இணையாகும். இதேபோல் AD -யின் சாய்வும், BC-யின் சாய்வும் சமம் இல்லை. எனவே, இவை இணை இல்லை. ஆகையால், நாற்கரம் ABCD ஆனது ஒரு சரிவகம் என அறியலாம்.

5.14 கீழே கொடுக்கப்பட்ட மக்கள் தொகைப் பெருக்கம் (கோடிகளில்) மற்றும் ஆண்டிற்கான வரைபடத்தில் AB என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. மேலும் 2030 -ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு :



A(2005, 96) மற்றும் B(2015, 100) என்பன நேர்கோடு AB-யின் புள்ளிகள் ஆகும்.

$$\text{AB -யின் சாய்வு} = \frac{100 - 96}{2015 - 2005} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2030 -யில் மக்கள் தொகை வளர்ச்சி k கோடிகள் என்க.

C(2030, k) என்பது AB -யின் மீதுள்ள புள்ளி எனக் கொள்க.

$$\text{AC -யின் சாய்வு} = \text{AB -யின் சாய்வு}$$

$$\frac{k - 96}{2030 - 2005} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{k - 96}{25} = \frac{2}{5}$$

$$k - 96 = 10$$

$$k = 106$$

எனவே, 2030 -யில் மக்கள் தொகை 106 கோடிகள்.

5.15 பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தாமல், (1, – 4), (2, – 3) மற்றும் (4, – 7) என்ற முனைப் புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

A(1, – 4), B(2, – 3) மற்றும் C(4, – 7) ஆகியன முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் என்க.

$$\text{AB -யின் சாய்வு} = \frac{-3 + 4}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{BC -யின் சாய்வு} = \frac{-7 + 3}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{AC -யின் சாய்வு} = \frac{-7 + 4}{4 - 1} = \frac{-3}{3} = -1$$

AB -யின் சாய்வு × AC -யின் சாய்வு = (1) (–1) = – 1

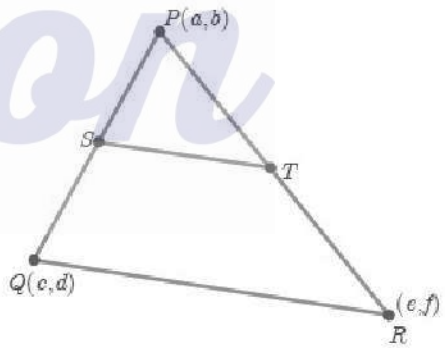
ஆகவே, AB ஆனது AC -க்கு செங்குத்தாகும்.

$\angle A = 90^\circ$

எனவே, ΔABC ஆனது செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

5.16 ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டானது, மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மூன்றாவது பக்கத்தின் பாதியாகவும் இருக்கும் எனத் தொலைவு மற்றும் சாய்வு கருத்தைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்க.

தீர்வு :



P(a, b), Q(c, d) மற்றும் R(e, f) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் என்க.
PQ -யின் மையப்புள்ளி S மற்றும் PR -யின் மையப்புள்ளி T என்க.

எனவே,

$$S = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2}\right) \text{ மற்றும் } T = \left(\frac{a + e}{2}, \frac{b + f}{2}\right)$$

$$\text{இப்பொழுது, ST - யின் சாய்வு} = \frac{\frac{b + f}{2} - \frac{b + d}{2}}{\frac{a + e}{2} - \frac{a + c}{2}} = \frac{f - d}{e - c}$$

$$\text{மற்றும் QR -யின் சாய்வு} = \frac{f - d}{e - c}$$

எனவே, ST ஆனது QR -க்கு இணை ஆகும்.

(ஏனெனில், இவற்றின் சாய்வுகள் சமம்)

மேலும்,

$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+e}{2} - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+f}{2} - \frac{b+d}{2}\right)^2}$$

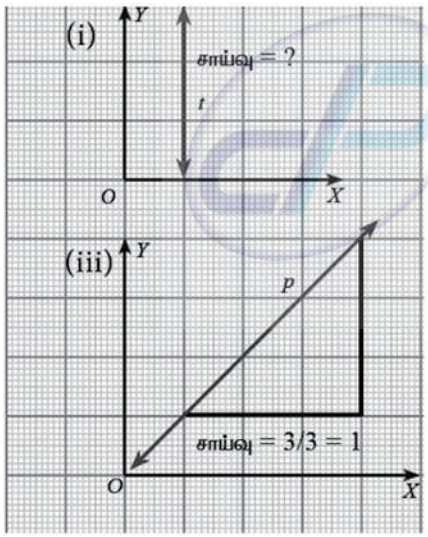
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$$

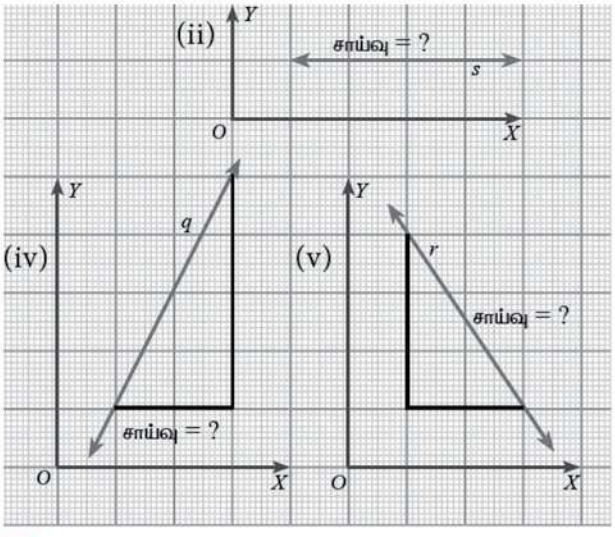
$$ST = \frac{1}{2}QR$$

இதிலிருந்து, ST ஆனது QR -க்கு இணையாகவும் அதன் பாதியாகவும் இருக்கிறது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சாய்வைக் கண்டுபிடிக்க. கணக்கு (iii) –யின் தீர்வு தரப்பட்டுள்ளது.





தீர்வு :

(iii) p என்ற கோட்டின் சாய்வு

$$= \frac{y \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}} = \frac{3}{3} = 1$$

விடை: t -ன் சாய்வு வரையறுக்கப்படாதது.

S -ன் சாய்வு பூச்சியம்.

2. விடுபட்டவற்றை பூர்த்தி செய்க.

வ. எண்	புள்ளிகள்	சாய்வு
1	A (– a, b), B (3a, – b)	...
2	A (2, 3), B (___, ___)	2
3	...	0
4	...	வரையறுக்கப்பட வில்லை

விடை:

1. புள்ளிகள் A (–a, b), B (3a, – b)

$$\text{சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{b+b}{-a-3a}$$

$$= \frac{2b}{-4a} = -\frac{b}{2a}$$

2. A (2, 3), B (___, ___), சாய்வு = 2

$$\text{சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2$$

$\frac{3-y_2}{2-x_2} = 2$ என்பதை நிறைவு செய்யும் எந்த இரு மதிப்புகளும், ஒரு புள்ளியாக இருக்க இயலும். உதாரணமாக,

$$x_2 = -2 \text{ மற்றும் } y_2 = -5$$

3. X -அச்சிற்கு இணையான எந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வும் பூச்சியம் ஆகும்.

4. X -அச்சிற்கு செங்குத்தான எந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வும் "வரையறுக்கப்படாதது" ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

1. x -அச்சு மற்றும் y -அச்சு ஆனது ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. இங்கு $m_1 m_2 = -1$ என்ற நிபந்தனை உண்மையாகுமா?

விடை:

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட சாய்வுகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் மட்டுமே, $m_1 m_2 = -1$ என்பது உண்மையாகிறது.

x-அச்சின் சாய்வு 'பூச்சியம்' மற்றும் y -அச்சின் சாய்வு "வரையறுக்கப்படாதது".

2. நமது அன்றாட வாழ்வில் சாய்வுகள் பயன்படுத்தப்படும் மூன்று சூழ்நிலைகளைக் குறிப்பிடுக.

விடை:

(i) சாலைகளை அமைக்கும்போது, சாய்வைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(ii) மருத்துவமனைகளில் உள்ள சக்கர நாற்காலிகள் செல்லக்கூடிய சரிவுப்பாதை

(iii) பாலங்களைக் கட்டமைக்கும்போது, சாய்வைக் கருத வேண்டும்.

பயிற்சி 5.2

1. X -அச்சுடன் மிகை திசையில் சாய்வு கோணத்தைக் கொண்ட கோட்டின் சாய்வு என்ன?

(i) 90° (ii) 0°

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட சாய்வுக்கோணம் $\theta = 90°$

$\therefore$ கோட்டின் சாய்வு 'm' $= \tan\theta$

$= \tan 90° = \infty$

(வரையறுக்கப்படாதது)

(ii) சாய்வுக் கோணம் $\theta = 0°$

கோட்டின் சாய்வு 'm' $= \tan\theta = \tan 0° = 0$

2. பின்வரும் சாய்வுகளைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணம் என்ன?

(i) 0 (ii) 1

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட சாய்வு 'm' = 0

$\Rightarrow \tan\theta = 0 = \tan 0°$

$\therefore \theta = 0°$

(ii) சாய்வு 'm' = 1

$\tan\theta = 1 = \tan 45°$

$\therefore \theta = 45°$

3. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

(i) $(5, \sqrt{5})$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி

(ii) $(\sin\theta, -\cos\theta)$ மற்றும் $(-\sin\theta, \cos\theta)$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $(5, \sqrt{5})$ மற்றும் $(0, 0)$

கோட்டின் சாய்வு $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ (அல்லது) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{\sqrt{5} - 0}{5 - 0} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $(\sin\theta, -\cos\theta)$ மற்றும் $(-\sin\theta, \cos\theta)$

கோட்டின் சாய்வு $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$= \dfrac{-\cos\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta} = -\dfrac{2\cos\theta}{2\sin\theta} = -\cot\theta$

4. A(5, 1) மற்றும் P ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு என்ன? இதில் P என்பது (4, 2) மற்றும் (– 6, 4) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி ஆகும்.

தீர்வு : (4, 2) மற்றும் (– 6, 4) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி

நடுப்புள்ளி $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{4-6}{2}, \dfrac{2+4}{2}\right)$

$= \mathrm{P}\left(-\dfrac{2}{2}, \dfrac{6}{2}\right) = \mathrm{P}(-1, 3)$

A (5, 1) மற்றும் P (– 1, 3) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{1-3}{5+1} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ A, P என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு

$= -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)} = 3$

5. (– 3, – 4), (7, 2) மற்றும் (12, 5) என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (– 3, – 4), (7, 2) மற்றும் (12, 5)

புள்ளிகளை A (– 3, – 4), B (7, 2) மற்றும் C (12, 5) என்க.

$$\text{கோட்டின் சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\text{AB -ன் சாய்வு} = \frac{-4-2}{-3-7} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{BC -ன் சாய்வு} = \frac{2-5}{7-12} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

AB -ன் சாய்வு = BC -ன் சாய்வு

∴ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A, B மற்றும் C ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

6. (3, – 1), (a, 3) மற்றும் (1, – 3) ஆகிய மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை எனில், a -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (3, – 1), (a, 3) மற்றும் (1, – 3)

புள்ளிகளை A (3, – 1), B (a, 3) மற்றும் C (1, – 3) என்க.

$$\text{AB -ன் சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-1-3}{3-a} = \frac{-4}{3-a}$$

$$\text{BC-ன் சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3+3}{a-1} = \frac{6}{a-1}$$

A, B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் என்பதால்

AB -ன் சாய்வு = BC -ன் சாய்வு

$$\frac{-4}{3-a} = \frac{6}{a-1}$$

$$-2(a-1) = 3(3-a)$$

$$-2a + 2 = 9 - 3a$$

$$3a - 2a = 9 - 2$$

$$a = 7$$

7. (– 2, a) மற்றும் (9, 3) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{1}{2}$ எனில், a -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (– 2, a) மற்றும் (9, 3)

சாய்வு $= -\frac{1}{2}$

$$\text{கோட்டின் சாய்வு} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a-3}{-2-9} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{a-3}{-11} = -\frac{1}{2}$$

$$2(a-3) = 11$$

$$2a = 11 + 6$$

$$a = \frac{17}{2}$$

8. (– 2, 6) மற்றும் (4, 8) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோடானது (8, 12) மற்றும் (x, 24) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்து எனில், x -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$\text{கோட்டின் சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

(– 2, 6) மற்றும் (4, 8) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{6-8}{-2-4} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12) மற்றும் (x, 24) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{12-24}{8-x} = -\frac{12}{8-x}$$

கொடுக்கப்பட்டது : கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து

$$\therefore m_1 \times m_2 = -1$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{-12}{8-x} = -1$$

$$4 = 8 - x$$

$$x = 8 - 4$$

$$x = 4$$

9. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும், பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யுமா என ஆராய்க.

(i) A (1, – 4), B (2, – 3) மற்றும் C (4, – 7)

(ii) L (0, 5), M (9, 12) மற்றும் N (3, 14)

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் A (1, – 4), B (2, – 3) மற்றும் C (4, – 7)

கோட்டின் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

AB -ன் சாய்வு $= \frac{-4+3}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$

BC -ன் சாய்வு $= \frac{-3+7}{2-4} = \frac{4}{-2} = -2$

AC -ன் சாய்வு $= \frac{-4+7}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$

(AB -ன் சாய்வு) × (AC -ன் சாய்வு) = – 1

∴ AB என்பது AC –க்குச் செங்குத்து.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது.

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ அலகுகள்

$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AB^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$BC^2 = 20$

$AC = \sqrt{(1-4)^2 + (-4+7)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$AC^2 = 18$

இப்போது, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

எனவே, பிதாகரஸின் தேற்றம் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

(ii) L (0, 5), M (9, 12) மற்றும் N (3, 14)

கோட்டின் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

LM -ன் சாய்வு $= \frac{5-12}{0-9} = \frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$

MN -ன் சாய்வு $= \frac{12-14}{9-3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

LN -ன் சாய்வு $= \frac{5-14}{0-3} = \frac{-9}{-3} = 3$

(MN -ன் சாய்வு) × (LN -ன் சாய்வு)

$= \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -1$

∴ MN என்பது LN க்குச் செங்குத்து.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன.

தொலைவுக்கான சூத்திரம்

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$LM = \sqrt{(0-9)^2 + (5-12)^2} = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$

$LM^2 = 130$

$MN = \sqrt{(9-3)^2 + (12-14)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

$MN^2 = 40$

$LN = \sqrt{(0-3)^2 + (5-14)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

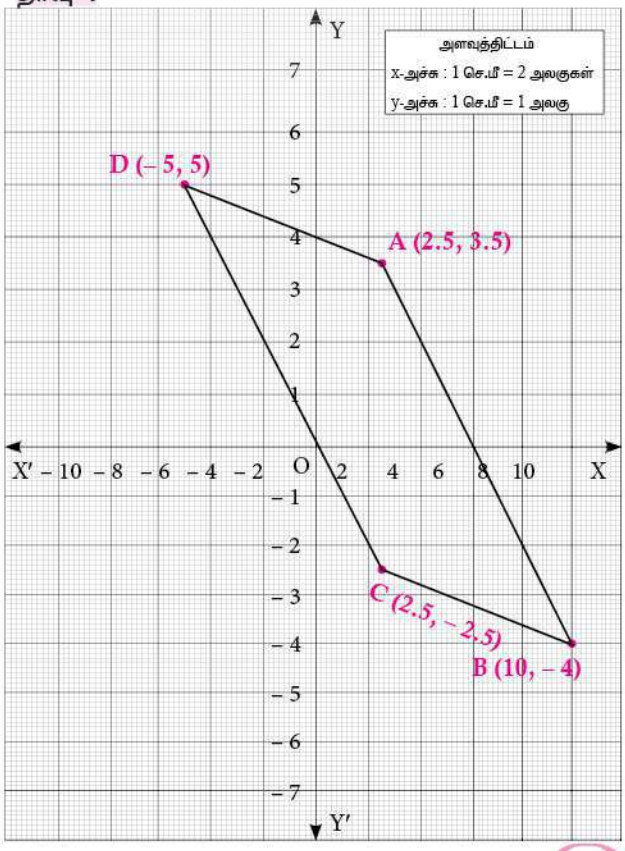
$LN^2 = 90$

∴ $LN^2 + MN^2 = LM^2$

பிதாகரஸின் தேற்றம் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

10. A (2.5, 3.5), B (10, – 4), C (2.5, – 2.5) மற்றும் D (– 5, 5) ஆகியன இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A (2.5, 3.5), B (10, – 4), C (2.5, – 2.5) மற்றும் D (– 5, 5)

கோட்டின் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

AB -ன் சாய்வு $= \frac{3.5+4}{2.5-10} = \frac{7.5}{-7.5} = -1$

BC -ன் சாய்வு $= \frac{-4+2.5}{10-2.5} = \frac{-1.5}{7.5} = -\frac{1}{5}$

CD ன் சாய்வு $= \frac{-2.5-5}{2.5+5} = -\frac{7.5}{7.5} = -1$

AD ன் சாய்வு $= \frac{3.5-5}{2.5+5} = -\frac{1.5}{7.5} = -\frac{1}{5}$

AB ன் சாய்வு = CD ன் சாய்வு = – 1

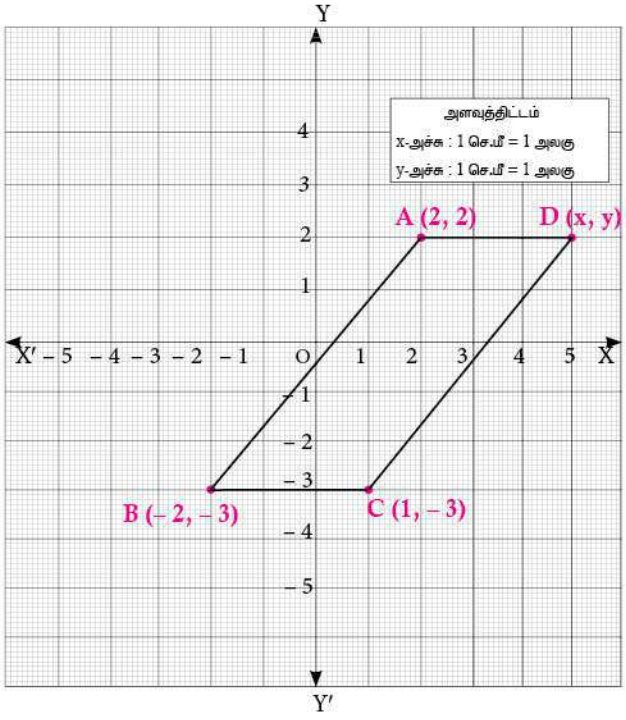
BC ன் சாய்வு = AD ன் சாய்வு $= -\frac{1}{5}$

∴ AB என்பது CD க்கு இணை மற்றும் BC என்பது AD க்கு இணை.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கின்றன.

11. A (2, 2), B (– 2, – 3), C (1, – 3) மற்றும் D (x, y) ஆகிய புள்ளிகள் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனில் x மற்றும் y -யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A (2, 2), B (– 2, – 3), C (1, – 3) மற்றும் D (x, y)



கோட்டின் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

AB -ன் சாய்வு $= \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$

BC -ன் சாய்வு $= \frac{-3+3}{-2-1} = 0$

CD -ன் சாய்வு $= -\frac{-3-y}{1-x}$

AD -ன் சாய்வு $= \frac{2-y}{2-x}$

புள்ளிகள் இணைகரத்தை அமைப்பதால் ABயும் CD யும் இணை மற்றும் BC யும் AD யும் இணை

∴ AB -ன் சாய்வு = CD -ன் சாய்வு

$\frac{5}{4} = \frac{-3-y}{1-x}$

$5(1-x) = 4(-3-y)$

$5 - 5x = -12 - 4y$

$\Rightarrow 5x - 4y = 17$ ... (1)

BC -ன் சாய்வு = AD -ன் சாய்வு

$0 = \frac{2-y}{2-x}$

$\Rightarrow 2 - y = 0$

$y = 2$

(1) ல் பிரதியிட,

$5x - 4(2) = 17$

$5x = 17 + 8 = 25$

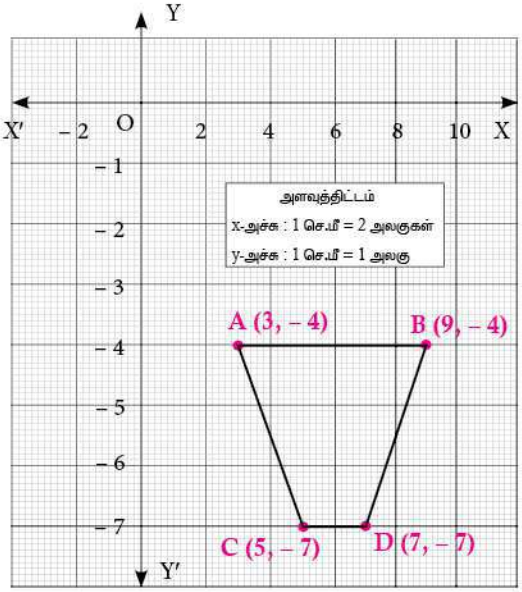
$x = \frac{25}{5} = 5$

∴ x = 5, y = 2

12. A (3, – 4), B (9, – 4), C (5, – 7) மற்றும் D (7, – 7) ஆகிய புள்ளிகள் ABCD என்ற சரிவகத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A (3, – 4), B (9, – 4), C (5, – 7) மற்றும் D (7, – 7)



கோட்டின் சாய்வு = $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

AB -ன் சாய்வு = $\frac{-4+4}{3-9} = 0$

BD -ன் சாய்வு = $\frac{-4+7}{9-7} = \frac{3}{2}$

CD -ன் சாய்வு = $\frac{-7+7}{5-7} = 0$

AC -ன் சாய்வு = $\frac{-4+7}{3-5} = \frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$

AB -ன் சாய்வு = CD -ன் சாய்வு

∴ AB என்பது CD க்கு இணை.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் சரிவகத்தை அமைக்கின்றன.

13. A(– 4, – 2), B(5, – 1), C(6, 5) மற்றும் D(– 7, 6) ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

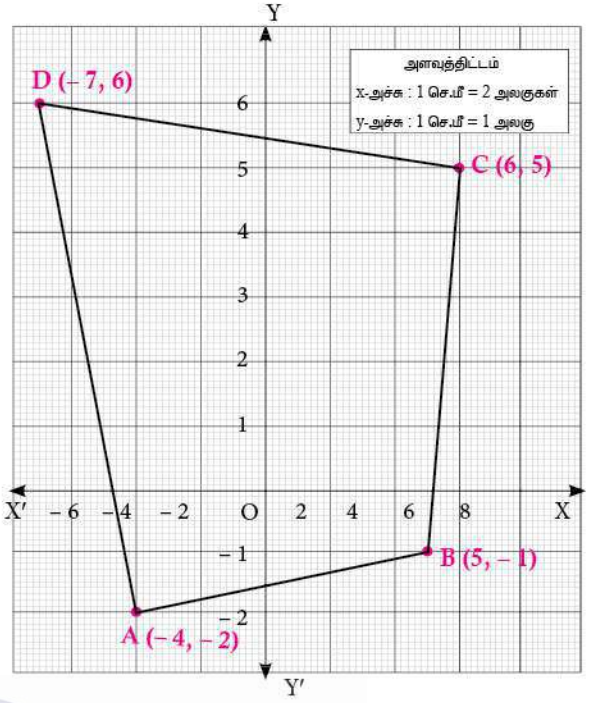
தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது, நாற்கரத்தின் முனைப்புள்ளிகள் A(– 4, – 2), B(5, – 1), C(6, 5) மற்றும் D(– 7, 6). P, Q, R மற்றும் S என்பன முறையே AB, BC, CD மற்றும் AD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்க.

AB -ன் நடுப்புள்ளி

$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = P\left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-2-1}{2}\right)$

$= P\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$



BC -ன் நடுப்புள்ளி

$= Q\left(\frac{5+6}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = Q\left(\frac{11}{2}, 2\right)$

CD -ன் நடுப்புள்ளி

$= R\left(\frac{6-7}{2}, \frac{5+6}{2}\right) = R\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

AD -ன் நடுப்புள்ளி

$= S\left(\frac{-4-7}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = S\left(-\frac{11}{2}, 2\right)$

PQ -ன் சாய்வு = $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{\frac{1}{2} - \frac{11}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{10}{2}} = \frac{7}{10}$

QR -ன் சாய்வு = $\frac{2 - \frac{11}{2}}{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{12}{2}} = -\frac{7}{12}$

RS -ன் சாய்வு = $\frac{\frac{11}{2} - 2}{-\frac{1}{2} + \frac{11}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{10}{2}} = \frac{7}{10}$

PS -ன் சாய்வு = $\frac{-\frac{3}{2} - 2}{\frac{1}{2} + \frac{11}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{12}{2}} = -\frac{7}{12}$

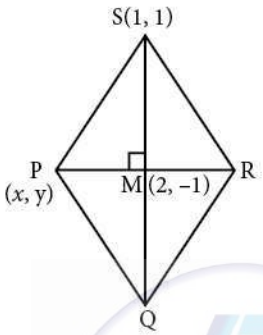
PQ -ன் சாய்வு = RS -ன் சாய்வு ⇒ PQ || RS

QR -ன் சாய்வு = PS -ன் சாய்வு ⇒ QR || PS

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கின்றன.

14. PQRS என்பது ஒரு சாய்சதுரம். அதன் மூலைவிட்டங்கள் PR மற்றும் QS ஆனது வெட்டும்புள்ளி M ஆகவும் QS = 2PR எனவும் உள்ளது. S மற்றும் M -யின் ஆயப் புள்ளிகள் முறையே (1, 1) மற்றும் (2, – 1) எனில், P -யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க.

தீர்வு :



PQRS என்பது ஒரு சாய்சதுரம்

QS -ன் சாய்வு = SM -ன் சாய்வு

$$\text{SM -ன் சாய்வு} = \frac{-1-1}{2-1} = -\frac{2}{1} = -2$$

மூலைவிட்டங்கள் PR மற்றும் QS என்பன செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

$$\therefore \text{PR -ன் சாய்வு} = \text{PM -ன் சாய்வு} = \frac{1}{2}$$

P என்பது (x, y) என்க.

$$\text{PM -ன் சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y+1}{x-2} = \frac{1}{2}$$

$$y + 1 = \frac{x-2}{2}$$

$$y = \frac{x-2}{2} - 1 = \frac{x-4}{2}$$

$$\therefore \text{P என்பது } \left(x, \frac{x-4}{2}\right)$$

கொடுக்கப்பட்டது QS = 2 PR

$$\Rightarrow \quad \frac{QS}{2} = PR$$

$$\Rightarrow \quad SM = PR$$

$$\Rightarrow \quad \frac{SM}{2} = PM$$

(M என்பது PR ன் நடுப்புள்ளி)

$$\therefore \quad \frac{SM}{2} = PM = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (-1-1)^2}}{2}$$

$$\frac{SM}{2} = PM = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$PM^2 = \frac{5}{4}$$

இப்போது தொலைவுக்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$PM^2 = (x-2)^2 + \left(\frac{x-4}{2} + 1\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1, 3$$

x = 1 எனும்போது, $y = -\frac{3}{2}$

x = 3 எனும்போது, $y = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \text{ P -ன் ஆயத் தொலைவுகள் } \left(1, -\frac{3}{2}\right), \left(3, -\frac{1}{2}\right)$$

நேர்கோடு

நினைவில் கொள்க

- நேர்கோட்டின் சமன்பாடு என்பது $ax + by + c = 0$ என்ற நேரிய சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. இதில் a, b, மற்றும் c என்பன மெய்யெண்கள்.
- X -அச்சின் சமன்பாடு $y = 0$
- Y -அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$
- X -அச்சிற்கு இணையான எந்த ஒரு கோட்டின் சமன்பாடும் $y = b$ என்பதாகும்.
- Y -அச்சிற்கு இணையான எந்த ஒரு கோட்டின் சமன்பாடும் $x = a$ என்பதாகும்.
- ஒரு நேர்கோட்டின் சாய்வு வெட்டுத்துண்டு வடிவ சமன்பாடு $y = mx + c$, இதில் 'm' என்பது சாய்வு மற்றும் 'c' என்பது y வெட்டுத்துண்டு.
- $y - y_1 = m(x - x_1)$ என்பது நேர்கோட்டின் சாய்வு – ஒரு புள்ளி வடிவச் சமன்பாடு ஆகும். இதில் 'm' என்பது சாய்வு மற்றும் (x_1, y_1) என்பது நேர்கோடு செல்லும் புள்ளி.
- $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ என்பது நேர்க்கோட்டின் இருபுள்ளி வடிவச் சமன்பாடு, இதில் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்பன நேர்கோடு செல்லும் புள்ளிகளாகும்.
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்பது நேர்கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவ சமன்பாடாகும். இதில் 'a' மற்றும் 'b' என்பன முறையே 'x' மற்றும் 'y' வெட்டுத்துண்டுகள்.
- ஆதி வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$
- (x, y) என்ற புள்ளியில் 'x' என்பது கிடை அச்சுத் தொலைவு மற்றும் 'y' என்பது செங்குத்து அச்சுத்தொலைவு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

5.17 (5, 7) என்ற புள்ளி வழி செல்வதும்
(i) X -அச்சுக்கு இணையாகவும்
(ii) Y -அச்சுக்கு இணையாகவும் அமைந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) X -அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = b$.
இது (5, 7) வழி செல்வதால், $b = 7$.
எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 7$.

(ii) Y -அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x = c$
இது (5, 7) வழி செல்வதால் $c = 5$
எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x = 5$.

5.18 பின்வரும் விவரங்களைப் பயன்படுத்தி நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
(i) சாய்வு 5 மற்றும் Y வெட்டுத்துண்டு – 9
(ii) சாய்வு கோணம் 45° மற்றும் Y வெட்டுத்துண்டு 11

தீர்வு :

(i) இங்கு, சாய்வு = 5,
y- வெட்டுத்துண்டு $c = -9$
எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
$y = mx + c$
$y = 5x - 9$ -லிருந்து, $5x - y - 9 = 0$

(ii) இங்கு, $\theta = 45°$, y-வெட்டுத்துண்டு $c = 11$
சாய்வு $m = \tan\theta = \tan 45° = 1$
எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
$y = mx + c$
$y = x + 11$ -லிருந்து $x - y + 11 = 0$

5.19 $8x - 7y + 6 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
$8x - 7y + 6 = 0$
$7y - 8x + 6$
(இதனை $y = mx + c$ வடிவத்திற்கு மாற்றவும்)

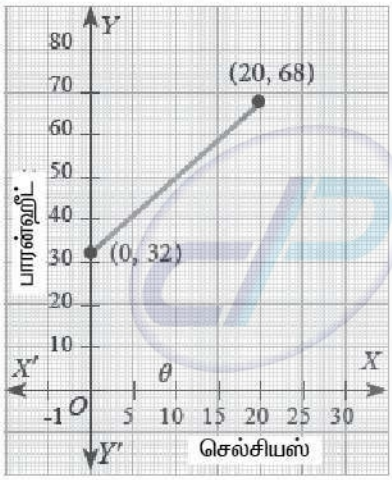
$$y = \frac{8}{7}x + \frac{6}{7} \quad \ldots (1)$$

(1) ஐ $y = mx + c$ உடன் ஒப்பிட,

சாய்வு $m = \frac{8}{7}$ மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு $c = \frac{6}{7}$

5.20 வரைபடமானது y அச்சில் பாரன்ஹீட் டிகிரி வெப்பநிலையையும் x -அச்சில் செல்சியஸ் டிகிரி வெப்பநிலையையும் குறிக்கிறது எனில், (a) கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு காண்க. (b) கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக. (c) பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை 25° செல்சியஸாக இருக்கும்போது பூமியின் சராசரி வெப்பநிலையைப் பாரன்ஹீட்டில் காணலாம்.

தீர்வு :



(a) படத்திலிருந்து சாய்வு

$$= \frac{y \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}{x \text{ ஆயத்தொலைவில் ஏற்படும் மாற்றம்}}$$

$$= \frac{68 - 32}{20 - 0} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} = 1.8$$

கோடானது Y-அச்சினை (0, 32) -யில் சந்திக்கிறது.

ஆகையால் சாய்வு $\frac{9}{5}$ மற்றும் y -வெட்டுத்துண்டு 32 ஆகும்.

(b) சாய்வு மற்றும் y -வெட்டுத்துண்டு வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி, நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதலாம்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = \frac{9}{5}x + 32$

(c) பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை 25° செல்சியஸ் ஆக இருக்கும்போது y -ஐ பாரன்ஹீட் டிகிரியில் காண $x = 25$ எனக் கொள்க.

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

$$y = \frac{9}{5}(25) + 32$$

$$y = 77$$

எனவே, பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை 77°F ஆகும்.

5.21 (3, – 4) என்ற புள்ளியின் வழி செல்வதும், $\frac{-5}{7}$ -ஐ சாய்வாக உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : $(x_1, y_1) = (3, -4)$ மற்றும் $m = \frac{-5}{7}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

புள்ளி-சாய்வு வடிவில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

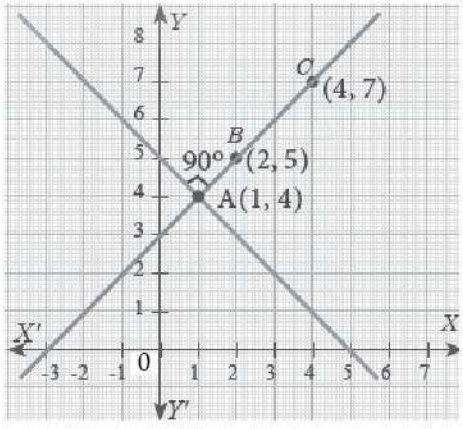
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 4 = -\frac{5}{7}(x - 3) \text{ என எழுதலாம்}$$

இதிலிருந்து, $5x + 7y + 13 = 0$

5.22 (2, 5) மற்றும் (4, 7) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், A(1, 4) என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A(1, 4), B(2, 5) மற்றும் C(4, 7).

BC -யின் சாய்வு $= \frac{7 - 5}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$

தேவையான நேர்கோட்டின் சாய்வு m என்க.

இந்த நேர்கோடு BC -க்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

எனவே, $m \times 1 = -1 \Rightarrow m = -1$

இக்கோடானது A(1, 4) வழி செல்வதால்,

தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = -1(x - 1)$$
$$y - 4 = -x + 1$$

எனவே, $x + y - 5 = 0$

5.23 **(5, – 3) மற்றும் (7, – 4) என்ற இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.**

தீர்வு : (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைப்பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{y + 3}{-4 + 3} = \frac{x - 5}{7 - 5}$$

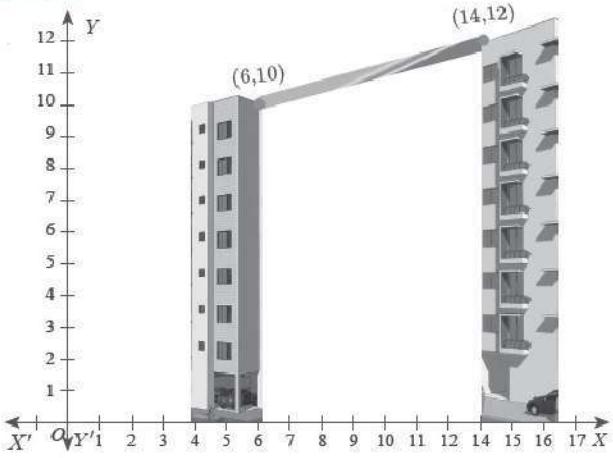
இதிலிருந்து,

$$2y + 6 = -x + 5$$

எனவே, $x + 2y + 1 = 0$ என்பது தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.

5.24 **வெவ்வேறு உயரங்கள் கொண்ட இரண்டு கட்டடங்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரெதிராக உள்ளன. ஒரு கனமான கம்பியானது கட்டடங்களின் மேற்புறங்களை (6, 10) என்ற புள்ளியிலிருந்து (14, 12) என்ற புள்ளி வரை இணைக்கிறது எனில், கம்பியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

தீர்வு :



கட்டங்களின் மேற்புறங்களில் உள்ள புள்ளிகள் A(6, 10) மற்றும் B(14, 12) என்க.

A(6, 10), மற்றும் B(14, 12) என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் இரும்புக் கம்பியின் நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$ ஆகும்.

எனவே $\frac{y - 10}{12 - 10} = \frac{x - 6}{14 - 6}$

$$\frac{y - 10}{2} = \frac{x - 6}{8}$$

எனவே, $x - 4y + 34 = 0$

ஆகவே, இரும்புக் கம்பியின் சமன்பாடு

$x - 4y + 34 = 0$

5.25 **ஆய அச்சுகளுடன் சமமாகவும், எதிர் குறியும் உடைய வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்படுத்தி (5, 7) என்ற புள்ளி வழி செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.**

தீர்வு :

x -வெட்டுத்துண்டு 'a' மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு '– a' என்க.

வெட்டுத்துண்டு வடிவில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1 \quad \text{(இங்கே, } b = -a\text{)}$$

எனவே, $x - y = a$ ... (1)

(1) ஆனது (5, 7) வழிச் செல்வதால், $5 - 7 = a$ -லிருந்து $a = -2$

ஆகவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$x - y = -2$ அதாவது $x - y + 2 = 0$

5.26 **$4x - 9y + 36 = 0$ என்ற நேர்கோடு ஆய அச்சுகளில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டு சமன்பாடு

$$4x - 9y + 36 = 0$$

எனவே, $4x - 9y = -36$

இருபுறமும் – 36 –ஆல் வகுக்க, $\frac{x}{-9} + \frac{y}{4} = 1$ ... (1)

(1) –ஐ வெட்டுத்துண்டு வடிவத்துடன் ஒப்பிட, x-வெட்டுத்துண்டு $a = -9$; y-வெட்டுத்துண்டு $b = 4$.

5.27 **ஓர் அலைபேசி மின்கலத்தின் சக்தி 100% இருக்கும்போது (battery power) அலைபேசியைப் பயன்படுத்தத் தொடங்குகிறோம். x மணிநேரம் பயன்படுத்திய பிறகு மீதி இருக்கும் மின்கலத்தின் சக்தி y சதவீதம் (தசமத்தில்) ஆனது $y = -0.25x + 1$ ஆகும்.**

(i) இந்தச் சமன்பாட்டிற்கான வரைபடம் வரைக.

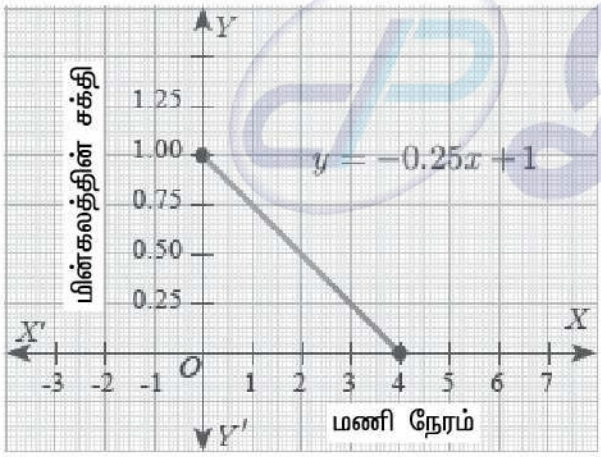
(ii) எத்தனை மணி நேரத்திற்குப் பிறகு மின்கலத்தின் சக்தி 40% ஆகக் குறைந்திருக்கும் எனக் காண்க.

(iii) மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியை இழக்க எடுத்துக்கொள்ளும் கால அளவு எவ்வளவு?



தீர்வு :

(i)



(ii) மின்கலச் சக்தி 40% எனில், நேரத்தைக் கணக்கிட, $y = 0.40$ என எடுத்துக் கொள்க.

$0.40 = -0.25x + 1$ -லிருந்து $0.25x = 0.60$

நாம் பெறுவது $x = \frac{0.60}{0.25} = 2.4$ மணி

(iii) மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியை இழந்துவிட்டால் $y = 0$ எனக் கிடைக்கும்

எனவே, $0 = -0.25x + 1$ -லிருந்து $0.25x = 1$

எனவே $x = 4$ மணி

ஆகவே, நான்கு மணி நேரத்திற்குப் பின்பு அலைபேசியின் மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியையும் இழக்கிறது.

5.28 (– 3, 8) என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், ஆய அச்சுகளின் மிகை வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 7 உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

a, b என்பன வெட்டுத்துண்டுகள் எனில் $a + b = 7$ அல்லது $b = 7 - a$

வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots (1)$$

ஆகவே, $\frac{x}{a} + \frac{y}{7-a} = 1$

இக்கோடானது, (– 3, 8) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$\frac{-3}{a} + \frac{8}{7-a} = 1$ இதிலிருந்து $-3(7 - a) + 8a = a(7 - a)$

$-21 + 3a + 8a = 7a - a^2$

ஆகவே, $a^2 + 4a - 21 = 0$

இதனைத் தீர்ப்பதன் மூலம் $(a - 3)(a + 7) = 0$

$a = 3$ அல்லது $a = -7$

a என்பது மிகை எண் என்பதால் $a = 3$ மற்றும் $b = 7 - a = 7 - 3 = 4$

எனவே, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

ஆகவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $4x + 3y - 12 = 0$.

5.29 கிழக்கு நிழற்சாலை மற்றும் குறுக்குச் சாலைகளால் ஒரு வட்ட வடிவத் தோட்டம் சூழப்பட்டுள்ளது. குறுக்குச் சாலையானது வடக்கு தெருவை D -யிலும், கிழக்குச் சாலையை E -யிலும் சந்திக்கிறது. தோட்டத்திற்கு A(3, 10) என்ற புள்ளியில் AD ஆனது தொடுகோடாக அமைகிறது. படத்தைப் பயன்படுத்தி

(a) பின்வருவனவற்றின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(i) கிழக்கு நிழற்சாலை

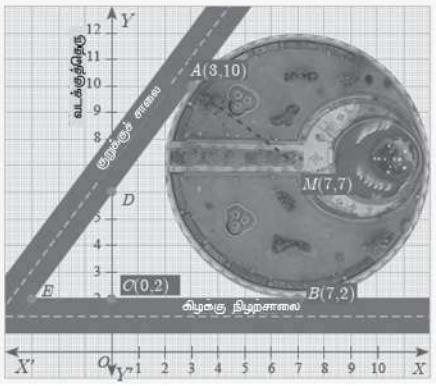
(ii) வடக்குத் தெரு

(iii) குறுக்குச்சாலை

(b) குறுக்குச்சாலை கீழ்க்கண்டவற்றைச் சந்திக்கின்ற புள்ளியைக் காண்க.

(i) வடக்குத் தெரு

(ii) கிழக்கு நிழற்சாலை



தீர்வு :

(a) (i) கிழக்கு நிழற்சாலையானது C(0, 2) மற்றும் B(7, 2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடாகும். எனவே இரு புள்ளி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி கிழக்கு நிழற்சாலையின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-2}{2-2} = \frac{x-0}{7-0}$$

$$\frac{y-2}{0} = \frac{x}{7}$$ எனவே, $y = 2$ ஆகும்.

(ii) D மற்றும் C(0, 2) என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைகிறது எனில் புள்ளி D -யின் x ஆயத் தொலைவு = 0 ஆகும்.

ஆகவே, வடக்கு தெருவிலுள்ள எந்தப் புள்ளிக்கும் x -யின் ஆயத் தொலைவு = 0 ஆகும்.

எனவே, வடக்கு தெருவின் சமன்பாடு $x = 0$.

(iii) குறுக்குச் சாலையின் சமன்பாட்டைக் காணுதல்

வட்டவடிவத் தோட்டத்தின் மையம் M -யின் ஆயப்புள்ளி (7, 7) மற்றும் A -யின் ஆயப்புள்ளி (3, 10) ஆகும்.

MA -யின் சாய்வு m_1 எனில்,

$m_1 = \frac{10-7}{3-7} = \frac{-3}{4}$.

குறுக்குச் சாலையானது, MA -க்கு செங்குத்தாக உள்ளது. எனவே, குறுக்குச் சாலையின் சாய்வு m_2 எனில்,

$m_1 m_2 = -1$ லிருந்து $\frac{-3}{4} m_2 = -1$

எனவே, $m_2 = \frac{4}{3}$.

குறுக்குச் சாலையானது, சாய்வு $\frac{4}{3}$ மற்றும் A(3, 10) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்கிறது.

எனவே, குறுக்குச் சாலையின் சமன்பாடு

$$y - 10 = \frac{4}{3}(x - 3)$$

$$3y - 30 = 4x - 12$$

$$4x - 3y + 18 = 0$$

(b) (i) குறுக்குச் சாலை மற்றும் வடக்குத் தெரு சந்திக்கும் புள்ளியைக் காணுதல்.

D (0, k) என்பது குறுக்குச் சாலையின் மேல் உள்ள புள்ளி ஆகும்.

எனவே, $x = 0, y = k$ என குறுக்கு சாலையின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$0 - 3k + 18 = 0$$

$$k = 6$$

எனவே, D ஆனது (0, 6) ஆகும்.

(ii) குறுக்குச் சாலை மற்றும் கிழக்கு நிழற்சாலை சந்திக்கும் புள்ளியைக் காணுதல்.

E –யின் ஆயப்புள்ளி (q, 2) என்க.

$x = q$, $y = 2$ எனக் குறுக்குச் சாலை சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$4q - 6 + 18 = 0$$

$$4q = -12$$

எனவே, $q = -3$

ஆகவே, E என்ற புள்ளி (– 3, 2) ஆகும்.

ஆதலால், குறுக்கு சாலையானது வடக்கு தெருவை D(0, 6) என்ற புள்ளியிலும், கிழக்கு நிழற்சாலையை E (– 3, 2) என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கிறது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. அட்டவணையில் விடுபட்ட இடங்களைப் பூர்த்தி செய்க.

நேர்கோட்டு வடிவத்தின் சமன்பாடு	கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள்	நேர்கோட்டு வடிவத்தின் பெயர்
$y = mx + c$	சாய்வு = m, y வெட்டுத் துண்டு = c	...
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	...	...
...	வெட்டுத் துண்டுகள்	வெட்டுத் துண்டு வடிவம்

விடை:

$y = mx + c$	சாய்வு m, y -வெட்டுத் துண்டு 'c'	சாய்வு-வெட்டுத் துண்டு வடிவம்
$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் போது	இருபுள்ளி வடிவம்
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	வெட்டுத் துண்டுகள் கொடுக்கப் பட்டிருப்பின்	வெட்டுத் துண்டு வடிவம்

2. விடுபட்ட பகுதியை பூர்த்தி செய்க.

எண்	சமன்பாடு	சாய்வு	x வெட்டுத் துண்டு	y வெட்டுத் துண்டு
1	$3x - 4y + 2 = 0$	...	...	...
2	$y = 14x$	...	...	0
3	...	...	2	-3

விடை:

1. $3x - 4y + 2 = 0$

$\Rightarrow$ சாய்வு $= \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$3x - 4y = -2$

$\frac{x}{\left(-\frac{2}{3}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 \Rightarrow$ x -வெட்டுத்துண்டு $-\frac{2}{3}$

y -வெட்டுத்துண்டு $\frac{1}{2}$

2. $y = 14x \Rightarrow$ சாய்வு $m = 14$

$[\because y = mx + c$ வடிவம்]

x -வெட்டுத்துண்டு '0'

y -வெட்டுத்துண்டு '0'

3. கொடுக்கப்பட்டது: 'x' வெட்டுத்துண்டு 2, 'y' வெட்டுத்துண்டு -3

கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$

$3x - 2y - 6 = 0$

சிந்தனைக் களம்

1. Y-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் நேர்கோட்டினைச் சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு வடிவில் எழுத முடியுமா?

விடை:

Y -அச்சிற்கு இணையான எந்த ஒரு கோட்டின் சமன்பாடும் $x = a$ ஆகும்.

$\therefore$ இதை சாய்வு - வெட்டுத்துண்டு வடிவில் எழுத இயலாது.

பயிற்சி 5.3

1. (1, – 5) மற்றும் (4, 2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்வதும், கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு இணையானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (i) X-அச்சு (ii) Y-அச்சு

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (1, – 5) மற்றும் (4, 2)

(1, – 5), (4, 2) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி

$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-5+2}{2}\right)$

$= \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

(i) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ புள்ளி வழிச் செல்வதும்

X-அச்சிற்கு இணையானதுமான

கோட்டின் சமன்பாடு $y = b$.

அதாவது, $y = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2y + 3 = 0$.

(ii) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ புள்ளி வழிச் செல்வதும்

Y -அச்சிற்கு இணையானதுமான

கோட்டின் சமன்பாடு $x = a$.

அதாவது, $x = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 = 0$

2. $2(x - y) + 5 = 0$ என்ற நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் சாய்வு, சாய்வு கோணம் மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $2(x - y) + 5 = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y + 5 = 0$ என்பது $ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

$$\text{சாய்வு} = -\frac{a}{b} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\text{சாய்வு} = 1$$

அதாவது, $\tan\theta = 1 = \tan 45^\circ$

$$\theta = 45^\circ$$

$$2x - 2y + 5 = 0$$

$$2x - 2y = -5 \quad (-5 \text{ ஆல் வகுக்க})$$

$$\frac{x}{\left(-\frac{5}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{5}{2}\right)} = 1$$

y -வெட்டுத்துண்டு $\frac{5}{2}$

3. சாய்வு கோணம் 30° மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு -3 ஆகியவற்றைக் கொண்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சாய்வுக் கோணம் $\theta = 30^\circ$

$\therefore$ சாய்வு $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

y -வெட்டுத்துண்டு $c = -3$

கோட்டின் சாய்வு–வெட்டுத்துண்டு வடிவ சமன்பாடு

$$y = mx + c$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$$

$$\sqrt{3}y = x - 3\sqrt{3}$$

$$x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0$$

4. $\sqrt{3}x + (1 - \sqrt{3})y = 3$ என்ற நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் சாய்வு, y –வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடு $\sqrt{3}x + (1 - \sqrt{3})y = 3$.

$\sqrt{3}x + (1 - \sqrt{3})y - 3 = 0$ என்பது

$ax + by + c = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

$$\text{சாய்வு} = -\frac{a}{b}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$$

$\sqrt{3}x + (1 - \sqrt{3})y = 3$ [‘3’ ஆல் வகுக்க]

$$\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{(1 - \sqrt{3})}{3}y = 1$$

$$\frac{x}{(\sqrt{3})} + \frac{y}{\left(\frac{3}{1 - \sqrt{3}}\right)} = 1$$

$$\text{y வெட்டுத்துண்டு} = \frac{3}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + 3\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{-2}$$

5. $(-2, 3)$ மற்றும் $(8, 5)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடானது, $y = ax + 2$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானது எனில், ‘a’ -யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$(-2, 3)$ மற்றும் $(8, 5)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3 - 5}{-2 - 8} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5} = m_1$$

$y = ax + 2$ என்ற கோட்டின் சாய்வு ‘a’ $= m_2$

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதால்

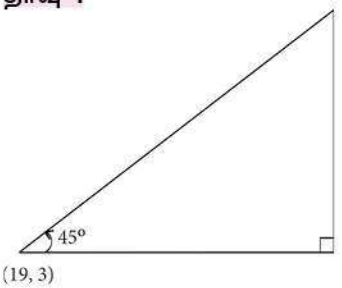
$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\frac{1}{5} \times a = -1$$

$$a = -5$$

6. (19, 3) என்ற புள்ளியை அடியாகக் கொண்ட குன்றானது செங்கோண முக்கோண வடிவில் உள்ளது. தரையுடன் குன்று ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் 45° எனில், குன்றின் அடி மற்றும் உச்சியை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :



குன்றின் அடி (19, 3) ல் உள்ளது

சாய்வுக் கோணம் $\theta = 45^\circ$

சாய்வு $m = \tan 45^\circ = 1$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதும் சாய்வு 'm' உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Rightarrow \quad y - 3 = 1(x - 19)$$
$$y - 3 = x - 19 \Rightarrow x - y - 16 = 0$$

7. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$

(ii) (2, 3) மற்றும் (– 7, – 1)

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ மற்றும் $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y - \frac{2}{3}}{-2 - \frac{2}{3}} = \frac{x - 2}{-\frac{1}{2} - 2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3y - 2}{-6 - 2} = \frac{2x - 4}{-1 - 4}$$

$$\Rightarrow \quad -5(3y - 2) = -8(2x - 4)$$

$$\Rightarrow \quad -15y + 10 = -16x + 32$$

$$\Rightarrow 16x - 15y - 22 = 0$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (2, 3) மற்றும் (– 7, – 1)

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 3}{-1 - 3} = \frac{x - 2}{-7 - 2}$$

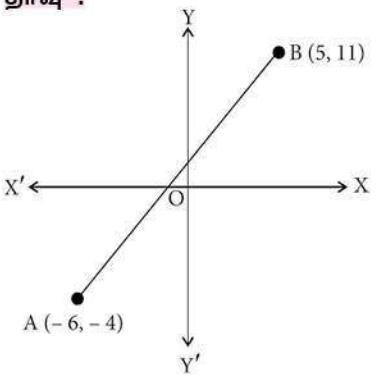
$$9(y - 3) = 4(x - 2)$$

$$9y - 27 = 4x - 8$$

$$4x - 9y + 19 = 0$$

8. ஒரு பூனை xy -தளத்தில் (– 6, – 4) என்ற புள்ளியில் உள்ளது. (5, 11) என்ற புள்ளியில் ஒரு பால் புட்டி வைக்கப்பட்டுள்ளது. பூனை மிகக் குறுகிய தூரம் பயணித்துப் பால் அருந்த விரும்புகிறது எனில், பாலைப் பருகுவதற்குத் தேவையான பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :



A என்ற புள்ளியில் பூனை இருப்பதாகவும், B என்ற புள்ளியில் பால்புட்டி வைக்கப்பட்டுள்ளதாகவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்டது: A (–6, – 4), B (5, 11)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 4}{11 + 4} = \frac{x + 6}{5 + 6}$$

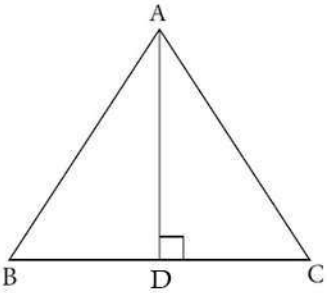
$$11(y + 4) = 15(x + 6)$$

$$11y + 44 = 15x + 90$$

$$15x - 11y + 46 = 0$$

9. A (6, 2), B (– 5, – 1) மற்றும் C (1, 9) -ஐ முனைகளாகக் கொண்ட ΔABC -யின் முனை A-யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோடு மற்றும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள்

A (6, 2), B (– 5, – 1) மற்றும் C (1, 9)

A வழிச்செல்லும் நடுக்கோடு

D என்பது BC -ன் நடுப்புள்ளி என்க.

BC -ன் நடுப்புள்ளி = $D\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= D\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-1+9}{2}\right)$

$= D(-2, 4)$

AD என்பது நடுக்கோடு

AD -ன் சமன்பாடு $\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

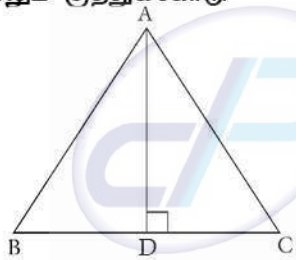
$\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-6}{-2-6}$

$\frac{y-2}{2} = \frac{x-6}{-8}$

$-4y + 8 = x - 6$

$x + 4y - 14 = 0$

A வழிச் செல்லும் குத்துக்கோடு



'A'வழிச்செல்லும் நடுக்கோடு BC -க்கு செங்குத்தாகவும் உள்ளது.

இப்போது,

BC -ன் சாய்வு $= \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{-1-9}{-5-1} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$

$\therefore$ குத்துக்கோட்டின் சாய்வு $= -\frac{3}{5}$

A (6, 2) என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதும், சாய்வு $-\frac{3}{5}$ கொண்டதுமான குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 6)$

$5y - 10 = -3x + 18$

$3x + 5y - 28 = 0$

10. (– 1, 2) என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், சாய்வு $\frac{-5}{4}$ உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி (– 1, 2),

சாய்வு $m = -\frac{5}{4}$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் சாய்வு 'm' கொண்டதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\frac{5}{4}(x + 1)$

$4y - 8 = -5x - 5$

$5x + 4y - 3 = 0$

11. நீங்கள் ஒரு பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்யும்போது, x வினாடிகளுக்குப் பிறகு பதிவிறக்கம் செய்ய வேண்டிய மீதமுள்ள பாடலின் சதவீதம் (மெகா பைட்டில்) y ஆனது (தசமத்தில்) $y = -0.1x + 1$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கப்பட்டால்,

(i) சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைக.

(ii) பாடலின் மொத்த MB அளவைக் காண்க.

(iii) 75% பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்ய எவ்வளவு வினாடிகள் ஆகும்?

(iv) எத்தனை வினாடிகள் கழித்துப் பாடல் முழுமையாகப் பதிவிறக்கம் செய்யப்படும்?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $y = -0.1x + 1$. இதில் 'x' என்பது நேரத்தையும் (வினாடிகளில்) 'y' என்பது மீதமுள்ள பாடலின் சதவீதத்தையும் (மெகாபைட்டில்) குறிக்கிறது.

(i)

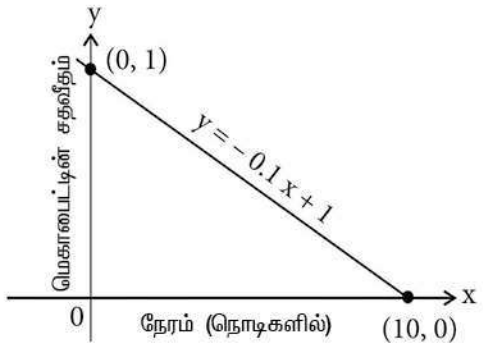
$y = -0.1x + 1$ ன் வரைபடம்

$y = -\frac{x}{10} + 1$

$10y = -x + 10$

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள்

x	0	10
y	1	0



(ii) $y = -0.1x + 1$

தொடக்கத்தில் நேரம் $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ பாடலின் மொத்த MB அளவு 1.

(iii) 75% பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்ய எவ்வளவு வினாடிகள் ஆகும்?

$\therefore$ 25% மீதமுள்ளது $\Rightarrow$ $y = 0.25$

$$y = -0.1x + 1$$
$$0.25 = -0.1x + 1$$
$$0.25 - 1 = -0.1x$$
$$x = \frac{-0.75}{-0.1} = \frac{75}{10} = 7.5 \text{ நொடிகள்}$$

(iv) எத்தனை வினாடிகள் கழித்து முழுமையாகப் பதிவிறக்கம் செய்யப்படும்?

$\therefore$ மீதமுள்ள மெகாபைட்டுகள் 0

$$y = 0.1x + 1$$
$$0 = -0.1x + 1$$
$$0.1x = 1$$
$$x = \frac{1}{0.1} = 10 \text{ நொடிகள்}$$

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y-வெட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) 4, – 6 **(ii)** $-5, \frac{3}{4}$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட வெட்டுத்துண்டுகள் 4, – 6

$a = 4, b = -6$

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$$
$$3x - 2y - 12 = 0$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட வெட்டுத்துண்டுகள் $-5, \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow a = -5, b = \frac{3}{4}$$

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{-5} + \frac{4y}{3} = 1$$
$$\Rightarrow 3x - 20y = -15$$
$$\Rightarrow 3x - 20y + 15 = 0$$

13. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஆய அச்சுகளின் மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.

(i) $3x - 2y - 6 = 0$ **(ii)** $4x + 3y + 12 = 0$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோடு $3x - 2y - 6 = 0$

$\Rightarrow 3x - 2y = 6$

6 ஆல் வகுக்க

$$\frac{3x}{6} - \frac{2y}{6} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-3)} = 1 \text{ என்பது}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ என்ற வடிவில் உள்ளது.}$$

$\therefore$ x வெட்டுத்துண்டு $= a = 2$

y வெட்டுத்துண்டு $= b = -3$

(ii) $4x + 3y + 12 = 0$

$\Rightarrow 4x + 3y = -12$

– 12 ஆல் வகுக்க

$$\frac{4x}{-12} + \frac{3y}{-12} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(-3)} + \frac{y}{(-4)} = 1 \text{ என்பது}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ என்ற வடிவில் உள்ளது.}$$

$\therefore$ x –வெட்டுத்துண்டு $= a = -3$

y –வெட்டுத்துண்டு $= b = -4$

14. நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(i) (1, – 4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் 2 : 5

(ii) (– 8, 4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டுகள் சமம்

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்டது: வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் 2 : 5

அதாவது, $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$

$$a = \frac{2b}{5}$$

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{2b}{5}\right)} + \frac{y}{b} = 1$$

$\Rightarrow \quad \frac{5x}{2b} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \quad 5x + 2y = 2b$

இது $(1, -4)$ புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$5(1) + 2(-4) = 2b$

$5 - 8 = 2b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

$a = \frac{2b}{5} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)}{5} = -\frac{3}{5}$

$\therefore$ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{3}{5}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{3}{2}\right)} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{5x}{-3} + \frac{2y}{-3} = 1$

$\Rightarrow \quad 5x + 2y + 3 = 0$

(ii) கொடுக்கப்பட்டது வெட்டுத்துண்டுகள் சமம்

$\therefore \quad a = b$

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

$\Rightarrow \quad x + y = a$

இது $(-8, 4)$ புள்ளி வழிச் செல்வதால்

$\therefore \quad -8 + 4 = a$

$\Rightarrow \quad a = -4$

எனில், $b = -4$ [$\because$ $a = b$]

$\therefore$ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$

$\Rightarrow \quad x + y + 4 = 0$

நேர்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாடு

நினைவில் கொள்க

$ax + by + c = 0$ என்பது நேர்கோட்டின் பொதுவடிவச் சமன்பாடு ஆகும். இதில் a, b, c என்பன மெய்யெண்கள்.

- இணை கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு:

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற இருகோடுகள் இணை எனில், $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ என்பதாகும்.

- செங்குத்துக் கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு:

  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ஆகிய கோடுகள் செங்குத்து எனில், $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ என்பதாகும்.

- $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

  சாய்வு $= -\frac{x\text{ன் கெழு}}{y\text{ன் கெழு}} = -\frac{a}{b}$

எடுத்துக்காட்டு

5.30 $6x + 8y + 7 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$6x + 8y + 7 = 0$$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{-x \text{-யின் கெழு}}{y \text{-யின் கெழு}}$$

$$= -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

எனவே, நேர்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{3}{4}$ ஆகும்.

5.31 (i) $3x - 7y = 11$ -க்கு இணையான

(ii) $2x - 3y + 8 = 0$ -க்கு செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$3x - 7y = 11$$

$$\Rightarrow \quad 3x - 7y - 11 = 0$$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$$

இணை கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் என்பதால் $3x - 7y = 11$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் சாய்வு $\frac{3}{7}$ ஆகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$2x - 3y + 8 = 0$$

$$\text{சாய்வு } m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான நேர்கோட்டு சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 என்பதால் $2x - 3y + 8 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு $= \frac{-1}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{2}$

5.32 $2x + 3y - 8 = 0$, $4x + 6y + 18 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இணை எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $2x + 3y - 8 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{-x \text{ –யின் கெழு}}{y \text{ – யின் கெழு}}$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

$4x + 6y + 18 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

இங்கு, $m_1 = m_2$

அதாவது, சாய்வுகள் சமம். எனவே, இவ்விரு நேர்கோடுகளும் இணையாகும்.

5.33 $x - 2y + 3 = 0$, $6x + 3y + 8 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$x - 2y + 3 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$6x + 3y + 8 = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

இங்கு, $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$

சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 ஆகும்.

ஆகவே, இவ்விரு நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாகும்.

5.34 $3x - 7y = 12$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் $(6, 4)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : $3x - 7y - 12 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x - 7y + k = 0$.

இந்த நேர்கோடானது $(6, 4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$3(6) - 7(4) + k = 0$$

$$k = 28 - 18 = 10$$

எனவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x - 7y + 10 = 0$

5.35 $y = \frac{4}{3}x - 7$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும், $(7, -1)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = \frac{4x}{3} - 7$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$4x - 3y - 21 = 0$ என மாற்றி எழுதலாம்.

$4x - 3y - 21 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $3x + 4y + k = 0$

இது $(7, -1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால் $21 - 4 + k = 0$ இதிலிருந்து, $k = -17$

ஆகவே, தேவையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
$3x + 4y - 17 = 0$

5.36 $4x + 5y = 13, x - 8y + 9 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், Y-அச்சுக்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகள்

$4x + 5y - 13 = 0$ ... (1)

$x - 8y + 9 = 0$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) -ஐ தீர்ப்பதின் மூலம் இக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காணலாம்.

$$\begin{array}{ccccc} x & & y & & 1 \\ 5 & -13 & 4 & 5 & \\ -8 & 9 & 1 & -8 & \end{array}$$

$$\frac{x}{45-104} = \frac{y}{-13-36} = \frac{1}{-32-5}$$

$$\frac{x}{-59} = \frac{y}{-49} = \frac{1}{-37}$$

$$x = \frac{59}{37},\ y = \frac{49}{37}$$

எனவே, இரு நேர்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $(x, y) = \left(\frac{59}{37}, \frac{49}{37}\right)$

Y -அச்சுக்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x = c$.

இக்கோடானது $(x, y) = \left(\frac{59}{37}, \frac{49}{37}\right)$ வழிச் செல்கிறது.

எனவே, $c = \frac{59}{37}$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x = \frac{59}{37}$

எனவே $37x - 59 = 0$

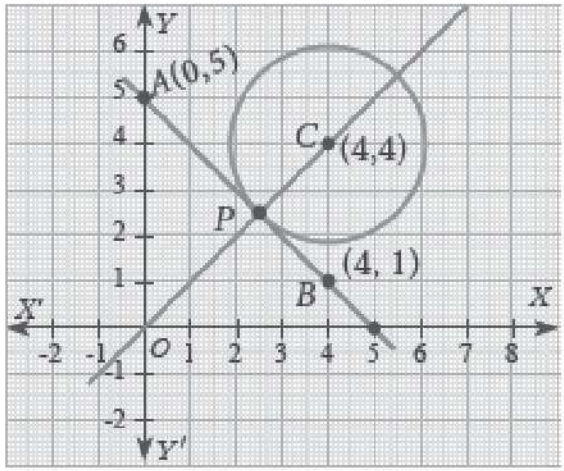
5.37 A (0, 5) மற்றும் B (4, 1) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடானது C (4, 4)-ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில்,

(i) AB என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) C வழியாகவும் AB என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(iii) AB என்ற கோடானது வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு :



(i) A (0, 5) மற்றும் B (4, 1) என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் AB என்ற கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y-5}{1-5} = \frac{x-0}{4-0}$$

$$4(y - 5) = -4x$$

ஆகவே, $y - 5 = -x$

$$x + y - 5 = 0$$

(ii) AB - என்ற கோட்டின் சமன்பாடு $x + y - 5 = 0$. இந்த நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு $x - y + k = 0$ ஆகும்.

இக்கோடானது மையம் (4, 4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால், $4 - 4 + k = 0$

எனவே, $k = 0$

C வழியாக AB -க்கு செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$x - y = 0$ ... (2)

(iii) $x + y - 5 = 0$ மற்றும் $x - y = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியே AB என்ற கோடானது வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி ஆகும்.

$x + y - 5 = 0$ மற்றும் $x - y = 0$ இவற்றைத் தீர்ப்பதன் மூலம்

$x = \frac{5}{2}$ மற்றும் $y = \frac{5}{2}$

எனவே, தொடுபுள்ளி P -யின் ஆயப் புள்ளிகள் $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1.

வ. எண்	சமன்பாடுகள்	இணையானதா அல்லது செங்குத்தானதா?
1	$5x + 2y + 5 = 0$ $5x + 2y - 3 = 0$	
2	$3x - 7y - 6 = 0$ $7x + 3y + 8 = 0$	
3	$8x - 10y + 11 = 0$ $4x - 5y + 16 = 0$	
4	$2y - 9x - 7 = 0$ $27y + 6x - 21 = 0$	

விடை:

1. $5x + 2y + 5 = 0 \quad a_1 = 5, \ b_1 = 2$
$5x + 2y - 3 = 0 \quad a_2 = 5, \ b_2 = 2$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{5} = 1, \ \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore \ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ கோடுகள் இணையானவை.

2. $3x - 7y - 6 = 0 \quad a_1 = 3, \ b_1 = -7$
$7x + 3y + 8 = 0 \quad a_2 = 7, \ b_2 = 3$
$a_1 a_2 + b_1 b_2 = (3)(7) + (-7)(3) = 0$

$\therefore$ கோடுகள் செங்குத்தானவை.

3. $8x - 10y + 11 = 0 \quad a_1 = 8, \ b_1 = -10$
$4x - 5y + 16 = 0 \quad a_2 = 4, \ b_2 = -5$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-10}{-5} = 2$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ கோடுகள் இணையானவை.

4. $2y - 9x - 7 = 0 \quad a_1 = 2, \ b_1 = -9$
$27y + 6x - 21 = 0 \quad a_2 = 27, \ b_2 = 6$
$a_1 a_2 + b_1 b_2 = (2)(27) + (-9)(6) = 54 - 54 = 0$

$\therefore$ கோடுகள் செங்குத்தானவை.

சிந்தனைக் களம்

1. சாய்வு 1 என இருக்குமாறு எத்தனை நேர்கோடுகள் இருக்கும்?

விடை: பல கோடுகள்

2. இரு நேர்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

விடை: ஒன்று

3. $2x - 3y + 6 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் கோடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

விடை: பல கோடுகள்

பயிற்சி 5.4

1. பின்வரும் நேர்கோடுகளின் சாய்வைக் காண்க.

(i) $5y - 3 = 0$ **(ii)** $7x - \frac{3}{17} = 0$

தீர்வு :

(i) $5y - 3 = 0$

$y = \frac{3}{5}$

$y = (0)x + \frac{3}{5}$

சாய்வு $m = 0$

(அல்லது) $ax + by + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

சாய்வு $= -\frac{a}{b}$

$= -\frac{0}{5} = 0$

(ii) $7x - \frac{3}{17} = 0$

$ax + by + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

சாய்வு $= -\frac{a}{b}$

$= -\frac{7}{0}$ = வரையறுக்கப்படாதது

2. (i) $y = 0.7x - 11$ -க்கு இணையாக

(ii) $x = -11$ -க்கு செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோடு $y = 0.7x - 11$ என்பது $y = mx + c$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

சாய்வு $m = 0.7$

$\therefore$ $y = 0.7x - 11$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் சாய்வு $m = 0.7$

($\because$ கோடுகள் இணை எனில் அவற்றின் சாய்வுகள் சமம்)

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோடு $x = -11$

$ax + by + c = 0$ உடன் ஒப்பிட

சாய்வு $m = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{0}$

= வரையறுக்கப்படாதது

$\therefore x = -11$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு 0.

3. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகள் இணையானவையா அல்லது செங்குத்தானவையா எனச் சோதிக்கவும்.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{1}{7}=0$ மற்றும் $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{1}{10}=0$

(ii) $5x + 23y + 14 = 0$ மற்றும் $23x - 5y + 9 = 0$.

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{1}{7}=0$

மற்றும் $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{1}{10}=0$

$a_1=\frac{1}{3}, b_1=\frac{1}{4}$ மற்றும் $a_2=\frac{2}{3}, b_2=\frac{1}{2}$

இப்போது, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ என்பதால், கோடுகள் இணையானவை.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$5x + 23y + 14 = 0$ மற்றும் $23x - 5y + 9 = 0$

$\therefore$ $a_1 = 5, b_1 = 23$ மற்றும் $a_2 = 23, b_2 = -5$

இப்போது $a_1a_2 + b_1b_2 = (5)(23) + (23)(-5) = 0$

$\therefore$ கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

4. $12y = -(p + 3)x + 12$, $12x - 7y = 16$ ஆகிய நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் 'p'-யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$12y = -(p + 3)x + 12$ மற்றும்

$12x - 7y = 16$

$12y = -(p + 3)x + 12$

$\Rightarrow$ $(p + 3)x + 12y - 12 = 0$ ... (1)

$12x - 7y - 16 = 0$ ... (2)

$\therefore$ $a_1 = (p + 3), b_1 = 12$ மற்றும் $a_2 = 12, b_2 = -7$

கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதால்

$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

$(p + 3)(12) + (12)(-7) = 0$

$12[p + 3 - 7] = 0$

$p - 4 = 0$

$p = 4$

5. Q(3, – 2) மற்றும் R(– 5, 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிற்கு இணையானதும், P(– 5, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

முனைப்புள்ளிகள் Q(3, – 2) மற்றும் R(– 5, 4)

QR என்ற கோட்டின் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$= \frac{-2-4}{3+5} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$

QR க்கு இணையான கோட்டின் சாய்வு $-\frac{3}{4}$

$\therefore$ P(– 5, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் சாய்வு $-\frac{3}{4}$ கொண்டதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\frac{3}{4}(x + 5)$

$4y - 8 = -3x - 15$

$3x + 4y + 7 = 0$

6. (6, 7) மற்றும் (2, – 3) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் (6, – 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

(6, 7) மற்றம் (2, – 3) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{7+3}{6-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = m$

செங்குத்துக்கோட்டின் சாய்வு

$-\frac{1}{m} = -\frac{1}{(5/2)} = -\frac{2}{5}$

(6, – 2) புள்ளி வழிச்செல்வதும், சாய்வு $-\frac{2}{5}$ உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$y - y_1 = m(x - x_1)$

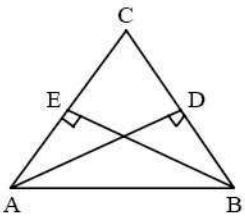
$y + 2 = -\frac{2}{5}(x - 6)$

$5y + 10 = -2x + 12$

$2x + 5y - 2 = 0$

7. ΔABC -யின் முனைகள் A(– 3, 0) B(10, – 2) மற்றும் C(12, 3) எனில், A மற்றும் B -யிலிருந்து முக்கோணத்தின் எதிர்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்ட முனைப்புள்ளிகள்

A(– 3, 0), B(10, – 2) மற்றும் C(12, 3)

BC -ன் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2-3}{10-12} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

குத்துக்கோடு AD, BC க்குச் செங்குத்தாகவும், புள்ளி A(– 3, 0) வழியும் செல்கிறது.

$\therefore$ AD -ன் சாய்வு $= -\frac{2}{5}$

AD -ன் சமன்பாடு $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = -\frac{2}{5}(x+3)$$
$$5y = -2x - 6$$
$$2x + 5y + 6 = 0$$

AC -ன் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0-3}{-3-12}$

$$= \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$$

குத்துக்கோடு BE, AC க்குச் செங்குத்தாகவும், புள்ளி B(10, – 2) வழியாகவும் செல்கிறது.

BE -ன் சாய்வு = –5

$\therefore$ BE -ன் சமன்பாடு $\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 2 = -5(x - 10)$$
$$y + 2 = -5x + 50$$
$$5x + y - 48 = 0$$

8. A(– 4, 2) மற்றும் B(6, – 4) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் மையக் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A(– 4, 2) மற்றும் B(6, – 4)

AB ன் நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$$= \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$$

AB ன் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2+4}{-4-6}$

$$= \frac{6}{-10} = \frac{-3}{5}$$

செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு $= \frac{5}{3}$

மையக்குத்துக்கோடு (1, – 1) புள்ளி வழிச் செல்வதும், சாய்வு $\frac{5}{3}$ ஐக் கொண்டதுமாக உள்ளது.

$\therefore$ மையக்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 1 = \frac{5}{3}(x - 1)$$
$$3y + 3 = 5x - 5$$
$$5x - 3y - 8 = 0$$

9. $7x + 3y = 10$, $5x - 4y = 1$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $13x + 5y + 12 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் $7x + 3y = 10$ மற்றும் $5x - 4y = 1$.

கோடுகள் வெட்டும்புள்ளியைக் காண இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க.

$$7x + 3y = 10 \quad \ldots (1)$$
$$5x - 4y = 1 \quad \ldots (2)$$

$(1) \times 4 \Rightarrow 28x + 12y = 40 \quad \ldots (3)$

$(2) \times 3 \Rightarrow 15x - 12y = 3 \quad \ldots (4)$

$(3) + (4) \Rightarrow 43x = 43$

$$x = \frac{43}{43} = 1$$

$x = 1$ என்பதை (1) ல் பிரதியிட,

$7(1) + 3y = 10 \Rightarrow y = 1$

வெட்டும்புள்ளி (1, 1)

$13x + 5y + 12 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு $-\frac{a}{b} = \frac{-13}{5}$

$\therefore$ இணைகோட்டின் சாய்வு $\frac{-13}{5}$

(1, 1) புள்ளி வழிச்செல்வதும் சாய்வு $\frac{-13}{5}$ உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = \frac{-13}{5}(x - 1)$$
$$5y - 5 = -13x + 13$$
$$13x + 5y - 18 = 0$$

10. $5x - 6y = 2$, $3x + 2y = 10$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும் $4x - 7y + 13 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் $5x - 6y = 2$ மற்றும் $3x + 2y = 10$.

கோடுகள் வெட்டும்புள்ளியைக் காண இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க.

$$5x - 6y = 2 \quad \ldots (1)$$
$$3x + 2y = 10 \quad \ldots (2)$$
$$(2) \times 3 \Rightarrow \quad 9x + 6y = 30 \quad \ldots (3)$$
$$5x - 6y = 2 \quad \ldots (1)$$
$$(3) + (1) \Rightarrow \quad 14x = 32$$
$$x = \frac{32}{14} = \frac{16}{7}$$

$x = \frac{16}{7}$ என (2) ல் பிரதியிட,

$$3\left(\frac{16}{7}\right) + 2y = 10$$
$$2y = 10 - \frac{48}{7} = \frac{22}{7}$$
$$y = \frac{11}{7}$$

$\therefore$ வெட்டும்புள்ளி $\left(\frac{16}{7}, \frac{11}{7}\right)$

$4x - 7y + 13 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

$$-\frac{a}{b} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு $-\frac{7}{4}$.

$\left(\frac{16}{7}, \frac{11}{7}\right)$ புள்ளி வழிச் செல்வதும், சாய்வு $-\frac{7}{4}$ கொண்டதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{11}{7} = \frac{-7}{4}\left(x - \frac{16}{7}\right)$$
$$\frac{7y - 11}{7} = \frac{-7x}{4} + 4$$
$$28y - 44 = -49x + 112$$
$$49x + 28y - 156 = 0$$

11. $7x - 3y = -12$ மற்றும் $2y = x + 3$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும், $3x + y + 2 = 0$ மற்றும் $x - 2y - 4 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$3x + y + 2 = 0$ மற்றும் $x - 2y - 4 = 0$ ஆகியவற்றைத் தீர்க்க.

$$3x + y = -2 \quad \ldots (1)$$
$$x - 2y = 4 \quad \ldots (2)$$
$$(1) \times 2 \Rightarrow \quad 6x + 2y = -4 \quad \ldots (3)$$
$$(3) + (2) \Rightarrow \quad 7x = 0$$
$$x = 0$$

$x = 0$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$3(0) + y = -2$$
$$y = -2$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றின் வெட்டும்புள்ளி $(0, -2)$

$7x - 3y = -12$ மற்றும் $2y = x + 3$ ஆகியவற்றைத் தீர்க்க.

$$7x - 3y = -12 \quad \ldots (5)$$
$$x - 2y = -3 \quad \ldots (2)$$
$$(2) \times 7 \Rightarrow \quad 7x - 14y = -21 \quad \ldots (6)$$
$$(5) \Rightarrow \quad 7x - 3y = -12$$
$$(6) - (5) \Rightarrow \quad -11y = -9$$
$$y = \frac{9}{11}$$

$y = \frac{9}{11}$ என (2) ல் பிரதியிட,

$$x - 2\left(\frac{9}{11}\right) = -3$$
$$x = -3 + \frac{18}{11}$$
$$= \frac{-15}{11}$$

சமன்பாடுகள் (5), (2) ஆகியவற்றின் வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{-15}{11}, \frac{9}{11}\right)$

$(0, -2)$ மற்றும் $\left(\frac{-15}{11}, \frac{9}{11}\right)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y+2}{\frac{9}{11}+2} = \frac{x-0}{-\frac{15}{11}-0}$$

$$\frac{11(y+2)}{9+22} = \frac{-11x}{15}$$

$$15(y+2) = -31x$$

$$15y + 30 = -31x$$

$$31x + 15y + 30 = 0$$

12. $8x + 3y = 18$, $4x + 5y = 9$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் வழியாகவும், $(5, -4)$ மற்றும் $(-7, 6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$8x + 3y = 18$ மற்றும் $4x + 5y = 9$ ஆகியவற்றைத் தீர்க்க.

$$8x + 3y = 18 \quad \ldots (1)$$

$$4x + 5y = 9 \quad \ldots (2)$$

$(2) \times 2 \Rightarrow 8x + 10y = 18 \quad \ldots (3)$

$(1) \Rightarrow 8x + 3y = 18 \quad \ldots (1)$

$(3) - (1) \Rightarrow 7y = 0$

$$y = 0$$

(1) –ல் பிரதியிட,

$$8x + 3(0) = 18$$

$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

(1), (2) ஆகியவை வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

$(5, -4)$ மற்றும் $(-7, 6)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{5-7}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) = (-1, 1)$$

$\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ மற்றும் $(-1, 1)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x - \frac{9}{4}}{-1 - \frac{9}{4}}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{4x - 9}{-13}$$

$$-13y = 4x - 9$$

$$4x + 13y - 9 = 0$$

பயிற்சி 5.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்:

1. $(-5, 0)$, $(0, -5)$ மற்றும் $(5, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) 0 ச. அலகுகள் (2) 25 ச. அலகுகள்
(3) 5 ச. அலகுகள் (4) எதுவுமில்லை

[விடை : (2)]

தீர்வு :

புள்ளிகள் $(-5, 0)$, $(0, -5)$ மற்றும் $(5, 0)$

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

சதுர அலகுகள்

$$= \frac{1}{2}[-5(-5-0) + 0(0-0) + 5(0+5)]$$

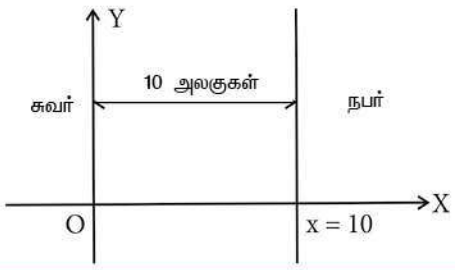
$$= \frac{1}{2}[25 + 25] = \frac{50}{2} = 25 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

2. ஒரு சுவரின் அருகே நடந்து சென்று கொண்டிருக்கும் ஒரு நபருக்கும் சுவருக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 10 அலகுகள். சுவரை Y-அச்சாகக் கருதினால், அந்த நபர் செல்லும் பாதை என்பது

(1) $x = 10$ (2) $y = 10$
(3) $x = 0$ (4) $y = 0$ **[விடை : (1)]**

தீர்வு : $x = 10$

இது y-அச்சிற்கு இணையான கோடு



3. $x = 11$ எனக் கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

(1) X -அச்சுக்கு இணை
(2) Y -அச்சுக்கு இணை
(3) ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும்
(4) $(0, 11)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும்

[விடை : (2)]

தீர்வு :

$x = a$ என்ற வடிவில் உள்ள எந்த ஒரு கோடும் y –அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும்.

4. (5, 7), (3, p) மற்றும் (6, 6) என்பன ஒரு கோட்டமைந்தவை எனில், p -யின் மதிப்பு

(1) 3 (2) 6
(3) 9 (4) 12 **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட (5, 7), (3, p) மற்றும் (6, 6) என்பன ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள்

∴ இப்புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம்.

அதாவது $\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}=0$

$5(p-6)+3(6-7)+6(7-p) = 0$

$5p-30-3+42-6p = 0$

$\Rightarrow -p+9=0 \Rightarrow p = 9$

5. $3x - y = 4$ மற்றும் $x + y = 8$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி

(1) (5, 3) (2) (2, 4)
(3) (3, 5) (4) (4, 4) **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$3x - y = 4$ மற்றும் $x + y = 8$ ஐத் தீர்க்க

$3x - y = 4$ ...(1)

$x + y = 8$ ...(2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $4x = 12$

$x = 3$

(2) -ல் பிரதியிட

$3 + y = 8$

$y = 5$

∴ வெட்டும்புள்ளி (3, 5)

6. (12, 3), (4, a) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{8}$ எனில், 'a' -யின் மதிப்பு

(1) 1 (2) 4
(3) – 5 (4) 2 **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

(12, 3) மற்றும் (4, a) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு 1/8

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3-a}{12-4}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{3-a}{8}=\frac{1}{8}$$

$3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$

7. (0, 0) மற்றும் (– 8, 8) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு

(1) – 1 (2) 1
(3) $\frac{1}{3}$ (4) – 8 **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

(0, 0) மற்றும் (– 8, 8) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{0-8}{0+8}=\frac{-8}{8}=-1$$

∴ செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு 1.

8. கோட்டுத்துண்டு PQ -யின் சாய்வு $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், PQ -க்கு செங்குத்தான இரு சம வெட்டியின் சாய்வு

(1) $\sqrt{3}$ (2) $-\sqrt{3}$
(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) 0 **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

PQ -ன் சாய்வு $= \frac{1}{\sqrt{3}} = m$

செங்குத்துகோட்டின் சாய்வு $= \frac{-1}{m} = -\sqrt{3}$

9. Y -அச்சில் அமையும் புள்ளி A -யின் செங்குத்துத் தொலைவு 8 மற்றும் X அச்சில் அமையும் புள்ளி B -யின் கிடைமட்டத் தொலைவு 5 எனில், AB என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $8x + 5y = 40$ (2) $8x - 5y = 40$
(3) $x = 8$ (4) $y = 5$ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது: A என்பது Y –அச்சின் மீதுள்ள புள்ளி, அதன் செங்குத்து அச்சுத்தூரம் 8.
B என்பது X-அச்சின் மீதுள்ள புள்ளி, அதன் கிடைஅச்சுத் தூரம் 5.
∴ A மற்றும் B என்பன முறையே (0, 8) மற்றும் (5, 0) ஆகும்.

AB ன் சமன்பாடு $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$$\frac{y-8}{0-8}=\frac{x-0}{5-0}$$

$5(y-8) = -8x$

$8x + 5y - 40 = 0$

$8x + 5y = 40$

10. $7x - 3y + 4 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $7x - 3y + 4 = 0$ (2) $3x - 7y + 4 = 0$
(3) $3x + 7y = 0$ (4) $7x - 3y = 0$
[விடை : (3)]

தீர்வு :

$7x - 3y + 4 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{-a}{b} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

செங்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு $= \frac{-3}{7}$

$(0, 0)$ வழிச் செல்வதும் சாய்வு $\frac{-3}{7}$ உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = \frac{-3}{7}(x - 0)$$
$$7y = -3x$$
$$3x + 7y = 0$$

11. (i) $l_1 : 3y = 4x + 5$ (ii) $l_2 : 4y = 3x - 1$ (iii) $l_3 : 4y + 3x = 7$ (iv) $l_4 : 4x + 3y = 2$ எனக்கொடுக்கப்பட்ட நான்கு நேர்கோடுகளுக்குக் கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளில் எது உண்மை?

(1) l_1 மற்றும் l_2 செங்குத்தானவை
(2) l_1 மற்றும் l_4 இணையானவை
(3) l_2 மற்றும் l_4 செங்குத்தானவை
(4) l_2 மற்றும் l_3 இணையானவை **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$$l_1 : 3y = 4x + 5 \Rightarrow 4x - 3y + 5 = 0$$
$$l_2 : 4y = 3x - 1 \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$
$$l_3 : 4y + 3x = 7 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$
$$l_4 : 4x + 3y = 2 \Rightarrow 4x + 3y - 2 = 0$$

l_2 -லிருந்து $a_2 = 3, b_2 = -4$ மற்றும்

l_4 -லிருந்து $a_4 = 4, b_4 = 3$

$a_1a_2 + b_1b_2 = 3(4) + (-4)(3) = 0$

$\therefore l_2$ மற்றும் l_4 ஆகியவை செங்குத்தானவை.

12. $8y = 4x + 21$ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டிற்குக் கீழ்க்கண்டவற்றில் எது உண்மை?

(1) சாய்வு 0.5 மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு 2.6
(2) சாய்வு 5 மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு 1.6
(3) சாய்வு 0.5 மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு 1.6
(4) சாய்வு 5 மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு 2.6

[விடை : (1)]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட கோடு $8y = 4x + 21$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{21}{8}$$

$y = \frac{x}{2} + 2.625$ என்பது $y = mx + c$ என்ற வடிவில் உள்ளது

இங்கு, $m = \frac{1}{2} = 0.5, c = 2.625$

$\therefore$ சாய்வு $m = \frac{1}{2} = 0.5$

y வெட்டுத்துண்டு $= 2.6$

13. ஒரு நாற்கரமானது ஒரு சரிவகமாக அமையத் தேவையான நிபந்தனை

(1) இரு பக்கங்கள் இணை.
(2) இரு பக்கங்கள் இணை மற்றும் இரு பக்கங்கள் இணையற்றவை.
(3) எதிரெதிர் பக்கங்கள் இணை.
(4) அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம்.

[விடை: (2)]

தீர்வு :

இரு பக்கங்கள் இணை மற்றும் இரு பக்கங்கள் இணையற்றவை.

14. சாய்வைப் பயன்படுத்தி நாற்கரமானது ஓர் இணைகரமாக உள்ளது எனக் கூற நாம் காண வேண்டியவை

(1) இரு பக்கங்களின் சாய்வுகள்
(2) இரு சோடி எதிர் பக்கங்களின் சாய்வுகள்
(3) அனைத்து பக்கங்களின் நீளங்கள்
(4) இரு பக்கங்களின் சாய்வுகள் மற்றும் நீளங்கள்

[விடை : (2)]

தீர்வு : இரு சோடி எதிர் பக்கங்களின் சாய்வுகள்.

15. (2, 1) ஐ வெட்டுப் புள்ளியாகக் கொண்ட இரு நேர்கோடுகள்

(1) $x - y - 3 = 0; 3x - y - 7 = 0$
(2) $x + y = 3; 3x + y = 7$
(3) $3x + y = 3; x + y = 7$
(4) $x + 3y - 3 = 0; x - y - 7 = 0$

[விடை : (2)]

தீர்வு :

$(2, 1)$ என்பதை சமன்பாடுகள் (2) ல் பிரதியிட,

$x + y = 3$ மற்றும் $3x + y = 7$

இரண்டு சமன்பாடுகளும் $(2, 1)$ என்ற புள்ளியால் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

அலகு பயிற்சி - 5

1. P(– 1, –1), Q(–1, 4), R (5, 4) மற்றும் S(5, – 1) ஆகிய புள்ளிகளால் ஆன செவ்வகம் PQRS-யில் A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே பக்கங்கள் PQ , QR , RS மற்றும் SP -யின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். ABCD என்ற நாற்கரமானது ஒரு சதுரம், செவ்வகம் அல்லது சாய்சதுரமா? உங்கள் விடையைக் காரணத்தோடு விளக்குக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட செவ்வகத்தின் முனைப்புள்ளிகள் P (–1, –1), Q (– 1, 4), R (5, 4) மற்றும் S (5, –1)

PQ -ன் நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$= A\left(\frac{-1-1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = A\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

QR -ன் நடுப்புள்ளி $= B\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$ = B (2, 4)

RS -ன் நடுப்புள்ளி $= C\left(\frac{5+5}{2}, \frac{4-1}{2}\right) = C\left(5, \frac{3}{2}\right)$

SP -ன் நடுப்புள்ளி $= D\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1-1}{2}\right)$ = D (2, – 1)

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(2+1)^2 + (4 - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (\frac{3}{2} - 4)^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$CD = \sqrt{(2-5)^2 + (-1 - \frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$DA = \sqrt{(2+1)^2 + (-1 - \frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$AC = \sqrt{(5+1)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$

முக்கோணம் ABC -யிலிருந்து

$AB^2 + BC^2 = \frac{61}{4} + \frac{61}{4} = \frac{122}{4} = \frac{61}{2} \neq 36$

அதாவது,

$AB^2 + BC^2 \neq AC^2$

∴ A, B, C மற்றும் D என்பன சதுரம் அல்லது செவ்வகத்தின் முனைப்புள்ளிகளாக இருக்க முடியாது.

எனவே, ABCD என்பது ஒரு சாய்சதுரம்.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு 5 ச.அலகுகள். (2, 1) மற்றும் (3, – 2) என்பன முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப் புள்ளிகள் ஆகும். மூன்றாம் முனைப் புள்ளி (x, y) என்பதில் y = x + 3 என இருந்தால் அப்புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 5 சதுர அலகுகள்.

முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் (2, 1), (3, – 2) மற்றும் (x, y)

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 5$

$2(-2 - y) + 3(y - 1) + x(1 + 2) = 10$

$-4 - 2y + 3y - 3 + 3x = 10$

$3x + y = 17$ ...(1)

கொடுக்கப்பட்ட y = x + 3 என்பதை (1) ல்-பிரதியிட

$\therefore 3x + x + 3 = 17$

$4x = 14$

$x = 7/2$

மற்றும் $y = 7/2 + 3$

$= 13/2$

மூன்றாவது முனைப்புள்ளி (7/2, 13/2)

3. $3x + y - 2 = 0$, $5x + 2y - 3 = 0$ மற்றும் $2x - y - 3 = 0$ ஆகிய கோடுகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்

$3x + y - 2 = 0 \Rightarrow 3x + y = 2$ ...(1)

$5x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow 5x + 2y = 3$ ...(2)

$2x - y - 3 = 0 \Rightarrow 2x - y = 3$ ...(3)

(1), (2) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க.

(1) × (2) ⇒ $6x + 2y = 4$ ...(4)

$5x + 2y = 3$ ...(2)

(4) – (2) ⇒ $x = 1$

(1) ல் பிரதியிட,

$y = 2 - 3 = -1$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றை வெட்டும் புள்ளி (1, – 1)

(2), (3) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க.

(3) × (2) ⇒ $4x - 2y = 6$ ...(5)

$5x + 2y = 3$ ...(2)

(5) + (2) ⇒ $9x = 9$

$x = 1$

(3) ல் பிரதியிட, $y = -1$

(2), (3) ஆகியவற்றை வெட்டும் புள்ளி (1, – 1).
(1), (2) மற்றும் (2), (3) ஆகியவற்றை வெட்டும் புள்ளி ஒன்றாக இருப்பதால், முக்கோணம் சாத்தியமில்லை. எனவே, முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம்.

4. A (– 5, 7), B(– 4, k), C(– 1, – 6) மற்றும் D(4, 5) ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு 72 சதுர அலகுகள் எனில், k -யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நாற்கரத்தின் முனைப்புள்ளிகள் A (–5, 7), B (– 4, k), C (– 1, – 6) மற்றும் D (4, 5)
நாற்கரத்தின் பரப்பளவு 72 சதுர அலகுகள்.

$$\frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)] = 72$$

$$(-5 + 1)(k - 5) - (-4 - 4)(7 + 6) = 144$$

$$-4k + 20 + 104 = 144$$

$$-4k = 144 - 124 = 20$$

$$k = \frac{-20}{4} = -5$$

5. தொலைவு காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாமல், (–2, – 1), (4, 0), (3, 3) மற்றும் (–3, 2) என்பன இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (–2, –1), (4, 0), (3, 3) மற்றும் (–3, 2)

புள்ளிகளை A (–2, –1), B (4, 0), C (3, 3) மற்றும் D (–3, 2) என்க.

$$\text{சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$AB \text{ -ன் சாய்வு} = \frac{-1 - 0}{-2 - 4} = \frac{1}{6}$$

$$BC \text{ -ன் சாய்வு} = \frac{0 - 3}{4 - 3} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$CD \text{ -ன் சாய்வு} = \frac{3 - 2}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

$$DA \text{ -ன் சாய்வு} = \frac{2 + 1}{-3 + 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

AB -ன்சாய்வு = CD -ன்சாய்வு $\Rightarrow$ AB யும் CD யும் இணை.
BC -ன்சாய்வு = DA -ன்சாய்வு $\Rightarrow$ BC யும் DA யும் இணை.
எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் இணைகரத்தை அமைக்கின்றன.

6. இரு வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் முறையே 1, – 6 எனில், நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : a, b என்பன வெட்டுத்துண்டுகள் என்க.
கொடுக்கப்பட்ட வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் $a + b = 1$ ...(1)
வெட்டுத்துண்டுகளின் பெருக்கற்பலன் $ab = -6$ ...(2)

$$b = \frac{-6}{a}$$

(1) –ல் பிரதியிட,

$$a - \frac{6}{a} = 1$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$(a - 3)(a + 2) = 0$$

$$a = -2, 3$$

$a = -2$ எனும்போது, $b = \frac{-6}{-2} = 3$

$a = 3$ எனும்போது, $b = \frac{-6}{-2} = -2$

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(i) $a = -2, \quad b = 3 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

(ii) $a = 3, \quad b = -2 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$

$$-2x + 3y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 3y - 6 = 0$$

7. ஒரு பால்கடை உரிமையாளர் 1 லிட்டர் ₹16 வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு 1220 லிட்டரும், 1 லிட்டர் ₹ 14 வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு 980 லிட்டரும் விற்பனை செய்கிறார். விற்பனை விலையானது தேவையோடு நேரிய தொடர்பு உடையது என ஊகித்துக் கொண்டால், 1 லிட்டர் ₹ 17 வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு எத்தனை லிட்டர் விற்பனை செய்வார்?

தீர்வு :

விற்பனை விலையும், தேவையும் நேரிய தொடர்பு உடையது. x அச்சின் மீது விற்பனை விலையையும், y அச்சின் மீது தேவையையும் எடுத்துக்கொள்க.
கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (14, 980) மற்றும் (16, 1220)
(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y-980}{1220-980} = \frac{x-14}{16-14}$$

$$\frac{y-980}{240} = \frac{x-14}{2}$$

$$y - 980 = 120x - 1680$$

$$120x - y - 700 = 0$$

$$y = 120x - 700$$

$x = 17$ எனும்போது, $y = 120(17) - 700$

$= 2040 - 700 = 1340$

எனவே, பால்கடை உரிமையாளர் 1 லிட்டர் பால் ₹ 17 வீதம் வாரத்திற்கு 1340 லிட்டர் விற்பனை செய்வார்.

8. $x + 3y = 7$ என்ற நேர்கோட்டினைச் சமதள ஆடியாகக் கொண்டு (3, 8) என்ற புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு :

P என்பது (3, 8) என்க மற்றும் Q (a, b) என்பது P ன் பிம்பப் புள்ளி என்க.

$$PQ \text{ -ன் சாய்வு} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8-b}{3-a} = m_1$$

கோட்டின் சாய்வு $x + 3y = 7$ is $\frac{-1}{3} = m_2$

PQ என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்கு செங்குத்து என்பதால்

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\frac{8-b}{3-a} \times \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$$

$$8 - b = 9 - 3a$$

$$3a - b = 1 \quad \ldots(1)$$

$$PQ \text{ -ன் நடுப்புள்ளி} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{8+b}{2}\right)$$

$x + 3y = 7$ என்ற கோடு PQ ன் மையக்குத்துக்கோடு என்பதால் PQ ன் மையப்புள்ளி கோட்டின் மேல் அமையும்.

$$\therefore \left(\frac{3+a}{2}\right) + 3\left(\frac{8+b}{2}\right) = 7$$

$$3 + a + 24 + 3b = 14$$

$$a + 3b = -13 \quad \ldots(2)$$

(1), (2) ஐத் தீர்க்க,

$(1) \times (3) \Rightarrow \quad 9a - 3b = 3 \quad \ldots(3)$

$$a + 3b = -13 \quad \ldots(2)$$

$(3) + (2) \Rightarrow \quad 10a = -10$

$$a = -1$$

(1) ல் பிரதியிட,

$$b = -4$$

$\therefore$ (3, 8) ன் பிம்பப்புள்ளி (– 1, – 4).

9. $4x + 7y - 3 = 0$ மற்றும் $2x - 3y + 1 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத் துண்டுகள் சமமானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$4x + 7y - 3 = 0 \Rightarrow 4x + 7y = 3 \quad \ldots(1)$

$2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -1 \quad \ldots(2)$

(1), (2) ஐத் தீர்க்க

$$4x + 7y = 3 \quad \ldots(1)$$

$(2) \times 2 \Rightarrow \quad 4x - 6y = -2 \quad \ldots(3)$

$(1) - (3) \Rightarrow \quad 13y = 5$

$$y = \frac{5}{13}$$

(1) –ல் பிரதியிட, $4x + 7\left(\frac{5}{13}\right) = 3$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{13}$$

(1), (2) ஆகியவற்றை வெட்டும்புள்ளி $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$

கொடுக்கப்பட்ட கோடானது ஆய அச்சுகளின் மேல் சமமான வெட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்டுள்ளது. அதாவது, $a = b$

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$$

இது $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதால்

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{13} + \frac{5}{13} = a \Rightarrow a = \frac{6}{13}$$

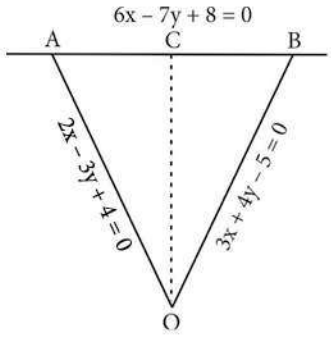
$$\therefore \quad b = \frac{6}{13}$$

எனவே, கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{\frac{6}{13}} + \frac{y}{\frac{6}{13}} = 1$

$$\Rightarrow \quad 13x + 13y - 6 = 0$$

10. $2x-3y+4=0$ மற்றும் $3x+4y-5=0$ என்ற நேர்கோடுகளால் குறிக்கப்படும் இரண்டு பாதைகள் சந்திக்கும் புள்ளியில் நிற்கும் ஒருவர் $6x - 7y + 8 = 0$ என்ற நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படும் பாதையைக் குறுகிய நேரத்தில் சென்றடைய விரும்புகிறார் எனில், அவர் செல்ல வேண்டிய பாதையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :



நபர் 'O' என்ற இடத்தில் நிற்பதாக கொள்க. மேலும் OA மற்றும் OB என்பன நேர்கோட்டுப் பாதைகள்.

இங்கு, OA: $2x - 3y + 4 = 0$ ... (1)

மற்றும் OB: $3x + 4y - 5 = 0$ ... (2)

கொடுக்கப்பட்டது: அவர் சென்றடைய விரும்பும் பாதை

AB: $6x - 7y = 8 = 0$

AB ஐ குறுகிய நேரத்தில் சென்றடைய, அவர் OC என்ற குறைவான தூரத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். (மையக்குத்துக்கோடு)

இப்போது OA மற்றும் OB ஐத் தீர்க்க.

$(1) \times (3) \Rightarrow \quad 6x - 9y = -12 \quad \ldots (3)$

$(2) \times (2) \Rightarrow \quad 6x + 8y = 10 \quad \ldots (4)$

$(3) - (4) \Rightarrow \quad -17y = -22$

$$y = \frac{22}{17}$$

(2) –ல் பிரதியிட,

$$3x + 4\left(\frac{22}{17}\right) = 5$$

$$3x = 5 - \frac{88}{17} = -\frac{3}{17}$$

$$x = -\frac{1}{17}$$

OA மற்றும் OB –ஐ வெட்டும் புள்ளி $O\left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17}\right)$

AB ன் சாய்வு $= \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

இப்போது, OC என்பது AB க்குச் செங்குத்து,

$\therefore$ OC ன் சாய்வு $= -\frac{7}{6}$

OC என்பது $\left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17}\right)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது மற்றும் சாய்வு $-\frac{7}{6}$ –ஐக் கொண்டுள்ளது.

OC ன் சமன்பாடு, $\Rightarrow \quad y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{22}{17} = -\frac{7}{6}\left(x + \frac{1}{17}\right)$$

$$\frac{17y - 22}{17} = -\frac{7}{6}\left(\frac{17x + 1}{17}\right)$$

$$102y - 132 = -119x - 7$$

$$119x + 102y - 125 = 0$$

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பளவு

1. (2, – 3), (3, 2) மற்றும் (– 2, 5) ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

(1) 11 (2) 12
(3) 14 (4) 13 **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ச.அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\left[2(2-5) + 3(5+3) - 2(-3-2)\right]$

$= \frac{1}{2}(28) = 14$ சதுர அலகுகள்

2. A (– 3, 2), B (5, – 2) மற்றும் C (1, 3) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் ABD பரப்பளவு

(1) 5 (2) 6
(3) 7 (4) 8 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

ΔABC ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\left[-3(-2-3) + 5(3-2) + 1(2+2)\right]$

$= \frac{1}{2}(24) = 12$

ΔABD -ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ (ΔABC -ன் பரப்பு) $= \frac{12}{2}$

$= 6$ சதுர அலகுகள்

3. (2, 1), (3, – 2) மற்றும் (a, b) என்பவை ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனில்

(1) a + b = 7 (2) 3a + b = 7
(3) a – b = 7 (4) 3a – b = 7 **[விடை: (2)]**

தீர்வு : புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள் என்பதால் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம்.

$\therefore \frac{1}{2}\left[2(-2-b) + 3(b-1) + a(1+2)\right] = 0$

$3a + b = 7$

4. (a, b), (c, d) மற்றும் (a – c, b – d) ஆகியவை ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனில்,

(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (2) $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$
(3) $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ (4) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ **[விடை: (1)]**

தீர்வு : ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் என்பதால் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம்.

$\therefore a(d-b+d) + c(b-d-b) + (a-c)(b-d) = 0$

$2ad - ab - cd + ab - ad - bc + cd = 0$

$ad - bc = 0$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

5. (– 2, 3), (4, – 5) மற்றும் (– 3, y) ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 10 சதுர அலகுகள் எனில், y -ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) – 1
(3) $\frac{23}{3}$ (4) $\frac{-22}{3}$ **[விடை: (3)]**

தீர்வு : முக்கோணத்தின் பரப்பு = 10

$\frac{1}{2}\left[-2(-5-y) + 4(y-3) - 3(3+5)\right] = 10$

$\frac{1}{2}(6y - 26) = 10$

$3y - 13 = 10$

$y = \frac{23}{3}$

6. (0, 0), (1, 0), (1, 4) மற்றும் (0, 2) ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பளவு

(1) 4 (2) 8
(3) 12 (4) 16 **[விடை: (2)]**

தீர்வு : நாற்கரத்தின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)\right]$ ச.அலகுகள்

$= 8$ சதுர அலகுகள்

(அல்லது) புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கக் கிடைப்பது ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.

அதன் நீளம் 4 மற்றும் அகலம் 2.

$\therefore$ பரப்பளவு = 8 சதுர அலகுகள்

7. (3, 0), (0, 4), (– 3, 0) மற்றும் (0, – 4) ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு

(1) 24 (2) 30
(3) 32 (4) 36 **[விடை: (1)]**

தீர்வு : நாற்கரத்தின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(3+3)(4+4) - (0-0)(0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[48] = 24 \text{ சதுர அலகுகள்}$$

8. (3, 4) மற்றும் (– 5, – 6) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மீது (x, y) என்ற புள்ளி அமைகிறது எனில்,

(1) $4x - 5y = 1$ (2) $5x - 4y = 1$
(3) $5x - 4y + 1 = 0$ (4) $4x + 5y = 1$
[விடை: (3)]

தீர்வு :

புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை. எனவே, முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம்.

$$\frac{1}{2}\left[x(4+6) + 3(-6-y) - 5(y-4)\right] = 0$$

$$10x - 8y + 2 = 0$$

$$5x - 4y + 1 = 0$$

சாய்வுக் கோணம் மற்றும் நேர்கோட்டின் சாய்வு

9. ஒரு கோட்டின் சாய்வு குறை எண் எனில், கோடானது ஏற்படுத்தும் கோணம்

(1) குறுங்கோணம் (2) விரிகோணம்
(3) பூச்சியம் (4) இவற்றில் ஏதுமில்லை
[விடை: (2)]

தீர்வு :

சாய்வு குறை எண் எனில், $\tan\theta$ என்பதும் குறை எண்ணாகும். எனவே 'θ' ஒரு விரிகோணமாகும்.

10. சாய்வுக் கோணம் 45° எனில், கோட்டின் சாய்வு யாது?

(1) 1 (2) 2
(3) 0 (4) $\frac{1}{2}$ **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

சாய்வு $m = \tan 45° = 1$

11. சாய்வு $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், சாய்வுக் கோணம் என்பது

(1) 30° (2) 60°
(3) 90° (4) 45° **[விடை: (1)]**

தீர்வு : சாய்வு $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

அதாவது, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\theta = 30°$

12. (4, – 6) மற்றும் (– 2, – 5) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{-1}{6}$
(3) 6 (4) – 6 **[விடை: (2)]**

தீர்வு : சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-6+5}{4+2} = \frac{-1}{6}$

13. A (1, – 2), B (3, 4) மற்றும் C (4, 7) ஆகிய புள்ளிகள்

(1) செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.
(2) இருசமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.
(3) சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.
(4) ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

AB -ன் சாய்வு $= \frac{-2-4}{1-3} = \frac{-6}{-2} = 3$

BC -ன் சாய்வு $= \frac{4-7}{3-4} = \frac{-3}{-1} = 3$

AB -ன் சாய்வு = BC -ன் சாய்வு

∴ புள்ளிகள் ஒரே கோடமைந்தவை.

14. A (4, 4), B (3, 5) மற்றும் C (– 1, – 1) ஆகிய புள்ளிகள் ஏற்படுத்துவது

(1) செங்கோண முக்கோணம்
(2) இருசமபக்க முக்கோணம்
(3) சமபக்க முக்கோணம்
(4) இவற்றில் ஏதுமில்லை **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

AB -ன் சாய்வு $= -1$

BC -ன் சாய்வு $= \frac{3}{2}$

AC -ன் சாய்வு $= 1$

இங்கு, AB -ன் சாய்வு × AC -ன் சாய்வு

$= -1 \times 1 = -1$

∴ புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.

15. (2, 5) மற்றும் (x, 3) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு 2 எனில், 'x' ன் மதிப்பு

(1) 4 (2) 3
(3) 2 (4) 1 **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

$$\text{சாய்வு} = 2$$
$$\frac{5-3}{2-x} = 2$$
$$2 = 4 - 2x$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

16. A (2, 4), B (– 3, 1) மற்றும் C (4, – 7) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட ΔABC ல் B ன் வழியாகச் செல்லும் நடுக்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $\frac{12}{5}$ (2) $\frac{-12}{5}$
(3) $\frac{5}{12}$ (4) $\frac{-5}{12}$ **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

AC ன் நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{2+4}{2}, \frac{4-7}{2}\right) = \left(3, \frac{-3}{2}\right)$

∴ B வழிச் செல்லும் நடுக்கோட்டின் சாய்வு

$$= \frac{1+\frac{3}{2}}{-3-3} = \frac{-5}{12}$$

17. இரண்டு கோட்டுத்துண்டுகளின் சாய்வுகள் சமம் எனில், கீழ்க்காண்பனவற்றுள் எது சரி?

(1) கோட்டுத்துண்டுகள் இணையானவை
(2) கோட்டுத்துண்டுகளின் முடிவுப்புள்ளிகள் ஒரே கோடமைவன
(3) கோட்டுத்துண்டுகள் செங்குத்தானவை
(4) கோட்டுத்துண்டுகளின் முடிவுப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையாது **[விடை: (1) மற்றும் (2)]**

18. சாய்வு பூச்சியத்தைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாடு, தளத்தில் எவ்வாறு அமைகிறது?

(1) குத்துக்கோடு
(2) கிடைமட்டக்கோடு
(3) ஆதிவழிச் செல்லும் நேர்கோடு
(4) y-அச்சு **[விடை: (2)]**

நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

19. (2, – 3) என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதும், x-அச்சிற்கு இணையானதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x = -2$ (2) $x = 2$
(3) $y = -3$ (4) $y = 3$ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

X-அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $y = b$

இது (2, – 3) வழிச் செல்கிறது.

$$y = -3$$

எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = -3$

20. y-அச்சிற்கு இணையானதும், வலதுபுறம் 3 அலகு தூரத்தில் உள்ளதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x = 1$ (2) $x = 2$
(3) $x = -3$ (4) $x = 3$ **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

y-அச்சிற்கு இணையாகவும், வலதுபுறம் 'a' அலகு தூரத்திலும் உள்ள கோட்டின் சமன்பாடு $x = a$

∴ தேவையான சமன்பாடு $x = 3$

21. சாய்வு 3 உடையதும், y அச்சின் மீது வெட்டுத்துண்டு 4 ஐ ஏற்படுத்துவதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $3x - y - 4 = 0$ (2) $3x - y + 4 = 0$
(3) $3x + y - 4 = 0$ (4) $3x + y + 4 = 0$
[விடை: (2)]

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது:
சாய்வு 'm' = 3, y வெட்டுத்துண்டு 'c' = 4
∴ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx + c$$
$$y = 3x + 4$$
$$3x - y + 4 = 0$$

22. (– 4, 3) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், சாய்வு $\frac{1}{2}$ உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x - 2y + 10 = 0$ (2) $x - 2y - 10 = 0$
(3) $x + 2y + 10 = 0$ (4) $x + 2y - 10 = 0$
[விடை: (1)]

தீர்வு :

நேர்கோட்டின் சாய்வு – புள்ளி வடிவச் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{1}{2}(x+4)$$
$$x - 2y + 10 = 0$$

23. (0, – a) மற்றும் (b, 0) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $bx - ay = ab$ (2) $ax - by = ab$
(3) $x - y = ab$ (4) $ax + by = 1$
[விடை: (2)]

தீர்வு : நேர்கோட்டின் இருபுள்ளி வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y+a}{0+a} = \frac{x-0}{b-0}$$

$$ax - by = ab$$

24. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

(1) $\frac{b}{a}$ (2) $\frac{a}{b}$

(3) $\frac{-b}{a}$ (4) $\frac{-a}{b}$ **[விடை : (3)]**

தீர்வு : சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$

சாய்வு $= \frac{-'x'\text{ன் கெழு}}{'y'\text{ன் கெழு}} = \frac{\frac{-1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{-b}{a}$

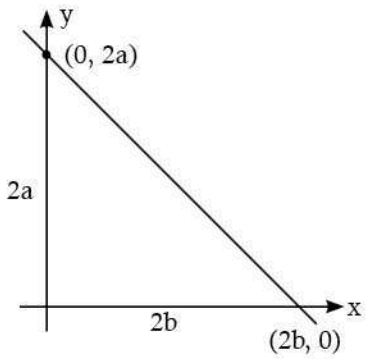
25. $ax + by = 2ab$ என்ற கோடு மற்றும் ஆய அச்சுகளால் ஏற்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) ab (2) 2ab

(3) $\frac{ab}{2}$ (4) 4ab **[விடை: (2)]**

தீர்வு : நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by = 2ab$ $(\div 2ab)$

$\frac{x}{2b} + \frac{y}{2a} = 1$ என்பது வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு



x வெட்டுத்துண்டு '2b'
y வெட்டுத்துண்டு '2a'

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times 2b \times 2a$
$= 2$ ab

26. $y = mx$ என்ற கோடு $x + 2y - 1 = 0$ மற்றும் $2x - y + 3 = 0$ ஆகிய கோடுகளை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கிறது எனில், m ன் மதிப்பு

(1) 1 (2) – 1

(3) 2 (4) – 2 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$x + 2y - 1 = 0$ மற்றும் $2x - y + 3 = 0$ ஆகியவற்றைத் தீர்க்க.

கிடைக்கும் வெட்டும்புள்ளி $(-1, 1)$

$y = mx$ ஆனது $(-1, 1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது

$\therefore 1 = m(-1) \Rightarrow m = -1$

27. $x = 2$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் $(2, -8)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $y = 8$ (2) $y = -8$

(3) $x = 8$ (4) $x = -2$ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$x = a$ என்ற வடிவில் உள்ள எந்த ஒரு கோட்டின் சாய்வும் '0'

$\therefore$ சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 8 = 0\,(x - 2)$

$y + 8 = 0 \Rightarrow y = -8$

28. ஆய அச்சுகளின் மீது 2, 3 ஆகிய வெட்டுத் துண்டுகளை ஏற்படுத்தும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $2x - 3y - 6 = 0$ (2) $2x + 3y - 6 = 0$

(3) $3x - 2y - 6 = 0$ (4) $3x + 2y - 6 = 0$

[விடை: (4)]

தீர்வு : கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$$

$$3x + 2y = 6$$

$$3x + 2y - 6 = 0$$

நேர்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாடு

29. நேர்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாடு

(1) $\frac{-a}{b} + by + \frac{c}{b} = 0$

(2) $ax^2 + by^2 + c = 0$

(3) $y = mx + c$

(4) $ax + by + c = 0$ **[விடை: (4)]**

30. $ax + by + c = 0$ என்பதற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x + y + k = 0$
(2) $ax + by + k = 0$
(3) $x + y = -c$
(4) $bx + ay = c$ **[விடை: (2)]**

31. $ax + by + c = 0$ என்பது x அச்சிற்கு இணையான கோட்டைக் குறிக்கிறது எனில்,

(1) $a = 0, b = 0$ (2) $a = 0, b \neq 0$
(3) $a \neq 0, b = 0$ (4) $c = 0$ **[விடை: (2)]**

32. $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ மற்றும் $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ஆகிய கோடுகள் செங்குத்தாக இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடு

(1) $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ (2) $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$
(3) $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$ (4) $a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$
[விடை: (1)]

33. $3x + 4y + 7 = 0$ மற்றும் $4x - 3y + 5 = 0$ ஆகிய கோடுகள்

(1) இணையானவை
(2) செங்குத்தானவை
(3) இணையானவையும் அல்ல, செங்குத்தானவையும் அல்ல
(4) இணை மற்றும் செங்குத்து **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$3x + 4y + 7 = 0$ மற்றும் $4x - 3y + 5 = 0$

$a_1 = 3, b_1 = 4, a_2 = 4, b_2 = -3$

இப்போது, $a_1 a_2 + b_1 b_2 = (3)(4) + (4)(-3)$
$= 12 - 12 = 0$

$\therefore$ கோடுகள் செங்குத்தானவை.

34. $2x + 5y = 7$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும், $(-1, 4)$ புள்ளி வழிச் செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

(1) $x - y + 13 = 0$ (2) $x + y + 13 = 0$
(3) $2x + 5y + 13 = 0$ (4) $5x - 2y + 13 = 0$
[விடை: (4)]

தீர்வு :

$2x + 5y = 7$ என்ற கோட்டின் சாய்வு $-\frac{2}{5}$

$\therefore$ செங்குத்துக்கோட்டின் சாய்வு $\frac{5}{2}$

தேவையான சமன்பாடு

$$y - 4 = \frac{5}{2}(x + 1)$$

$$2y - 8 = 5x + 5$$

$$\Rightarrow 5x - 2y + 13 = 0$$

35. $(2 + 6k)x + (3 - k)y + (4 + 12k) = 0$ மற்றும் $7x + 5y - 4 = 0$ என்ற நேர்கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில், k ன் மதிப்பு

(1) $\frac{29}{37}$ (2) $-\frac{29}{37}$
(3) $\frac{37}{29}$ (4) $-\frac{37}{29}$ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

கோடுகள் செங்குத்தானவை என்பதால்

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$
$$(2 + 6k)(7) + (3 - k)(5) = 0$$
$$14 + 42k + 15 - 5k = 0$$
$$29 + 37k = 0 \Rightarrow k = -\frac{29}{37}$$

36. $4x + ky = 8$ மற்றும் $4x + 3y = 5$ ஆகிய கோடுகள் இணையானவை எனில், k ன் மதிப்பு

(1) 3 (2) 5
(3) 4 (4) 2 **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

இரண்டு கோடுகள் இணை எனில் 'x' –ன் கெழுக்கள் சமம் மற்றும் 'y' –ன் கெழுக்கள் சமம்.

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. (1, 1), (2, 3) மற்றும் (4, 5) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \text{ சதுர அலகுகள்}$$
$$= \frac{1}{2}[1(3 - 5) + 2(5 - 1) + 4(1 - 3)]$$
$$= \frac{1}{2}[-2 + 8 - 8]$$
$$= \frac{-2}{2} = -1$$
$$= 1 \text{ சதுர அலகு}$$

[$\because$ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

2. A (0, 0), B(3, 4) மற்றும் C (0, 3) எனில், முக்கோணம் ABC ன் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$= \frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\ [0 (4 - 3) + 3 (3 - 0) + 0 (0 - 4)]$

$= \frac{1}{2}\ (9) = \frac{9}{2}$ சதுர அலகுகள்

3. (7, – 2), (5, 1) மற்றும் (3, – k) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோடமைவன எனில், k -ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : ஒரே கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனில், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பூச்சியம்.

அதாவது,

$$\frac{1}{2}\ [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 0$$

$$7 (1 + k) + 5 (- k + 2) + 3 (- 2 - 1) = 0$$

$$7 + 7k - 5k + 10 - 9 = 0$$

$$2k = -8$$

$$k = -4$$

4. (–1, –1), (–1, 4), (5, 4) மற்றும் (5, –1) ஆகிய புள்ளிகளை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

நாற்கரத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\ [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)]$ சதுர அலகுகள்

$= \frac{1}{2}\ [(-1-5)(4+1) - (-1-5)(-1-4)$

$= \frac{1}{2}\ [- 30 - 30]$

$= -\frac{60}{2} = - 30$

பரப்பளவு = 30 சதுர அலகுகள்

[∵ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

5. சாய்வுக் கோணம் (i) 45° (ii) 60° எனில், கோட்டின் சாய்வு காண்க.

தீர்வு :

(i) சாய்வுக் கோணம் $\theta = 45°$

சாய்வு $m = \tan \theta$

$m = \tan 45° = 1$

(ii) $\theta = 60°$ எனும்போது,

சாய்வு $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

6. (2, 0) மற்றும் (3, 4) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சாய்வு காண்க.

தீர்வு : (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_1) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0 - 4}{2 - 3} = \frac{-4}{-1} = 4 = m$$

7. சாய்வு 2 -ஐக் கொண்ட கோட்டிற்கு இணையான கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு :

கோடுகள் இணை எனில், அவற்றின் சாய்வுகள் சமம்.

தேவையான கோட்டின் சாய்வு = 2

8. A (2, 3), B (5, 6) மற்றும் C (0, – 2) என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோடமைவனவா?

தீர்வு :

AB ன் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$= \frac{3 - 6}{2 - 5} = \frac{-3}{-3} = 1$

BC ன் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$= \frac{6 + 2}{5 - 0} = \frac{8}{5}$

AB ன் சாய்வு ≠ BC ன் சாய்வு

∴ புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைவன அல்ல.

9. (a, b) மற்றும் (a + b, a – b) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - b}{a - b - b} = \frac{x - a}{a + b - a}$$

$$\frac{y - b}{a - 2b} = \frac{x - a}{b}$$

$$b (y - b) = (x - a) (a - 2b)$$

$$by - b^2 = ax - 2bx - a^2 + 2ab$$

$$(a - 2b) x - by - a^2 + 2ab + b^2 = 0$$

10. (1, 2) புள்ளி வழிச் செல்வதும் Y-அச்சுடன் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துவதுமான கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது: கோடானது Y அச்சுடன் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அதாவது, X அச்சின் மிகைத்திசையில் ஏற்படுத்தும் கோணம் 60° ஆகும்.

$\therefore$ கோட்டின் சாய்வு $= m = \tan 60° = \sqrt{3}$

(x_1, y_1) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதும் சாய்வு 'm' கொண்டதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$$

11. x வெட்டுத்துண்டு 4 மற்றும் y -வெட்டுத்துண்டு $-\frac{3}{2}$ ஐக் கொண்டதுமான கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 3x - 8y - 12 = 0$$

12. $2x + 3y + 4 + k(6x - y + 12) = 0$ மற்றும் $7x + 5y - 4 = 0$ ஆகிய கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில், m ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

இரண்டு கோடுகள் $x(2 + 6k) + y(3 - k) + 4 + 12k = 0$ மற்றும் $7x + 5y - 4 = 0$

முதல் கோட்டின் சாய்வு $= m_1 = -\frac{(2 + 6k)}{3 - k}$

2 -வது கோட்டின் சாய்வு $= m_2 = -\frac{7}{5}$

கோடுகள் செங்குத்தானவை என்பதால்,

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$-\frac{(2 + 6k)}{3 - k} \times -\frac{7}{5} = -1$$

$$14 + 42k = -15 + 5k$$

$$k = -\frac{29}{37}$$

13. (a, 2a) மற்றும் (–2, 3) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு $4x + 3y + 5 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்து எனில், 'a' ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

$4x + 3y + 5 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு $m_1 = -\frac{4}{3}$

(a, 2a), (– 2, 3) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு $m_2 = \frac{2a - 3}{a + 2}$

கோடுகள் செங்குத்தானவை என்பதால்,

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{4}{3} \times \frac{2a - 3}{a + 2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad 8a - 12 = 3a + 6$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{18}{5}$$

14. $x = a$ மற்றும் $by + c = 0$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$x = a$ என்பது Y-அச்சிற்கு இணை மற்றும்

$by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$ என்பது X-அச்சிற்கு இணை

$\therefore$ இரண்டு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 90°.

15. (a, c + a), (a, c) மற்றும் (– a, c – a) ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ சதுர அலகுகள்

$$= \frac{1}{2}[a(c - c + a) + a(c - a - c - a) - a(c + a - c)]$$

$$= \frac{1}{2}[a(a) + a(-2a) - a(a)]$$

$$= \frac{1}{2}(-2a^2) = -a^2$$

பரப்பளவு $= a^2$ சதுர அலகுகள்

[$\because$ பரப்பளவு குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது]

16. $y = mx + c$ எனும் கோடு (2, 4) மற்றும் (– 3, 6) ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனில், m மற்றும் c ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = mx + c$ என்ற கோடு $(2, 4)$ புள்ளி வழிச்செல்கிறது.

$$\therefore \quad 4 = 2m + c \qquad \ldots (1)$$

மீண்டும் $y = mx + c$ என்ற கோடு $(-3, 6)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad 6 = -3m + c \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) –ஐத் தீர்க்க,

$$m = -\frac{2}{5}$$

(1) –ல் பிரதியிட,

$$c = \frac{24}{5}$$

17. 'a' -ன் பூச்சியமற்ற எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் $a^2x + ay + 1 = 0$ எனும் கோடு $x - ay = 0$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தானது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$a^2x + ay + 1 = 0$ -ன் சாய்வு

$$m_1 = -\frac{a^2}{a} = -a$$

$x - ay = 0$ -ன் சாய்வு $m_2 = 1 \dfrac{-1}{-a} = \dfrac{1}{a}$

இப்போது, $m_1 \times m_2 = -a \times \left(\dfrac{1}{a}\right) = -1$

$\therefore$ கோடுகள் செங்குத்தானவை.

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. $(p + 1, 1)$, $(2p + 1, 3)$ மற்றும் $(2p + 2, 2p)$ ஆகியவை ஒரு கோட்டமைப் புள்ளிகள் எனில், p ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

புள்ளிகள் ஒரே கோடமைவன என்பதால் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பூச்சியம்.

அதாவது, $x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$

$$(p + 1)(3 - 2p) + (2p + 1)(2p - 1) + (2p + 2)(1 - 3) = 0$$

$$3p - 2p^2 + 3 - 2p + 4p^2 - 1 - 4p - 4 = 0$$

$$2p^2 - 3p - 2 = 0$$

$$(2p + 1)(p - 2) = 0$$

$$2p + 1 = 0, \quad p - 2 = 0$$

$$p = -\frac{1}{2}, \quad p = 2$$

2. A (0, – 1), B (2, 1) மற்றும் C(– 4, 3) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

AB -ன் சாய்வு $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{-1-1}{0-2}$$

$$= \frac{-2}{-2} = 1$$

BC -ன் சாய்வு $= \dfrac{1-3}{2+4}$

$$= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

AC -ன் சாய்வு $= \dfrac{-1-3}{0+4}$

$$= -\frac{4}{4} = -1$$

(AB -ன் சாய்வு) × (AC -ன் சாய்வு) $= 1 \times -1 = -1$

$[\because m_1 \times m_2 = -1]$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கின்றன.

3. A (– 2, 0), B (2, 4) , C (4, 1) மற்றும் D (0, – 3) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

AB -ன் சாய்வு $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{0-4}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

BC -ன் சாய்வு $= \dfrac{4-1}{2-4} = -\dfrac{3}{2}$

CD -ன் சாய்வு $= \dfrac{1+3}{4-0} = \dfrac{4}{4} = 1$

AD -ன் சாய்வு $= \dfrac{0+3}{-2-0} = -\dfrac{3}{2}$

AB -ன் சாய்வு = CD -ன் சாய்வு

BC -ன் சாய்வு = AD -ன் சாய்வு

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் இணைகரத்தை அமைக்கின்றன.

4. பாரன்ஹீட் வெப்பநிலை F மற்றும் சரியான வெப்பநிலை K என்பன ஒரு நேரிய சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. F = 32 எனும்போது K = 273 எனவும், F = 212 எனும்போது K = 373 எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. K என்பதை F ன் சார்பாக எழுதுக மற்றும் K = 0 எனில், F -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : F என்பதை X -அச்சின் மீதும் K என்பதை Y -அச்சின் மீதும் கருதுக.

இரண்டு புள்ளிகள் (32, 273), (212, 373).

(32, 273) மற்றும் (212, 373) ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{K-273}{373-273} = \frac{F-32}{212-32}$$

$$K = \frac{5}{9}(F-32)+273 \quad \ldots(1)$$

K = 0 என (1) ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது,

$$0 = \frac{5}{9}(F-32)+273$$

$$\Rightarrow F = 32 - 491.4 = -459.4$$

5. ஆய அச்சுக்களை வெட்டும் ஒரு கோட்டை (– 5, 4) எனும்புள்ளி 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கோட்டின் சமன்பாட்டை $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$ என்க.

இது X -அச்சை A (a, 0) விலும், Y -அச்சை B (0, b) யிலும் சந்திக்கிறது.

P (– 5, 4) என்ற புள்ளி AB என்ற கோட்டை 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

பிரிவு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$\left(\frac{1(0)+2(a)}{1+2}, \frac{1(b)+2(0)}{1+2}\right) = (-5, 4)$$

$$\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}\right) = (-5, 4)$$

$$\frac{2a}{3} = -5, \quad \frac{b}{3} = 4$$

$$a = -\frac{15}{2}, \quad b = 12$$

$\therefore$ கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$

அதாவது $-\frac{2x}{15}+\frac{y}{12} = 1$

$$\Rightarrow 8x - 5y + 60 = 0$$

6. x -அச்சிற்கு இணையாக மற்றும் செங்குத்தாக இருப்பதும், (4, 3) புள்ளி வழிச்செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) X -அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சாய்வு '0' அதாவது, m = 0

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்வதும் சாய்வு 'm' உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 0(x - 4)$$

$$\Rightarrow y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y = 3$$

(ii) X-அச்சிற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு வரையறுக்கப்படாதது. அதாவது, $\frac{1}{0} = m$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y - 3 = \frac{1}{0}(x - 4)$

$$\Rightarrow x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 4$$

7. (2, 1) என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதும் (1, 3) மற்றும் (– 3, 1) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு இணையானதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

(1, 3), (– 3, 1) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{3-1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

தேவையான கோடு, (1, 3), (– 3, 1) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு இணையாக உள்ளது.

$\therefore$ தேவையான கோட்டின் சாய்வு = $\frac{1}{2}$

கோடுகள் இணை எனில், சாய்வுகள் சமம்.

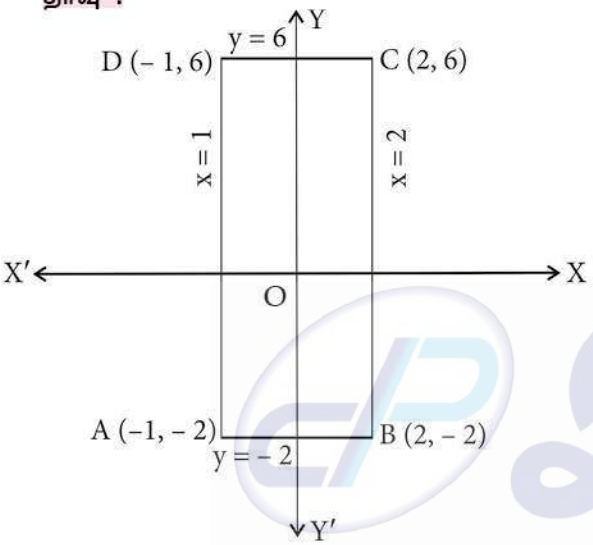
(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்வதும், சாய்வு 'm' உடையதுமான கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$
$$\Rightarrow \quad 2(y - 1) = x - 2$$
$$\Rightarrow \quad x - 2y = 0$$

8. x = 2, x = – 1, y = 6 மற்றும் y = – 2 என்பனவற்றை பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :



AC -ன் சமன்பாடு = $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{y + 2}{6 + 2} = \frac{x + 1}{2 + 1}$$
$$\Rightarrow \quad 3(y + 2) = 8(x + 1)$$
$$\Rightarrow \quad 8x - 3y + 2 = 0$$

BD -ன் சமன்பாடு, $\Rightarrow \frac{y + 2}{6 + 2} = \frac{x - 2}{-1 - 2}$

$$\Rightarrow \quad -3(y + 2) = 8(x - 2)$$
$$\Rightarrow \quad 8x + 3y - 10 = 0$$

9. (1, 1) மற்றும (2, 3) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையக்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

P என்பது A(1, 1) , B (2, 3) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி என்க.

$$\Rightarrow \quad P\left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

AB ன் மையக்குத்துக் கோட்டின் சாய்வு 'm' என்க.

m × AB ன் சாய்வு = – 1

$$m \times \left(\frac{3 - 1}{2 - 1}\right) = -1$$
$$m = -\frac{1}{2}$$

மையக்குத்துக்கோடு $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ வழிச் செல்வதும் சாய்வு $m = -\frac{1}{2}$ கொண்டதாகவும் உள்ளது.

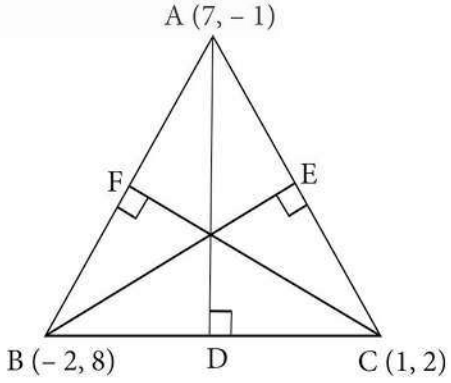
மையக்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$
$$2x + 4y - 11 = 0$$

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. A (7, – 1), B (– 2, 8) மற்றும் C (1, 2) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :



முக்கோணம் ABC -ன் குத்துக்கோடுகள் AD, BE மற்றும் CF என்க. m_1, m_2 மற்றும் m_3 என்பன முறையே AD, BE மற்றும் CF ஆகியவற்றின் சாய்வுகள் என்க.

AD என்பது BC க்குச் செங்குத்து.

∴ AD-ன் சாய்வு × BC -ன் சாய்வு = –1

$$m_1 \times \left(\frac{2 - 8}{1 + 2}\right) = -1$$
$$\therefore \quad m_1 = \frac{1}{2}$$

BE என்பது AC க்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ BE -ன் சாய்வு $\times$ AC -ன் சாய்வு $= -1$

$$m_2 \times \left(\frac{-1-2}{7-1}\right) = -1$$

$$\therefore \quad m_2 = 2$$

CF என்பது AB க்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ CF -ன் சாய்வு $\times$ AB -ன் சாய்வு $= -1$

$$m_3 \times \left(\frac{-1-8}{7+2}\right) = -1$$

$$m_3 = 1$$

AD என்பது A (7, –1) வழிச் செல்வதும் சாய்வு $m_1 = \frac{1}{2}$ கொண்டதாகவும் உள்ளது எனில், அதன் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 7)$$

$$\Rightarrow \quad x - 2y - 9 = 0$$

BE என்பது B (– 2, 8) வழிச் செல்வதும், சாய்வு $m_2 = 2$ கொண்டதாகவும் உள்ளது எனில்,

அதன் சமன்பாடு $y - 8 = 2(x + 2)$

$$\Rightarrow \quad 2x - y + 12 = 0$$

CE என்பது C (1, 2) வழிச்செல்வதும், சாய்வு $m_3 = 1$ கொண்டதாகவும் உள்ளது எனில்,

அதன் சமன்பாடு $y - 2 = 1(x - 1)$

$$\Rightarrow \quad x - y + 1 = 0$$

2. A (0, 1), B (x, y), C (5, – 2) மற்றும் D (2, – 1) என்ற புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கின்றன எனில், x மற்றும் y -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

AB -ன் சாய்வு $= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$= \frac{1-y}{0-x}$$

$$= \frac{1-y}{-x}$$

BC -ன் சாய்வு $= \frac{y+2}{x-5}$

CD -ன் சாய்வு $= \frac{-2+1}{5-2}$

$$= -\frac{1}{3}$$

DA -ன் சாய்வு $= \frac{-1-1}{2-0}$

$$= -\frac{2}{2} = -1$$

நாற்கரம் ABCD -ல், AB என்பது CD க்கு இணை.

$\therefore$ AB -ன் சாய்வு $=$ CD -ன் சாய்வு

$$\frac{1-y}{-x} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3 - 3y = x$$

$$\Rightarrow \quad x + 3y = 3 \qquad \ldots (1)$$

BC என்பது AD க்கு இணை

BC -ன் சாய்வு $=$ AD -ன் சாய்வு

$$\frac{y+2}{x-5} = -1$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 = -x + 5$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 3 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) ஐத் தீர்க்க,

$$x + 3y = 3 \qquad \ldots (1)$$

$$x + y = 3 \qquad \ldots (2)$$

(1) – (2) $\Rightarrow$ $\quad 2y = 0$

$$\Rightarrow \quad y = 0$$

(2) -ல் பிரதியிட,

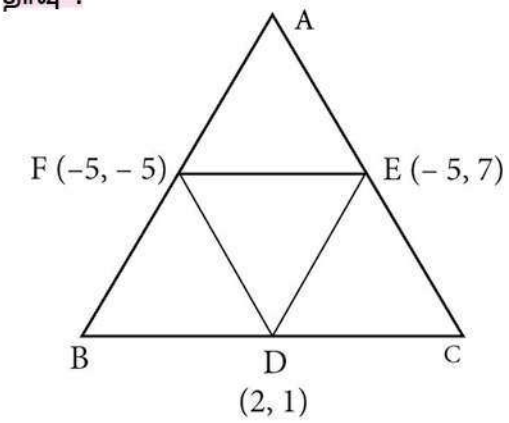
$$x + 0 = 3$$

$$x = 3$$

$\therefore$ $x = 3$ மற்றும் $y = 0$ மற்றும் புள்ளி B (3, 0).

3. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் (2, 1), (– 5, 7) மற்றும் (– 5, – 5) எனில், அதன் பக்கங்கள் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :



முக்கோணம் ABC -ல்

D (2, 1), E (– 5, 7) மற்றும் F (– 5, – 5) என்பன முறையே BC, CA மற்றும் AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்க.

EF -ன் சாய்வு $= \frac{-5-7}{-5+5}$

$= -\frac{12}{0}$

(வரையறுக்கப்படாதது)

∴ EF என்பது Y-அச்சிற்கு இணை.

ஆனால் EF என்பது BC -க்கு இணை. [∵ முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகவும், அதில் பாதி நீளத்தையும் கொண்டிருக்கும்]

Y -அச்சிற்கு இணையான மற்றும் 'a' தூரத்தில் இருக்கும் எந்த ஒரு கோட்டின் சமன்பாடும் x = a.

இது (2, 1) புள்ளி வழிச் செல்வதால் 2 = a

∴ BC ன் சமன்பாடு x = 2

இப்போது, FD ன் சமன்பாடு $= \frac{1+5}{2+5} = \frac{6}{7}$

வடிவ கணிதத்தின்படி, CA என்பது FD க்கு இணை.

∴ CA -ன் சாய்வு $= \frac{6}{7}$

CA என்பது E (–5, 7) என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

∴ CA -ன் சமன்பாடு $y - 7 = \frac{6}{7}(x + 5)$

$\Rightarrow 6x - 7y + 79 = 0$

இப்போது, DE -ன் சாய்வு $= \frac{7-1}{-5-2} = \frac{-6}{7}$

AB என்பது DE க்கு இணை.

AB -ன் சாய்வு $= -\frac{6}{7}$

AB என்பது (– 5, – 5) வழிச் செல்கிறது.

∴ AB ன் சமன்பாடு $y + 5 = -\frac{6}{7}(x + 5)$

$\Rightarrow 6x + 7y + 65 = 0.$

4. ஆய அச்சுகளின் மீது வெட்டுத்துண்டுகளை கீழ்க்காணுமாறு கொண்டுள்ளதும், (3, 4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) ஒரே அளவைக் கொண்டதும், எதிரெதிர்க் குறிகளைக் கொண்டதுமான வெட்டுத்துண்டுகள்.

(ii) வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 14.

தீர்வு :

(i) ஆய அச்சுகளின் மீது உள்ள வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே 'a' மற்றும் '– a' என்க.

கோட்டின் வெட்டுத்துண்டு வடிவச் சமன்பாடு

$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$

$\Rightarrow x - y = a$

இது (3, 4) புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$a = 3 - 4 = -1$

∴ சமன்பாடு $x - y + 1 = 0$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 14.

அதாவது, $a + b = 14 \Rightarrow b = 14 - a$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{14-a} = 1$

இது, (3, 4) புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$\frac{3}{a} + \frac{4}{14-a} = 1$

$\Rightarrow a^2 - 13a + 42 = 0$

$\Rightarrow (a - 6)(a - 7) = 0$

$\Rightarrow a = 6, 7$

$a = 6, b = 8$ எனும்போது,

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$

$\Rightarrow 4x + 3y = 24$

$a = 7, b = 7$ எனும்போது

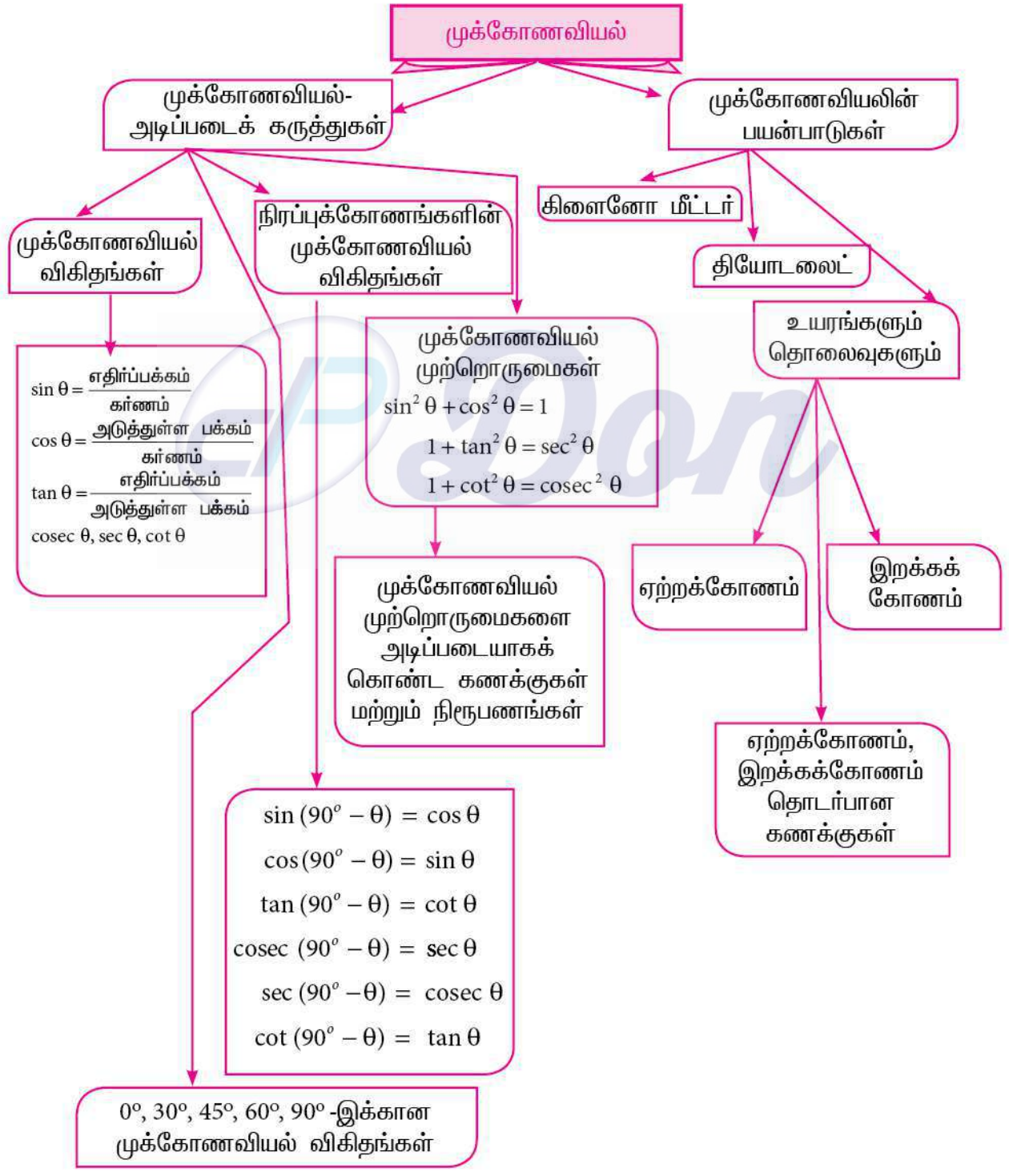
நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$

$\Rightarrow x + y = 7$

அலகு 6

முக்கோணவியல்

மன வரைபடம்



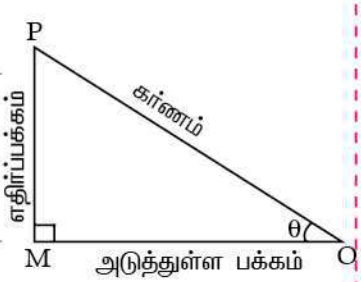
முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

நினைவில் கொள்க

(i) முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ எனில்

1. $\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$
2. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$
3. $\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
4. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$
5. $\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
6. $\cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}$



மேலும்

7. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
8. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
9. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
10. $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(ii) $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ –இக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்களின் அட்டவணை

θ / முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்க இயலாது
$\operatorname{cosec}\theta$	வரையறுக்க இயலாது	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\cot\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்க இயலாது
$\cot\theta$	வரையறுக்க இயலாது	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

(iii) நிரப்புக்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

1. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
2. $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$
3. $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$
4. $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$
5. $\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
6. $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

மேலும்

1. $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$
2. $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$
3. $(\tan\theta)^2 = \tan^2\theta$
4. $(\operatorname{cosec}\theta)^2 = \operatorname{cosec}^2\theta$
5. $(\sec\theta)^2 = \sec^2\theta$
6. $(\cot\theta)^2 = \cot^2\theta$

(iv) முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்

θ –வின் அனைத்து மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும்

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

எடுத்துக்காட்டு

இந்த முற்றொருமைகள் முக்கோணவியலின் அடிப்படை முற்றொருமைகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. ஆனால் $0^\circ < \theta < 90^\circ$ எனக் கொண்டால்

1. $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (அ) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
2. $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ (அ) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
3. $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$ (அ) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

என்றவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

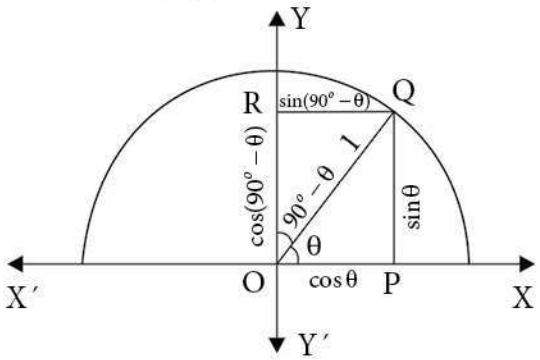
1. (i) $\sin(90 - \theta) = \cos\theta$ (ii) $\cos(90 - \theta) = \sin\theta$ என நிருபி.

முக்கோணவியல் நிரப்பு கோணங்களுக்கான காட்சி மெய்ம்மை நிரூபணம் .

படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஓர் அலகு ஆரமுடைய அரைவட்டத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\angle QOP = \theta$ என்க.

எனவே, $\angle QOR = 90^\circ - \theta$, இங்கு, OPQR என்பது ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.



முக்கோணம் OPQ –லிருந்து, $\frac{OP}{OQ} = \cos\theta$

ஆனால், OQ = ஆரம் = 1

எனவே, $OP = OQ\cos\theta = \cos\theta$

இதேபோல, $\frac{PQ}{OQ} = \sin\theta$

எனவே, $PQ = OQ\sin\theta = \sin\theta$ (ஏனெனில் $OQ = 1$)

$OP = \cos\theta$, $PQ = \sin\theta$ ... (1)

இப்பொழுது முக்கோணம் QOR -லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\frac{OR}{OQ} = \cos(90^\circ - \theta)$$

எனவே, OR $= OQ\cos(90^\circ - \theta)$

ஆகவே, OR $= \cos(90^\circ - \theta)$

இதுபோலவே, $\frac{RQ}{OQ} = \sin(90^\circ - \theta)$

மேலும், $\frac{RQ}{OR} = \sin(90^\circ - \theta)$

OR $= \cos(90^\circ - \theta)$, RQ $= \sin(90^\circ - \theta)$ ... (2)

OPQR என்பது செவ்வகம் என்பதால்,

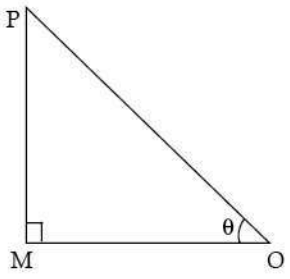
OP = RQ மற்றும் OR = PQ

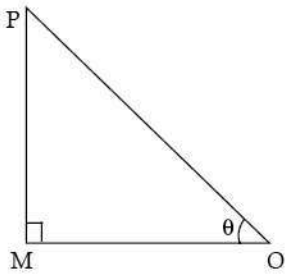
எனவே (1), (2) -லிருந்து கிடைக்கப்பெறுவன,

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ மற்றும் $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

2. கீழ்காணும் முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **(ii)** $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ **(iii)** $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

படம்	முற்றொருமை	நிரூபணம்
	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	செங்கோண முக்கோணம் OMP ல் $\frac{OM}{OP} = \cos\theta, \frac{PM}{OP} = \sin\theta$ ... (1) பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி, $MP^2 + OM^2 = OP^2$ ... (2) (2) –ஐ OP^2 –ஆல் இருபுறமும் வகுக்க (இங்கு, $OP \neq 0$) நாம் பெறுவது, $\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$ என்பதால் $\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OP}\right)^2$ (1) -லிருந்து, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$ ஆகவே, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	செங்கோண முக்கோணம் OMP –ல் $\frac{MP}{OM} = \tan\theta, \frac{OP}{OM} = \sec\theta$ ... (3) (2) –லிருந்து, $MP^2 + OM^2 = OP^2$ (2) –ஐ OM^2 -ஆல் இருபுறமும் வகுக்க (இங்கு, $OM \neq O$) நமக்கு கிடைப்பது, $\frac{MP^2}{OM^2} \times \frac{OM^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2}$ $\left(\frac{MP}{OM}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OM}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$ என்பதால் (3) - லிருந்து $(\tan\theta)^2 + 1^2 = (\sec\theta)^2$ ஆகவே, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

	$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$	செங்கோண முக்கோணம் OMP-ல் $\frac{OM}{MP}=\cot\theta, \frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}\theta$ ... (4) (2) –லிருந்து, $MP^2+OM^2=OP^2$ (2) –ஐ MP^2 -ஆல் இருபுறமும் வகுக்க, (இங்கு, $MP\neq 0$) நாம் பெறுவது, $\frac{MP^2}{MP^2}+\frac{OM^2}{MP^2}=\frac{OP^2}{MP^2}$ $\left(\frac{MP}{MP}\right)^2+\left(\frac{OM}{MP}\right)^2=\left(\frac{OP}{MP}\right)^2$ என்பதால் (4) –லிருந்து, $1^2+(\cot\theta)^2=(\operatorname{cosec}\theta)^2$ ஆகவே, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

எடுத்துக்காட்டு

6.1 $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\tan^2\theta-\sin^2\theta = \tan^2\theta-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta$$

$$=\tan^2\theta(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta\sin^2\theta$$

6.2 $\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1-\cos A}$$

[1 + cos A யின் இணையைக் கொண்டு தொகுதி மற்றும் பகுதியைப் பெருக்கவும்]

$$=\frac{\sin A(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$=\frac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2 A}$$

$$=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

6.3 $1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}=\operatorname{cosec}\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு : $1+\frac{\cot^2\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$

$$=1+\frac{\operatorname{cosec}^2\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1} \quad [\text{ஏனெனில் } \operatorname{cosec}^2\theta-1=\cot^2\theta]$$

$$=1+\frac{(\operatorname{cosec}\theta+1)(\operatorname{cosec}\theta-1)}{\operatorname{cosec}\theta+1}$$

$$=1+(\operatorname{cosec}\theta-1) = \operatorname{cosec}\theta$$

6.4 $\sec\theta-\cos\theta=\tan\theta\sin\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\sec\theta-\cos\theta = \frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

[ஏனெனில் $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$]

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\sin\theta = \tan\theta\sin\theta$$

6.5 $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

[$1-\cos\theta$ –யின் இணையைக் கொண்டு

தொகுதி மற்றும் பகுதியைப் பெருக்கவும்]

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}}$$

[ஏனெனில் $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

6.6 $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு :

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta$$

6.7 **$\sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B = 1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு :

$\sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$

$= \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B$

$= \sin^2 A (\cos^2 B + \sin^2 B) + \cos^2 A (\sin^2 B + \cos^2 B)$

$= \sin^2 A (1) + \cos^2 A (1)$ [ஏனெனில் $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$]

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

6.8 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$, **எனில்,** $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ **என நிரூபிக்க.**

தீர்வு :

இப்பொழுது, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ என்பதை இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்துக.

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = (\sqrt{2}\cos\theta)^2$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta$$

$$2\cos^2\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \quad [\because \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta]$$

$$= \sqrt{2}\sin\theta$$

ஆகவே, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

6.9 $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு :

$(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta \times 1}{\sin^2\theta \cos^2\theta} = 1$$

6.10 $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A} = 2\operatorname{cosec} A$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு :

$$\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{\sin A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{\sin A(1-\cos A) + \sin A(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

$$= \frac{\sin A - \sin A\cos A + \sin A + \sin A\cos A}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{2\sin A}{1-\cos^2 A} = \frac{2\sin A}{\sin^2 A}$$

$$= 2\operatorname{cosec} A$$

6.11 $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ **எனில்,** $\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு :

$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = P$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ... (1)

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1 \text{ (முற்றொருமை)}$$

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{P} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைக் கூட்ட,

$$2\operatorname{cosec}\theta = P + \frac{1}{P}$$

$$2\operatorname{cosec}\theta = \frac{P^2+1}{P} \quad \ldots (3)$$

(2) –லிருந்து (1) –ஐ கழித்தால் கிடைப்பது,

$$2\cot\theta = P - \frac{1}{P}$$

$$2\cot\theta = \frac{P^2-1}{P} \quad \ldots (4)$$

(4) -ஐ (3) –ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$\frac{2\cot\theta}{2\operatorname{cosec}\theta} = \frac{P^2-1}{P} \times \frac{P}{P^2+1}$ இதிலிருந்து

$\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

6.12 $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 B(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$$

6.13 $\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right) = 2 \sin A \cos A$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு

$$\left(\frac{\cos^3 A - \sin^3 A}{\cos A - \sin A}\right) - \left(\frac{\cos^3 A + \sin^3 A}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{(\cos A - \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A + \cos A \sin A)}{\cos A - \sin A}\right)$$

$$- \left(\frac{(\cos A + \sin A)(\cos^2 A + \sin^2 A - \cos A \sin A)}{\cos A + \sin A}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{ஏனெனில் } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)\end{array}\right]$$

$= (1 + \cos A \sin A) - (1 - \cos A \sin A) = 2 \cos A \sin A$

6.14 $\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\operatorname{cosec} A + \cot A - 1} = 1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\frac{\sin A}{\sec A + \tan A - 1} + \frac{\cos A}{\operatorname{cosec} A + \cot A - 1}$$

$$= \frac{\sin A(\operatorname{cosec} A + \cot A - 1) + \cos A(\sec A + \tan A - 1)}{(\sec A + \tan A - 1)(\operatorname{cosec} A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{\sin A \operatorname{cosec} A + \sin A \cot A - \sin A + \cos A \sec A + \cos A \tan A - \cos A}{(\sec A + \tan A - 1)(\operatorname{cosec} A + \cot A - 1)}$$

$$= \frac{1 + \cos A - \sin A + 1 + \sin A - \cos A}{\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} - 1\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{1+\sin A - \cos A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\cos A - \sin A}{\sin A}\right)}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{(1+\sin A - \cos A)(1+\cos A - \sin A)}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{[1+(\sin A - \cos A)][1-(\sin A - \cos A)]}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{1-(\sin A - \cos A)^2}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{1-(\sin^2 A + \cos^2 A - 2 \sin A \cos A)}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{1-(1-2 \sin A \cos A)}$$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{1-1+2 \sin A \cos A} = \frac{2 \sin A \cos A}{2 \sin A \cos A} = 1.$$

6.15 $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

இடப்பக்கம்

$$= \left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}} \qquad = \tan^2 A \qquad \ldots (1)$$

வலப்பக்கம்

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2 = (-\tan A)^2 = \tan^2 A \quad \ldots (2)$$

(1), (2) –லிருந்து

$$\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$$

6.16 $\dfrac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A}$

= $\sin^2 A \cos^2 A$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$$\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3 A-\operatorname{cosec}^3 A}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)(\sin A-\cos A)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)(\sec^2 A+\sec A \operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A)}$$

$$= \frac{\frac{(\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A)(\sin A-\cos A)}{\sin A\cos A}}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{1}{\cos^2 A}+\frac{1}{\cos A\sin A}+\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)\left(\frac{\sin A}{\sin A\cos A}-\frac{\cos A}{\sin A\cos A}\right)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)\left(\frac{\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}\right)}$$

$$= \frac{(\sin A\cos A+1)(\sec A-\operatorname{cosec} A)}{(\sec A-\operatorname{cosec} A)(1+\sin A\cos A)} \times \sin^2 A\cos^2 A$$

$$= \sin^2 A\cos^2 A$$

6.17 $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p$ மற்றும் $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q$ எனில்,

$p^2q^2(p^2+q^2+3) = 1$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

இங்கு, $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p \qquad \ldots (1)$

மற்றும் $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q \qquad \ldots (2)$

$$p^2q^2(p^2+q^2+3) = \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times \left[\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2+3\right]$$

[(1), (2) -ஐப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது]

$$= \left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right) \times \left[\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}+3\right]$$

$$= (\cos^2\theta \times \sin^2\theta) \times \left[\left(\frac{\cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)\right]$$

$$= \cos^6\theta+\sin^6\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta)^3+(\sin^2\theta)^3+3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= [(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^3-3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)] + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1-3\cos^2\theta\sin^2\theta(1)+3\cos^2\theta\sin^2\theta = 1$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. முக்கோணவியல் விகிதங்களின் எண்ணிக்கையானது _____.

விடை: 6

2. $1-\cos^2\theta$ = _____

விடை: $\sin^2\theta$

3. $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$ = _____

விடை: 1

4. $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta)$ = _____

விடை: -1

5. $\cos 60^\circ \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ =$ _____

விடை : 1

6. $\tan 60^\circ \cos 60^\circ + \cot 60^\circ \sin 60^\circ =$ _____

விடை : $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

7. $(\tan 45^\circ + \cot 45^\circ) + (\sec 45^\circ \operatorname{cosec} 45^\circ) =$ _____

விடை : 4

8. (i) $\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$ எனில், $\theta =$ _____

(ii) $\cot\theta = \tan\theta$ எனில், $\theta =$ _____

விடை : (i) 45° (ii) 45°

சிந்தனைக் களம்

1. $\sin\theta$ மற்றும் $\cos\theta$ -வின் மதிப்புகள் எப்போது சமமாக இருக்கும்?

விடை: $\theta = 45^\circ$ எனில்

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore \theta = 45^\circ$ எனில், $\sin\theta = \cos\theta$

2. $\sin\theta = 2$ எனில், θ -ன் மதிப்பு என்ன?

விடை: $\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$,

இது -1 முதல் $+1$ வரையிலான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். $\sin\theta = 2$ எனக்கொண்டவாறு θ மெய்யெண்களில் இல்லை.

3. θ - ன் மதிப்பு 0° லிருந்து 90° வரை அதிகரிக்கிறது எனில், ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களில் எவை வரையறுக்கப்படாத மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்?

விடை: $\tan 90^\circ$
$\sec 90^\circ$
$\operatorname{cosec} 0^\circ$
$\cot 0^\circ$

என்ற முக்கோணவியல் விகிதங்கள் வரையறுக்கப்படாத மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

4. எட்டு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் இருப்பதற்குச் சாத்தியமுண்டா?

விடை :

எட்டு முக்கோணவியல் விகிதங்கள் இருப்பதற்குச் சாத்தியமில்லை. ஏனெனில் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் முக்கோணத்தின் மொத்தமுள்ள மூன்று பக்கங்களுள் இரண்டிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பைத் தருகின்றன. எனவே 6 விகிதங்கள் மட்டுமே சாத்தியம்.

5. $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ என்க. θ -ன் மதிப்புகளுக்கு பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையாகும்?

(i) $\sin\theta > \cos\theta$ **(ii)** $\cos\theta > \sin\theta$

(iii) $\sec\theta = 2\tan\theta$ **(iv)** $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

விடை :

(i) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 60^\circ > \cos 60^\circ$

$\sin 90^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$

$\Rightarrow \sin 90^\circ > \cos 90^\circ$

$\theta = 60^\circ$ மற்றும் $\theta = 90^\circ$ எனில், $\sin\theta > \cos\theta$ ஆகும்.

(ii) $\sin 0^\circ = 0$; $\cos 0^\circ = 1$

$\Rightarrow \cos 0^\circ > \sin 0^\circ$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \cos 30^\circ > \sin 30^\circ$

$\theta = 0^\circ$ மற்றும் $\theta = 30^\circ$ எனில் $\cos\theta > \sin\theta$ ஆகும்.

(iii) $\sec\theta = 2\tan\theta$

$$\frac{\sec\theta}{\tan\theta} = 2$$

$$\frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = 2$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 2$$

$$\frac{1}{\sin\theta} = 2$$

$$\operatorname{cosec}\theta = 2$$

$\theta = 30^\circ$ எனில், $\operatorname{cosec}\theta = 2$

$\theta = 30^\circ$ எனில், $\sec\theta = 2\tan\theta$

மேலும் $\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2\tan 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

$$\frac{1}{\sin\theta} = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta} = 2$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = 2$$

$$\sec\theta = 2$$

$\theta = 60^\circ$ எனில், $\sec\theta = 2$

$\theta = 60^\circ$ எனில், $\operatorname{cosec}\theta = 2\cot\theta$

பயிற்சி 6.1

1. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

(ii) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

தீர்வு

(i) $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

இடப்பக்கம் $= \cot\theta + \tan\theta$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta\sec\theta$

$= \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

$=$ வலப்பக்கம்

(ii) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

இடப்பக்கம் $= \tan^4\theta + \tan^2\theta$

$= \tan^2\theta\,(\tan^2\theta + 1)$

$= \tan^2\theta.\sec^2\theta$ $[\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta]$

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ $[\because \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1]$

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta$

$=$ வலப்பக்கம்

2. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta - 1} = \tan^2\theta$ **(ii)** $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

தீர்வு

(i) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta - 1} = \tan^2\theta$

இடப்பக்கம் $= \dfrac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta - 1}$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^2\theta}}{\dfrac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta = \text{வலப்பக்கம்}$$

(ii) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

இடப்பக்கம் $= \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

[பகுதி மற்றும் தொகுதியை $1 - \sin\theta$ -ஆல் பெருக்க]

$$= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1^2 - \sin^2\theta}$$

$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$[\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta]$

$$= \frac{(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \sec\theta - \tan\theta$

$=$ வலப்பக்கம்

3. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

தீர்வு

(i) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

இடப்பக்கம் $= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

[பகுதி மற்றும் தொகுதியை $\sqrt{1-\sin\theta}$ -ஆல் பெருக்க]

$= \sqrt{\frac{1^2-\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)^2}}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$

$= \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2}}$ $[\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$

$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

[பகுதி மற்றும் தொகுதியை $1+\sin\theta$ ஆல் பெருக்க]

$= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1^2-\sin^2\theta}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2]$

$= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$ $[\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$

$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sec\theta + \tan\theta$ = வலப்பக்கம்

(ii) $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

இடப்பக்கம் $= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1^2-\sin^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1^2-\sin^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$

$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$= 2 \times \frac{1}{\cos\theta}$

$= 2\sec\theta$

= RHS

4. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$

(ii) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

தீர்வு

(i) $\sec^6\theta = \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$

இடப்பக்கம் $= \sec^6\theta$

$= (\sec^2\theta)^3$

$= (1+\tan^2\theta)^3$ $[\because 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta]$

$= 1^3 + (\tan^2\theta)^3 + 3(1)(\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)$

$[\because (a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)]$

$= 1 + \tan^6\theta + 3\tan^2\theta(\sec^2\theta)$

$[\because 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta]$

$= \tan^6\theta + 3\tan^2\theta\sec^2\theta + 1$ = வலப்பக்கம்

(ii) $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

$= 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

இடப்பக்கம் $= (\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$

$= \sin^2\theta + \sec^2\theta + 2\sin\theta\sec\theta + \cos^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{cosec}\theta$

$[\because (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab]$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + (\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta) + 2(\sin\theta\sec\theta + \cos\theta\operatorname{cosec}\theta)$

$= 1 + \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\left(\sin\theta\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$= 1 + \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$

$= 1 + \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$

$= 1 + \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2(\operatorname{cosec}\theta\sec\theta)$

$= 1 + [\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + 2\sec\theta\operatorname{cosec}\theta]$

$= 1 + (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2$ = வலப்பக்கம்

5. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\sec^4\theta(1-\sin^4\theta)-2\tan^2\theta=1$

(ii) $\dfrac{\cot\theta-\cos\theta}{\cot\theta+\cos\theta}=\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1}$

தீர்வு

(i) $\sec^4\theta(1-\sin^4\theta)-2\tan^2\theta=1$

இடப்பக்கம் $=\sec^4\theta(1-\sin^4\theta)-2\tan^2\theta$

$=\sec^4\theta(1^2-(\sin^2\theta)^2)-2\tan^2\theta$

$=\sec^4\theta(1+\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)-2\tan^2\theta$

$[\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$

$=\sec^4\theta(1+\sin^2\theta)\cos^2\theta-2\tan^2\theta$

$[\because 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta]$

$=\dfrac{1}{\cos^4\theta}(1+\sin^2\theta)\cos^2\theta-2\tan^2\theta$

$=\dfrac{1}{\cos^2\theta}(1+\sin^2\theta)-2\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1^2+\sin^2\theta-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=1=$ வலப்பக்கம்

(ii) $\dfrac{\cot\theta-\cos\theta}{\cot\theta+\cos\theta}=\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1}$

இடப்பக்கம் $=\dfrac{\cot\theta-\cos\theta}{\cot\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\cos\theta}$

$=\dfrac{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

இடப்பக்கம் $=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ ... (1)

வலப்பக்கம் $=\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-1}{\operatorname{cosec}\theta+1}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{\sin\theta}-1}{\dfrac{1}{\sin\theta}+1}=\dfrac{\dfrac{1-\sin\theta}{\sin\theta}}{\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta}}=\dfrac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$

வலப்பக்கம் $=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ .. (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து

இடப்பக்கம் = வலப்பக்கம்

6. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

(i) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=0$

(ii) $\dfrac{\sin^3 A+\cos^3 A}{\sin A+\cos A}+\dfrac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A-\cos A}=2$

தீர்வு :

(i) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=0$

இடப்பக்கம் $=\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}$

$=\dfrac{(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)+(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\dfrac{(\sin^2 A-\sin^2 B)+(\cos^2 A-\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\dfrac{(\sin^2 A+\cos^2 A)-(\sin^2 B+\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\dfrac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

$=\dfrac{0}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=0$

= வலப்பக்கம்

(ii) $\dfrac{\sin^3 A+\cos^3 A}{\sin A+\cos A}+\dfrac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A-\cos A}=2$

இடப்பக்கம் $=$

$\dfrac{\sin^3 A+\cos^3 A}{\sin A+\cos A}+\dfrac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A-\cos A}$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)^3 - 3\sin A \cos A (\sin A + \cos A)}{\sin A + \cos A}$$

$$+ \frac{(\sin A - \cos A)^3 + 3\sin A \cos A (\sin A - \cos A)}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)[(\sin A + \cos A)^2 - 3\sin A \cos A]}{(\sin A + \cos A)}$$

$$+ \frac{(\sin A - \cos A)[(\sin A - \cos A)^2 + 3\sin A \cos A]}{\sin A - \cos A}$$

$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A - 3\sin A \cos A$

$+ \sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A \cos A + 3\sin A \cos A$

$= 2\sin^2 A + 2\cos^2 A$

$= 2(\sin^2 A + \cos^2 A) = 2 =$ வலப்பக்கம்

7. (i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ **எனில்,** $\tan\theta + \cot\theta = 1$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ **எனில்,**

$\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு:

(i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ எனக் கொள்வோம்.

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 3$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 3$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$2\sin\theta\cos\theta = 3 - 1$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 2$$

$$\sin\theta\cos\theta = 2/2$$

$$\sin\theta\cos\theta = 1 \quad \ldots (1)$$

நிரூபிக்கவேண்டியது $\tan\theta + \cot\theta = 1$

இடப்பக்கம் $= \tan\theta + \cot\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{1} \quad [\because (1) \text{-லிருந்து } \sin\theta\cos\theta = 1]$$

$= 1$

$\therefore \tan\theta + \cot\theta = 1$

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$\sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$$

$$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta} = 1$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

இடப்பக்கம் $= \tan 3\theta$

$= \tan 3(30^\circ)$

$= \tan 90^\circ$

= வரையறுக்க இயலாது ... (1)

வலப்பக்கம் $= \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

$$= \frac{3\tan 30^\circ - \tan^3 30^\circ}{1 - 3\tan^2 30^\circ}$$

$$= \frac{3\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{1 - 3\times\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{3\times 3 - 1}{3\sqrt{3}}}{1 - 1}$$

$$= \frac{9-1}{3\sqrt{3}(0)} = \frac{8}{0} =$$ வரையறுக்க இயலாது ... (2)

(1) மற்றும் (2) -லிருந்து

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$ என

நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. (i) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m$ **மற்றும்** $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} = n$ **எனக் கொண்டு,** $(m^2 + n^2)\cos^2\beta = n^2$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

(ii) $\cot\theta + \tan\theta = x$ **மற்றும்** $\sec\theta - \cos\theta = y$ **எனில்,** $(x^2y)^{2/3} - (xy^2)^{2/3} = 1$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு:

$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m$ மற்றும் $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = n$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

இடப்பக்கம் $= (m^2 + n^2)\cos^2\beta$

$= \left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)\cos^2\beta$

$= \frac{(\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta)}{\cos^2\beta\sin^2\beta}\cos^2\beta$

$= \frac{\cos^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)}{\sin^2\beta}$

$= \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}$ (1) $\quad[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^2$

$= n^2 =$ வலப்பக்கம்

(ii) $\cot\theta + \tan\theta = x$ மற்றும் $\sec\theta - \cos\theta = y$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$\cot\theta + \tan\theta = x$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$

$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = x$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = x$ ... (1)

மேலும், $\sec\theta - \cos\theta = y$

$\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = y$

$\Rightarrow \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = y$

$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = y$ ... (2)

இடப்பக்கம் $= (x^2y)^{2/3} - (xy^2)^{2/3}$

$= \left[\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\right]^{\frac{2}{3}} - \left[\left(\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\left(\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right)\right]^{\frac{2}{3}}$

[$\because$ (1) மற்றும் (2) இலிருந்து]

$= \left[\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right]^{\frac{2}{3}} - \left[\frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \times \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$

$= \left(\frac{1}{\cos^3\theta}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\right)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$= 1 =$ வலப்பக்கம் $\quad[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

9. (i) $\sin\theta + \cos\theta = p$ மற்றும் $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$ **எனில், $q(p^2 - 1) = 2p$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

(ii) $\sin\theta(1 + \sin^2\theta) = \cos^2\theta$ **எனில், $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு:

(i) $\sin\theta + \cos\theta = p$ மற்றும் $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = q$

இடப்பக்கம் $= q(p^2 - 1)$

$= (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)[(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1]$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1)$

$= \left(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)(1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1)$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \times 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2(\sin\theta + \cos\theta) = 2p =$ வலப்பக்கம்

(ii) $\sin\theta(1 + \sin^2\theta) = \cos^2\theta$ எனக் கொள்வோம்.

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$\sin^2\theta(1 + \sin^2\theta)^2 = \cos^4\theta$

$\Rightarrow (1 - \cos^2\theta)\{1 + (1 - \cos^2\theta)\}^2 = \cos^4\theta$

$\left[\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta,\ \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta\right]$

$\Rightarrow (1 - \cos^2\theta)\{1 + (1 - \cos^2\theta)^2 + 2(1)(1 - \cos^2\theta)\} = \cos^4\theta$

$\Rightarrow (1 - \cos^2\theta)(1 + 1 + \cos^4\theta - 2(1)\cos^2\theta + 2 - 2\cos^2\theta) = \cos^4\theta$

$\Rightarrow (1 - \cos^2\theta)(4 - 4\cos^2\theta + \cos^4\theta) = \cos^4\theta$

$\Rightarrow 4 - 4\cos^2\theta + \cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 4\cos^4\theta - \cos^6\theta = \cos^4\theta$

$\Rightarrow \quad 4 - 8\cos^2\theta + 5\cos^4\theta - \cos^6\theta = \cos^4\theta$

$4 - 8\cos^2\theta + 4\cos^4\theta - \cos^6\theta = 0$

$4 = 8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta + \cos^6\theta$

$\Rightarrow \cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$

10. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1}{a}$ **எனில்,** $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு: $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1}{a}$

$\therefore \quad a = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

நிரூபிக்க வேண்டியது $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta$

இடப்பக்கம் $= \frac{a^2-1}{a^2+1}$

$= \frac{\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1}$

$= \frac{\frac{1^2+\sin^2\theta+2\sin\theta}{\cos^2\theta} - 1}{\frac{1^2+\sin^2\theta+2\sin\theta}{\cos^2\theta} + 1}$

$= \frac{\frac{1+\sin^2\theta+2\sin\theta-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1+\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$= \frac{(1-\cos^2\theta)+\sin^2\theta+2\sin\theta}{\cos^2\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{1+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta}{1+1+2\sin\theta}$

$\left[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1 \quad 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta\right]$

$= \frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta}{2+2\sin\theta}$

$= \frac{2\sin\theta(\sin\theta+1)}{2(1+\sin\theta)}$

$= \sin\theta$ = வலப்பக்கம்

உயரங்களும் தொலைவுகளும்

நினைவில் கொள்க

வெவ்வேறான பொருட்களின் உயரங்களையும், தொலைவுகளையும் நேரிடையாக அளந்து பார்க்காமல் கணக்கிட முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது.

(i) பார்வைக் கோடு (Line of Sight)

நாம் ஒரு பொருளை உற்று நோக்கும் போது நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு வரையப்படும் நேர்கோட்டை பார்வைக் கோடு என அழைக்கிறோம்.

(ii) தியோடலைட் (Theodolite)

தியோடலைட் என்ற கருவி ஒரு பொருளை உற்று நோக்குபவரின் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும், பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தை அளவிடப் பயன்படுகிறது.

(iii) ஏற்றக்கோணம் (Angle of Elevation)

ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கு மேலே இருக்கும்போது, கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கும், பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் ஏற்றக்கோணம் எனப்படும்.

(iv) இறக்கக்கோணம் (Angle of Depression)

ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்குக் கீழே இருக்கும்போது, பார்வைக்கோட்டிற்கும், கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் இறக்கக்கோணம் எனப்படும்.

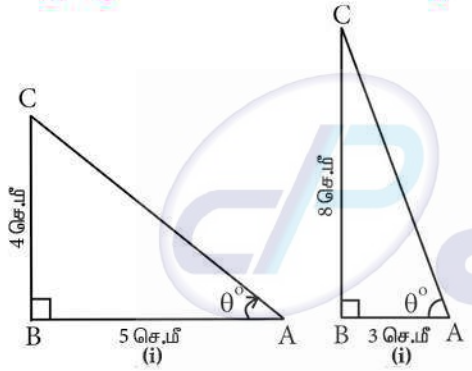
(v) கிளைனோ மீட்டர் (Clinometer)

பொதுவாக ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக் கோணங்களைக் கிளைனோ மீட்டர் என்ற கருவியின் மூலம் கண்டறியலாம்.

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு பொருளின் உயரம் அதிகரிக்கும் போது அதன் ஏற்றக்கோணத்தின் அளவும் அதிகரிக்கும்.
2. செங்குத்தாக உள்ள கோபுரம் அல்லது கட்டடம் போன்றவற்றின் அடியை நோக்கி நகரும்போது அதன் ஏற்றக்கோணம் அதிகரிக்கும்.
3. ஏற்றக்கோணமும், இறக்கக்கோணமும் ஒன்றுவிட்ட கோணமாக இருப்பதால் அவை இரண்டும் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

6.18 பின்வரும் முக்கோணங்களில் $\angle BAC$ –ஐ காண்க



தீர்வு :

(i) செங்கோண முக்கோணம்ABC –ல்

[படம் **(i)** –ஐ பார்க்கவும்]

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{4}{5}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}(0.8)$$

$$\theta = 38.7^\circ \quad [\because \tan 38.7^\circ = 0.8011]$$

$$\angle BAC = 38.7^\circ$$

(ii) செங்கோண முக்கோணம் ABC –ல்

படம் **(i)** –ஐ பார்க்கவும்]

$$\tan\theta = \frac{8}{3}$$

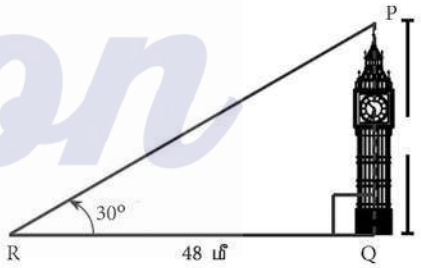
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) = \tan^{-1}(2.66)$$

$$\theta = 69.4^\circ \quad [\because \tan 69.4^\circ = 2.6604]$$

$$\angle BAC = 69.4^\circ$$

6.19 ஒரு கோபுரம் தரைக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. கோபுரத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து தரையில் 48 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :



கோபுரத்தின் உயரம் PQ என்க. PQ = h என்க.
கோபுரத்திற்கும் தரையில் உள்ள புள்ளி R –க்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு QR என்க.

செங்கோண முக்கோணம் PQR –ல் $\angle PRQ = 30^\circ$

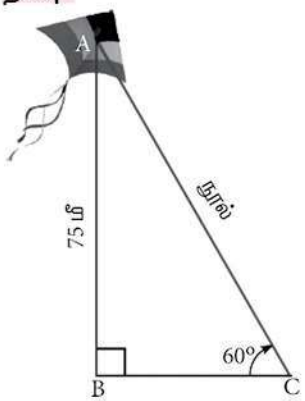
$$\tan\theta = \frac{PQ}{QR}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{48} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{48} \Rightarrow h = 16\sqrt{3}$$

ஆகவே, கோபுரத்தின் உயரம் $16\sqrt{3}$ மீ.

6.20 தரையிலிருந்து ஒரு பட்டம் 75 மீ உயரத்தில் பறக்கிறது. ஒரு நூல் கொண்டு தற்காலிமாகத் தரையின் ஒரு புள்ளியில் பட்டம் கட்டப்பட்டுள்ளது. நூல் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் 60° எனில், நூலின் நீளம் காண்க. (நூலை ஒரு நேர்க்கோடாக எடுத்துக்கொள்ளவும்).

தீர்வு



தரையிலிருந்து பட்டத்தின் உயரம் AB = 75 மீ என்க.

நூலின் நீளம் AC என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ABC –ல் $\angle ACB = 60^\circ$

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$. ஆகவே, $\sin 60^\circ = \frac{75}{AC}$

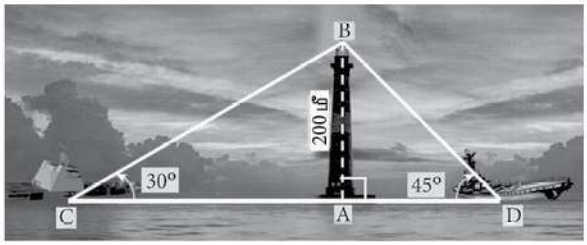
நாம் பெறுவது,

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{AC} \Rightarrow AC = \frac{150}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$

எனவே, நூலின் நீளம் $50\sqrt{3}$ மீ ஆகும்.

6.21 இரு கப்பல்கள் கலங்கரை விளக்கத்தின் இரு பக்கங்களிலும் கடலில் பயணம் செய்கின்றன. இரு கப்பல்களிலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 45° ஆகும். கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 200 மீ எனில், இரு கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க. $\left(\sqrt{3} = 1.732\right)$

தீர்வு:



கலங்கரை விளக்கம் AB என்க. C மற்றும் D என்பன இரு கப்பல்கள் இருக்கும் இடங்கள் என்க.

மேலும், AB = 200 மீ,

$\angle ACB = 30^\circ$, $\angle ADB = 45^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் BAC –ல்

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{200}{AC}$ இதிலிருந்து, $AC = 200\sqrt{3}$ ...(1)

செங்கோண முக்கோணம் BAD –ல்,

$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AD}$

$1 = \frac{200}{AD}$ இதிலிருந்து, $AD = 200$ ...(2)

தற்போது, $CD = AC + AD = 200\sqrt{3} + 200$

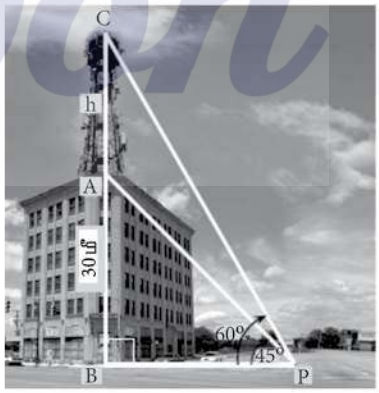
[(1),(2)–லிருந்து]

$CD = 200\left(\sqrt{3}+1\right) = 200 \times 2.732 = 546.4$

இரு கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 546.4 மீ ஆகும்.

6.22 தரையின்மீது ஒரு புள்ளியிலிருந்து 30 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் மேலுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் அடி மற்றும் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 45° மற்றும் 60° எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க $\left(\sqrt{3} = 1.732\right)$

தீர்வு:



கோபுரத்தின் உயரம் AC என்க. கட்டடத்தின் உயரம் AB என்க.

மேலும், AC = h மீ, AB = 30 மீ.

செங்கோண முக்கோணம் CBP –ல், $\angle CPB = 60^\circ$

$\tan\theta = \frac{BC}{BP}$

$\tan 60^\circ = \frac{AB + AC}{BP}$

இதிலிருந்து, $\sqrt{3} = \frac{30+h}{BP}$ .. (1)

செங்கோண முக்கோணம் ABP –ல், $\angle APB = 45^\circ$

$\tan\theta = \frac{AB}{BP}$

$\tan 45^\circ = \frac{30}{BP}$ இதிலிருந்து, BP = 30 ... (2)

(2) –ஐ (1) –ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பது,

$$\sqrt{3} = \frac{30+h}{30}$$

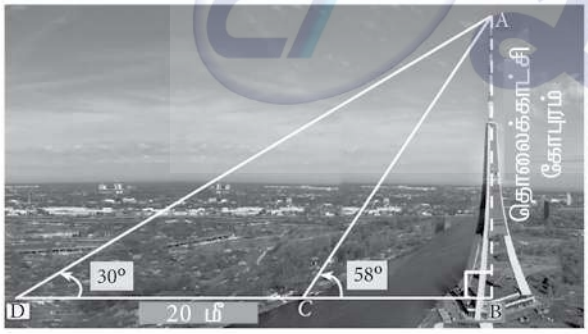
$$h = 30\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$= 30\ (1.732 - 1) = 30(0.732) = 21.96$$

எனவே, கோபுரத்தின் உயரம் = 21.96 மீ

6.23 ஒரு கால்வாயின் கரையில் ஒரு தொலைக்காட்சிக் கோபுரம் செங்குத்தாக உள்ளது. கால்வாயின் மறு கரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து காணும்பொழுது கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 58° ஆக உள்ளது. அப்புள்ளியிலிருந்து விலகி ஒரே நேர்க்கோட்டில் 20 மீ தொலைவில் சென்றவுடன் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தையும், கால்வாயின் அகலத்தையும் காண்க. (tan 58° = 1.6003)

தீர்வு :



தொலைக்காட்சிக் கோபுரத்தின் உயரம் AB என்க.
கால்வாயின் அகலம் BC என்க.
இங்கு, CD = 20 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ABC –ல்,

$$\tan 58^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1.6003 = \frac{AB}{BC} \quad ...(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ABD –ல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC+CD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC+20} \quad ..(2)$$

(1) -ஐ (2) ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{1.6003}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{BC+20}{BC}$$

$$BC = \frac{20}{1.7717} = 11.29 \text{ மீ} \quad ...(3)$$

$$1.6003 = \frac{AB}{11.29} \quad [(1),(3)\text{-லிருந்து}]$$

$$AB = 18.07$$

எனவே, கோபுரத்தின் உயரம் = 18.07 மீ
கால்வாயின் அகலம் = 11.29 மீ

6.24 ஒரு விமானம் G –யிலிருந்து 24° கோணத்தைத் தாங்கி 250 கி.மீ தொலைவிலுள்ள H -ஐ நோக்கிச் செல்கிறது. மேலும் H-லிருந்து 55° கோணத்தை தாங்கி 180 கி.மீ தொலைவிலுள்ள, J -ஐ நோக்கிச் செல்கிறது எனில்,

(i) G -ன் வடக்கு திசையிலிருந்து H -ன் தொலைவு என்ன?

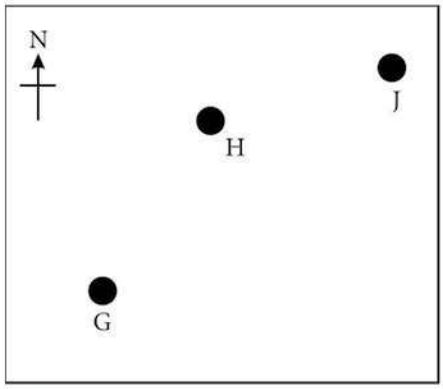
(ii) G -ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து H -ன் தொலைவு என்ன?

(iii) H -ன் வடக்கு திசையிலிருந்து J -ன் தொலைவு என்ன?

(iv) H -ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து J -ன் தொலைவு என்ன?

$\left(\sin 24^\circ = 0.4067,\ \sin 11^\circ = 0.1908,\ \cos 24^\circ = 0.9135,\ \cos 11^\circ = 0.9816\right)$

தீர்வு



(i) செங்கோண முக்கோணம் GOH –ல்,

$$\cos 24^\circ = \frac{OG}{GH}$$

$$0.9135 = \frac{OG}{250};\ OG = 228.38 \text{ கி.மீ}$$

G –ன் வடக்கு திசையிலிருந்து H –ன் தொலைவு = 228.38 கி.மீ

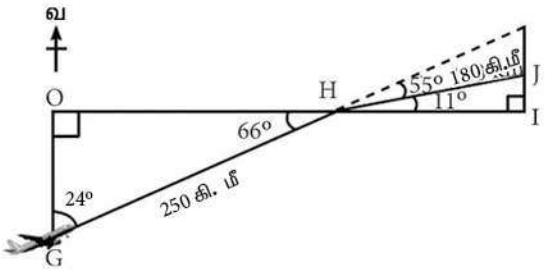
(ii) செங்கோண முக்கோணம் GOH –ல்,

$$\sin 24^\circ = \frac{OH}{GH}$$

$$0.4067 = \frac{OH}{250};\ OH = 101.68$$

G –ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து H –ன் தொலைவு

= 101.68 கி.மீ



(iii) செங்கோண முக்கோணம் HIJ –ல்,

$$\sin 11^\circ = \frac{IJ}{HJ}$$

$$0.1908 = \frac{IJ}{180};\ IJ = 34.34 \text{ கி.மீ}$$

H –ன் வடக்கு திசையிலிருந்து J –ன் தொலைவு = 34.34 கி.மீ

(iv) செங்கோண முக்கோணம் HIJ –ல்

$$\cos 11^\circ = \frac{HI}{HJ}$$

$$0.9816 = \frac{HI}{180};\ HI = 176.69 \text{ கி.மீ}$$

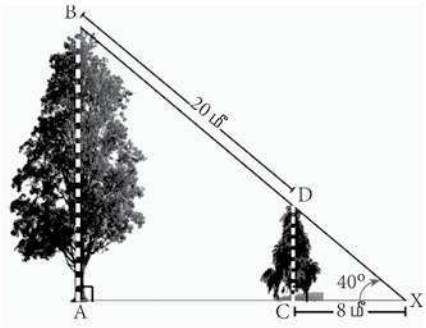
H -ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து J –ன் தொலைவு = 176.69 கி.மீ

6.25 படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு சமதளத் தரையில் இரண்டு மரங்கள் உள்ளன. தரையில் உள்ள X என்ற புள்ளியிலிருந்து இரு மர உச்சிகளின் ஏற்றக்கோணமும் 40° ஆகும். புள்ளி X-லிருந்து சிறிய மரத்திற்கான கிடைமட்டத் தொலைவு 8 மீ மற்றும் இரண்டு மரங்களின் உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு 20 மீ எனில்,

(i) புள்ளி X –க்கும் சிறிய மரத்தின் உச்சிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு

(ii) இரண்டு மரங்களுக்கும் இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு ($\cos 40^\circ = 0.7660$) ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு



பெரிய மரத்தின் உயரம் AB என்க. சிறிய மரத்தின் உயரம் CD என்க. தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி X என்க.

(i) செங்கோண முக்கோணம் XCD –ல்

$$\cos 40^\circ = \frac{CX}{XD}$$

$$XD = \frac{8}{0.7660} = 10.44 \text{ மீ}$$

எனவே, புள்ளி X க்கும் சிறிய மரத்தின் உச்சிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு XD = 10.44 மீ

(ii) செங்கோண முக்கோணம் XAB –ல்

$$\cos 40^\circ = \frac{AX}{BX} = \frac{AC + CX}{BD + DX}$$

$$0.7660 = \frac{AC + 8}{20 + 10.44}$$

இதிலிருந்து AC = 23.32 – 8 = 15.32 மீ

இரண்டு மரங்களுக்கு இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு AC = 15.32 மீ.

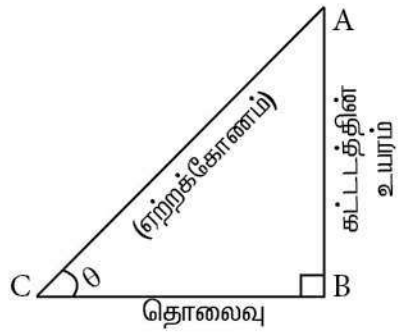
சிந்தனைக் களம்

1. உயரங்களையும், தொலைவுகளையும் கணக்கிடுவதற்கு எந்தவகையான முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்?

விடை: உயரங்களையும் தொலைவுகளையும் கணக்கிடுவதற்கு செங்கோண முக்கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

2. கட்டடத்தின் உயரம் மற்றும் கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு புள்ளிக்குமிடையே உள்ள தொலைவு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அதன் ஏற்றக்கோணம் காண்பதற்கு எந்த முக்கோணவியல் விகிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்?

விடை:



θ என்பது ஏற்றக்கோணம் எனில், எதிர்ப்பக்கம் மற்றும் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் தெரிந்த அளவுகள் ஆகின்றன.

∴ $\tan\theta$ என்ற முக்கோணவியல் விகிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எனவே, $\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

$= \dfrac{\text{கட்டடத்தின் உயரம்}}{\text{தொலைவு}}$

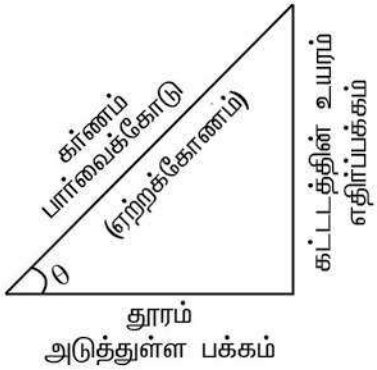
3. பார்வைக் கோட்டின் நீளம் மற்றும் ஏற்றக்கோணம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்,

(i) கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்பதற்கும்

(ii) கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து பார்க்கும் இடத்திற்குமிடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்பதற்கும்

எந்த முக்கோணவியல் விகிதத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும்?

விடை:



(i) கட்டடத்தின் உயரம் காண

$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ என்ற முக்கோணவியல் விகிதமும்

(ii) கட்டடத்தின் அடியிலிருந்து பார்க்கும் இடத்திற்கான தொலைவு காண

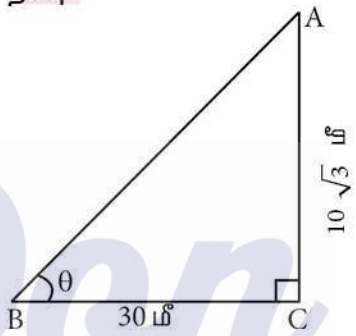
$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$

என்ற முக்கோணவியல் விகிதமும் பயன்படுத்த வேண்டும்.

பயிற்சி 6.2

1. $10\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 30 மீ தொலைவில் தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு



ΔABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{AC}{BC}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}\text{ மீ}}{30\text{ மீ}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

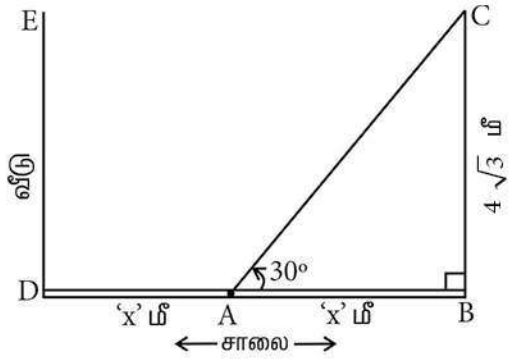
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\theta = 30^\circ$$

∴ ஏற்றக்கோணம் 30° ஆகும்.

2. ஒரு சாலையின் இருபுறமும் இடைவெளியே இல்லாமல் வரிசையாக வீடுகள் தொடர்ச்சியாக உள்ளன. அவற்றின் உயரம் $4\sqrt{3}$ மீ. பாதசாரி ஒருவர் சாலையின் மையப் பகுதியில் நின்று கொண்டு வரிசையாக உள்ள வீடுகளை நோக்குகிறார். 30° ஏற்றக்கோணத்தில் பாதசாரி வீட்டின் உச்சியை நோக்குகிறார் எனில், சாலையின் அகலத்தைக் காண்க.

தீர்வு



AB = x என்பது சாலையின் மையத்தில் உள்ள பாதசாரிக்கும் வீட்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் என்க.

$\therefore$ DB = 2x என்பது சாலையின் அகலம் ஆகும்.

வீட்டின் உயரம் BC = $4\sqrt{3}$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC –லிருந்து

$$\therefore \quad \tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{x}$$

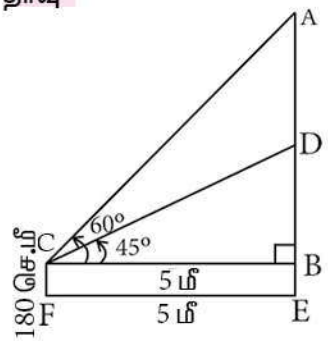
$$x = 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 4 \times 3 = 12 \text{ மீ}$$

சாலையின் அகலம் $= 2x = 2 \times 12 = 24$ மீ

$\therefore$ சாலையின் அகலம் = 24 மீ

3. ஒருவர் அவருடைய வீட்டிற்கு வெளியில் நின்றுகொண்டு ஒரு ஜன்னலின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றை முறையே 60° மற்றும் 45° ஆகிய ஏற்றக்கோணங்களில் காண்கிறார். அவரின் உயரம் 180 செ.மீ. மேலும் வீட்டிலிருந்து 5 மீ தொலைவில் அவர் உள்ளார் எனில், ஜன்னலின் உயரத்தைக் காண்க. $\left(\sqrt{3} = 1.732\right)$

தீர்வு



CF என்பது பார்வையாளரின் உயரம் மற்றும் AD என்பது ஜன்னலின் உயரம் மற்றும் BC என்பது பார்வையாளருக்கும், ஜன்னலுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔCBD –இலிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{DB}{BC}$$

$$1 = \frac{DB}{5}$$

$$DB = 5 \text{ மீ} \qquad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் CBA –இலிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{CB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AD + DB}{5}$$

$$5\sqrt{3} = AD + 5$$

$[\because (1)$ – லிருந்து $DB = 5$ மீ $]$

$$AD = 5\sqrt{3} - 5 = 5\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$AD = 5\,(1.732 - 1)$$

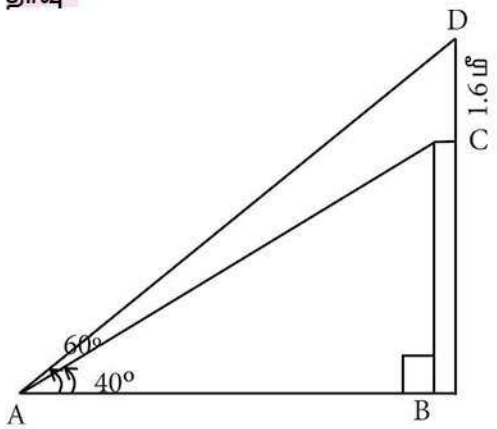
$$\left[\because \sqrt{3} = 1.732\right]$$

$$= 5 \times 0.732 = 3.660$$

$\therefore$ ஜன்னலின் உயரம் = 3.66 மீ

4. 1.6 மீ உயரமுள்ள சிலை ஒன்று மீடத்தின் மேல் அமைந்துள்ளது. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து 60° ஏற்றக்கோணத்தில் சிலையின் உச்சி அமைந்துள்ளது. மேலும் அதே புள்ளியிலிருந்து பீடத்தின் உச்சியானது 40° ஏற்றக்கோணத்தில் உள்ளது எனில், பீடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $\left(\tan 40^\circ = 0.8391, \sqrt{3} = 1.732\right)$

தீர்வு



CD என்பது உயரம் 1.6 மீ கொண்ட சிலை மற்றும் BC என்பது பீடம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC –இலிருந்து

$$\tan 40^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$0.8391 = \frac{BC}{AB}$$

$$AB = \frac{BC}{0.8391} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD –இலிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BC + CD}{AB}$$

$$1.732 = \frac{BC + 1.6}{AB}$$

$$AB = \frac{BC + 1.6}{1.732} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) –இலிருந்து

$$\frac{BC}{0.8391} = \frac{BC + 1.6}{1.732}$$

$$1.732\ BC = 0.8391\ (BC + 1.6)$$

$$1.732\ BC = 0.8391\ BC + (0.8391)\ (1.6)$$

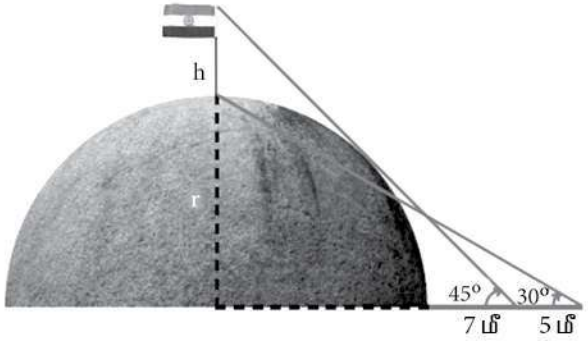
$$1.732\ BC - 0.8391\ BC = 1.34256$$

$$0.8929\ BC = 1.34256$$

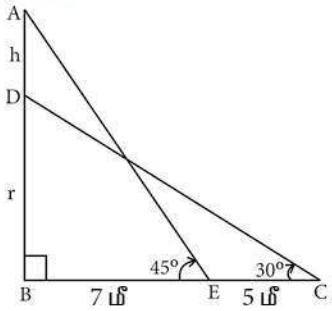
$$BC = \frac{1.34256}{0.8929} = \frac{13425.6}{8929} = 1.5 \text{ மீ}$$

∴ பீடத்தின் உயரம் = 1.5 மீ

5. 'r' மீ ஆரம் கொண்ட அரைக்கோளக் குவிமாடத்தின் மீது h மீ உயரமுள்ள ஒரு கொடிக்கம்பம் நிற்கிறது. குவிமாடத்தின் அடியிலிருந்து 7 மீ தொலைவில் ஒருவர் நிற்கிறார். அவர் கொடிக்கம்பத்தின் உச்சியை 45° ஏற்றக்கோணத்திலும் நிற்குமிடத்திலிருந்து மேலும் 5 மீ தொலைவு விலகிச் சென்று கொடிக்கம்பத்தின் அடியை 30° ஏற்றக்கோணத்திலும் பார்க்கிறார் எனில், (i) கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் (ii) அரைக்கோளக் குவிமாடத்தின் ஆரம் ஆகியவற்றைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$



தீர்வு



BD என்பது குவிமாடத்தின் ஆரம் மற்றும் AD என்பது கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் என்க.

(i) செங்கோண முக்கோணம் ΔABE –இலிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BE}$$

$$1 = \frac{r + h}{r + 7}$$

$$r + 7 = r + h$$

$$r + h - r = 7$$

$$h = 7 \text{ மீ}$$

∴ கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் = 7 மீ

(ii) செங்கோண முக்கோணம் Δ *BDC* லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{BC} = \frac{r}{r + 7 + 5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{r + 12}$$

$$r + 12 = \sqrt{3}\, r$$

$$12 = \sqrt{3}\, r - r$$

$$12 = r\,(\sqrt{3} - 1)$$

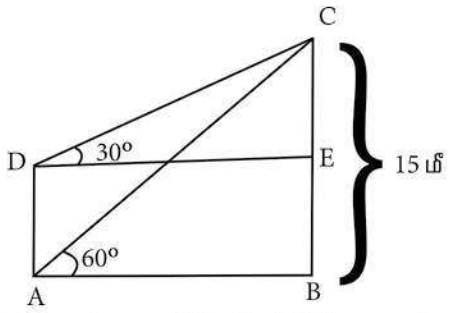
$$r = \frac{12}{1.732 - 1} = \frac{12}{0.732} = 16.39 \text{ மீ}$$

(i) கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் = 7 மீ

(ii) குவிமாடத்தின் ஆரம் = 16.39 மீ

6. 15 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரம் உள்ளது. ஒரு மின் கம்பத்தின் அடி மற்றும் உச்சியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியை முறையே 60°, 30° என்ற ஏற்றக்கோணங்களில் பார்த்தால் மின் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு:



AD என்பது மின்கம்பத்தின் உயரம் மற்றும் BC என்பது கோபுரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC –இலிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{15}{AB}$$

$$AB = \frac{15}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔDEC –இலிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{CE}{DE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CB - EB}{AB} \quad [\because DE = AB \text{ மற்றும் } CE = CB - EB]$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15 - DA}{AB} \quad [\because EB = DA]$$

$$AB = (15 - AD)\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) –இலிருந்து

$$\frac{15}{\sqrt{3}} = (15 - AD)\sqrt{3}$$

$$15 = (15 - AD)\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= (15 - AD)\,3$$

$$15 = 45 - 3AD$$

$$3AD = 45 - 15$$

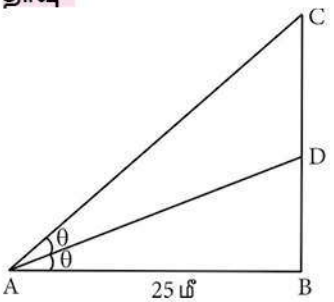
$$3AD = 30$$

$$AD = \frac{30}{3} = 10 \text{ மீ}$$

∴ மின்கம்பத்தின் உயரம் = 10 மீ

7. தரையில் உள்ள ஒரு செங்குத்து கம்பம் 1 : 9 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. மேற்பகுதியைக் காட்டிலும் கீழ்ப்பகுதி குறைவாக உள்ளது. கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 25 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, கம்பத்தின் மேல் பகுதியின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் அதன் கீழ்ப்பகுதியின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைப்போல இருமடங்காக இருந்தால் கம்பத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு



CB என்பது கம்பத்தின் உயரம், D ஆனது CB ஐ BD : DC = 1 : 9 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

கணக்கின் படி AB = 25 மீ

$\angle BAD = \theta$ எனில், $\angle BAC = 2\theta$

$\therefore \angle CAD = \angle BAC - \angle BAD = 2\theta - \theta = \theta$

$\angle BAD = \theta ; \angle CAD = \theta$

கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{25}{AC}$$

[$\because BD = DC = 1 : 9$ மற்றும் $AB = 25$ மீ]

$$AC = 9 \times 25 \text{ மீ} \quad \ldots(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC –இலிருந்து

$$CB = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$

[∵ பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி]

$$= \sqrt{(25 \times 9)^2 - 25^2}$$

[∵ (1) –இலிருந்து]

$$= \sqrt{25^2 \times 9^2 - 25^2}$$

$$= \sqrt{25^2(9^2 - 1)} = 25\sqrt{81 - 1}$$

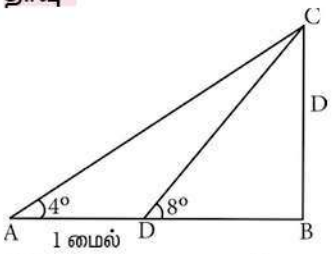
$$= 25 \times \sqrt{80} = 25 \times 4\sqrt{5}$$

$$= 100\sqrt{5} \text{ மீ}$$

∴ கம்பத்தின் உயரம் = $100\sqrt{5}$ மீ

8. ஒரு பயணி மலையை நோக்கி நெடுஞ்சாலையில் பயணிக்கிறார். ஒவ்வொரு மைல் கல்லிலிருந்தும் மலை உச்சியின் ஏற்றக்கோணத்தை அளவிடுகிறார். இரண்டு தொடர்ச்சியான மைல் கல்லில் இருந்து மலை உச்சிக்கு ஏற்படும் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 4° மற்றும் 8° எனவும், இரண்டு மைல்கற்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 1 மைல் என இருந்தால் மலையின் உயரத்தைக் காண்க. ($\tan 4^\circ = 0.0699$, $\tan 8^\circ = 0.1405$)

தீர்வு



BC என்பது மலை என்க.

AD = 1 மைல்

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 4^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$0.0699 = \frac{BC}{AD + DB} \quad [\because \tan 4^\circ = 0.0699]$$

$$0.0699 = \frac{BC}{1 + DB}$$

$$0.0699\ (1 + BD) = BC \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம்e ΔDBC லிருந்து

$$\tan 8^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$0.1405 = \frac{BC}{BD}$$

$$BC = 0.1405\ BD \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$0.0699\ (1 + BD) = 0.1405\ BD$$

$$0.0699 + 0.0699\ BD = 0.1405\ BD$$

$$0.0699 = 0.1405\ BD - 0.0699\ BD$$

$$0.0699 = 0.0706\ BD$$

$$\therefore BD = \frac{0.0699}{0.0706} = 0.99 \text{ மைல்}$$

(2) –இலிருந்து

$$BC = 0.1405 \times 0.99 = 0.1390$$

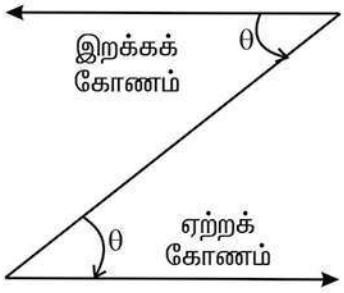
$$= 0.14 \text{ மைல்}$$

∴ மலையின் உயரம் = 0.14 மைல் (தோராயமாக)

இறக்கக்கோணக் கணக்குகள்

நினைவில் கொள்க

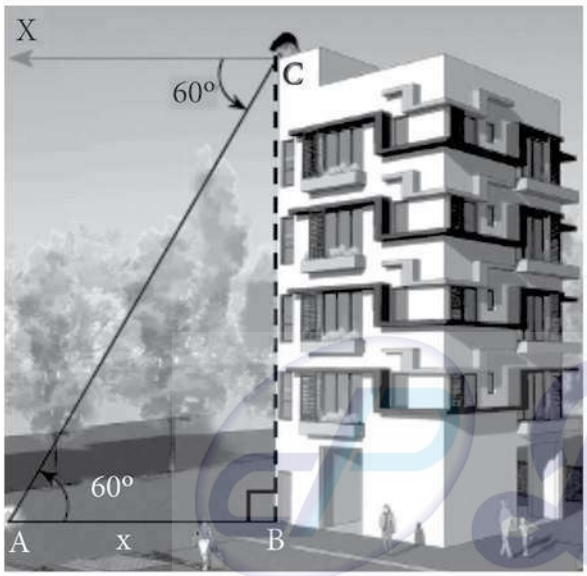
ஏற்றக்கோணமும், இறக்கக்கோணமும் ஒன்றுவிட்ட கோணமாக இருப்பதால் அவை இரண்டும் சமமாக இருக்கும்.



எடுத்துக்காட்டு

6.26 20 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியில் ஒரு விளையாட்டு வீரர் அமர்ந்துகொண்டு தரையிலுள்ள ஒரு பந்தை 60° இறக்கக் கோணத்தில் காண்கிறார் எனில், கட்டட அடிப்பகுதிக்கும் பந்திற்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு:



கட்டடத்தின் உயரம் BC என்க. தரையில் பந்து இருக்கும் இடத்தை A என்க.

$BC = 20$ மீ, மேலும் $\angle XCA = 60^\circ = \angle CAB$

$AB = x$ மீ என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ABC –ல்

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

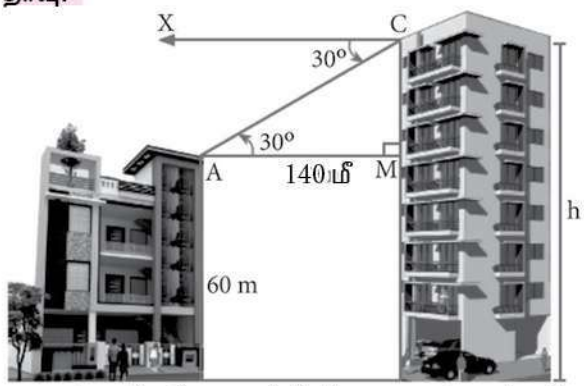
$$\sqrt{3} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{20 \times 1.732}{3} = 11.55 \text{ மீ}$$

எனவே, கட்டடத்தின் அடிக்கும் பந்திற்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு 11.55 மீ.

6.27 இரண்டு கட்டடங்களுக்கு இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு 140 மீ. இரண்டாவது கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து முதல் கட்டடத்தின் உச்சிக்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் 30° ஆகும். முதல் கட்டடத்தின் உயரம் 60 மீ எனில், இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு:



கட்டடம் – I 140 மீ கட்டடம் – II

முதல் கட்டடத்தின் உயரம் AB = 60 மீ.

மேலும், AB = MD = 60 மீ.

இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் CD = h என்க.

தொலைவு BD = 140 மீ

மேலும், AM = BD = 140 மீ

படத்திலிருந்து,

$$\angle XCA = 30^\circ = \angle CAM$$

செங்கோண முக்கோணம் AMC –ல்

$$\tan 30^\circ = \frac{CM}{AM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{140}$$

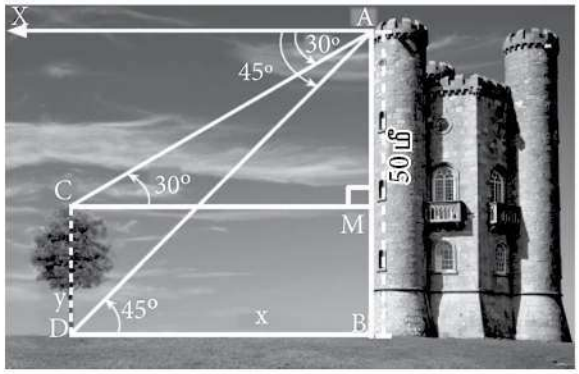
$$CM = \frac{140}{\sqrt{3}} = \frac{140\sqrt{3}}{3} = \frac{140 \times 1.732}{3}$$

$$CM = 80.83$$

மேலும், h = CD = CM + MD = 80.83 + 60 = 140.83 மீ

ஆகவே, இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் 140.83 மீ ஆகும்.

6.28 50 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு மரத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 45° எனில், மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க ($\sqrt{3} = 1.732$)



தீர்வு:

கோபுரத்தின் உயரம் AB = 50 மீ

மரத்தின் உயரம் CD = y மற்றும் BD = x என்க.

படத்திலிருந்து , $\angle XAC = 30^\circ = \angle ACM$ மற்றும் $\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$

செங்கோண முக்கோணம் ABD –ல்

$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow 1 = \frac{50}{x}$ இதிலிருந்து $x = 50$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் AMC –ல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AM}{CM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AM}{50}$$

[DB = CM என்பதால்]

$$AM = \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{50 \times 1.732}{3} = 28.87 \text{ மீ}$$

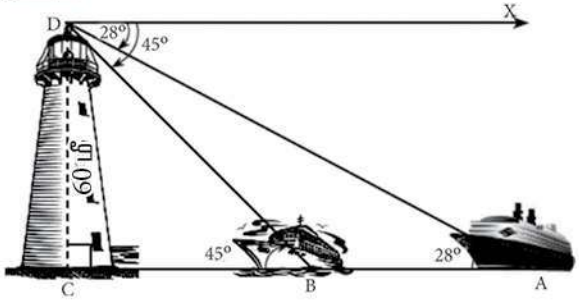
CD = MB = AB – AM

= 50 – 28.87 = 21.13 மீ

எனவே மரத்தின் உயரம் 21.13 மீ ஆகும்.

6.29 60 மீ உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒருவர் கடல்மட்டத்திலுள்ள இரு கப்பல்களை முறையே 28° மற்றும் 45° இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கிறார். ஒரு கப்பல் மற்றொரு கப்பலுக்குப் பின்னால் ஒரே திசையில் கலங்கரை விளக்கத்துடன் நேர்கோட்டில் உள்ளது எனில், இரண்டு கப்பல்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க (tan 28° = 0.5317)

தீர்வு:



கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் CD என்க.

D என்பது உற்று நோக்குபவர் இருக்கும் இடம் என்க.

கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் CD = 60 மீ

படத்திலிருந்து,

$\angle XDA = 28^\circ = \angle DAC$ மற்றும்

$\angle XDB = 45^\circ = \angle DBC$

செங்கோண முக்கோணம் DCB -ல்,

$$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{60}{BC}$$

இதிலிருந்து BC = 60 மீ

செங்கோண முக்கோணம் DCA, $\tan 28^\circ = \frac{DC}{AC}$

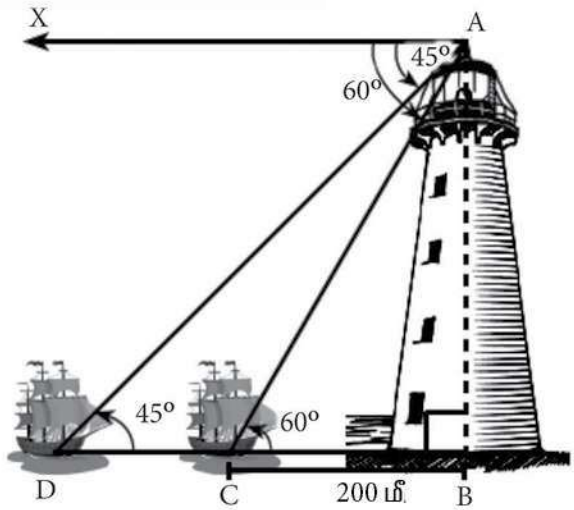
$$0.5317 = \frac{60}{AC}$$

$$AC = \frac{60}{0.5317} = 112.85$$

இரண்டு கப்பல்களுக்கு இடையேயான தொலைவு AB = AC – BC = 52.85 மீ

6.30 ஒருவர், கோபுரத்திலிருந்து விலகி கடலில் சென்று கொண்டிருக்கும் படகு ஒன்றை, கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கிறார். கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 200 மீ தொலைவில் படகு இருக்கும்போது, படகை அவர் 60° இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறார். 10 வினாடிகள் கழித்து இறக்கக்கோணம் 45° ஆக மாறுகிறது எனில், படகு செல்லும் வேகத்தினைத் (கி.மீ/மணியில்), தோராயமாகக் கணக்கிடுக. மேலும், படகு நிலையான தண்ணீரில் செல்கிறது எனக் கருதுக. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு:



AB என்பது கோபுரம் என்க.

C மற்றும் D என்பன படகு இருக்கும் நிலைகள் என்க.

படத்திலிருந்து,

$\angle XAC = 60^\circ = \angle ACB$ மற்றும்

$\angle XAD = 45^\circ = \angle ADB$, BC = 200 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ABC –ல் , $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{200}$$

இதிலிருந்து, $AB = 200\sqrt{3}$ ... (1)

செங்கோண முக்கோணம் ABD –ல்

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$$

இதிலிருந்து, $1 = \frac{200\sqrt{3}}{BD}$ [(1) –லிருந்து]

எனவே, $BD = 200\sqrt{3}$

இப்போது, $CD = BD - BC$

$CD = 200\sqrt{3} - 200 = 200(\sqrt{3} - 1) = 146.4$

CD என்ற தொலைவை பயணிக்கத் தேவைப்படும் நேரம் 10 வினாடிகள் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அதாவது, 146.4 மீ தொலைவை 10 வினாடிகளில் படகு கடக்கிறது.

எனவே, படகின் வேகம் = $\frac{\text{தொலைவு}}{\text{காலம்}}$

$= \frac{146.4}{10} = 14.64$ மீ/வி

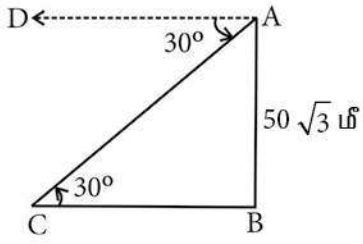
இதிலிருந்து,

$14.64 \times \frac{3600}{1000}$ கி.மீ/மணி $= 52.704$ கி.மீ/மணி

பயிற்சி 6.3

1. $50\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள ஒரு பாறையின் உச்சியிலிருந்து 30° இறக்கக்கோணத்தில் தரையிலுள்ள மகிழுந்து ஒன்று பார்க்கப்படுகிறது எனில், மகிழுந்திற்கும் பாறைக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு :



AB என்பது பாறையின் உயரம்

C என்பது மகிழுந்து என்க.

$\angle DAC = \angle ACB = 30^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC –இலிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{BC}$$

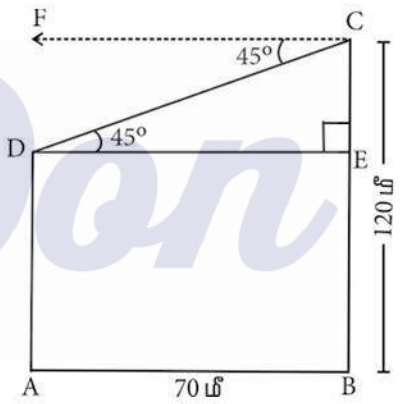
$BC = 50\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 50 \times 3 = 150$ மீ

∴ மகிழுந்துக்கும், பாறைக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு = 150 மீ.

2. இரண்டு கட்டடங்களுக்கு இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 70 மீ ஆகும். இரண்டாவது கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து முதல் கட்டடத்தின் உச்சிக்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் 45° ஆகும். இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் 120 மீ எனில், முதல் கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :



AD என்பது முதல் கட்டடம்,

BC என்பது இரண்டாவது கட்டடம் என்க.

$AD = BE = BC - CE$

$\angle FCD = \angle CDE = 45^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ΔCED இலிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{CE}{DE}$$

$$1 = \frac{CE}{AB} = \frac{CE}{70 \text{ மீ}}$$

$CE = 70$ மீ

∴ $BE = BC - EC$

$= 120$ மீ $- 70$ மீ $= 50$ மீ

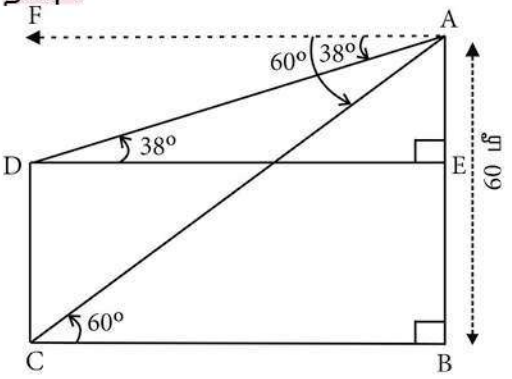
∴ $AD = 50$ மீ

∴ முதல் கட்டடத்தின் உயரம் 50 மீ.

3. 60 மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்தாக உள்ள ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் இறக்கக்கோணங்கள்

முறையே 38° மற்றும் 60° எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. ($\tan 38° = 0.7813$, $\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு :



AB என்பது 60 மீ உயரமுள்ள கோபுரம் மற்றும் DC என்பது விளக்குக் கம்பம் என்க.

$DC = BE$

$\angle FAD = \angle ADE = 38°$

$\angle FAC = \angle ACB = 60°$

செங்கோண முக்கோணம் ΔADE –இலிருந்து,

$$\tan 38° = \frac{AE}{DE}$$

$$0.7813 = \frac{AE}{CB}$$

$$CB = \frac{AE}{0.7813} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔACB –இலிருந்து,

$$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{60}{BC}$$

$$BC = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{60\sqrt{3}}{3}$$

$$CB = 20\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{AE}{0.7813} = 20\sqrt{3}$$

$AE = 20 \times 1.732 \times 0.7813$

$= 34.64 \times 0.7813 = 27.064232 = 27.06$ மீ

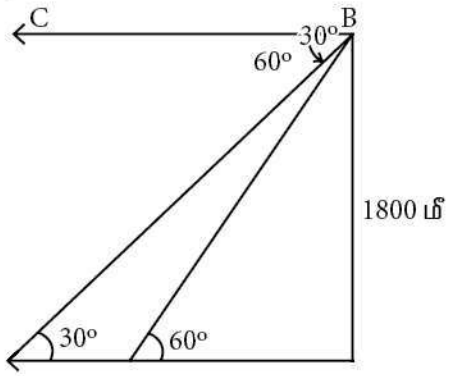
விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம்

$= DC = EB = AB - AE = 60 - 27.06 = 32.93$ மீ

∴ விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம் = 32.93 மீ

4. 1800 மீ உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு விமானத்திலிருந்து ஒரே திசையில் விமானத்தை நோக்கிச் செல்லும் இரு படகுகள் பார்க்கப்படுகிறது. விமானத்திலிருந்து இரு படகுகளை முறையே 60° மற்றும் 30° இறக்கக்கோணங்களில் உற்று நோக்கினால், இரண்டு படகுகளுக்கும் இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு :



AB = 1800 மீ என்பது தரையிலிருந்து பறக்கும் விமானத்தின் உயரம் மற்றும் D, E என்பன படகுகள் என்க.

$\angle CBD = \angle BDA = 30°$

$\angle CBE = \angle BEA = 60°$

செங்கோண முக்கோணம் ΔBAE -இல்

$$\tan 60° = \frac{BA}{EA}$$

$$\sqrt{3} = \frac{1800}{EA}$$

$$EA = \frac{1800}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔBDA –இலிருந்து,

$$\tan 30° = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1800}{DE + EA}$$

$$DE + EA = 1800\sqrt{3}$$

$$DE = 1800\sqrt{3} - EA$$

$$DE = 1800\sqrt{3} - \frac{1800}{\sqrt{3}}$$

[∵ (1) லிருந்து]

$$= \frac{1800\sqrt{3}\sqrt{3} - 1800}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1800 \times 3 - 1800}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5400-1800}{\sqrt{3}} = \frac{3600}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3600 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3600\sqrt{3}}{3} = 1200\sqrt{3}$$

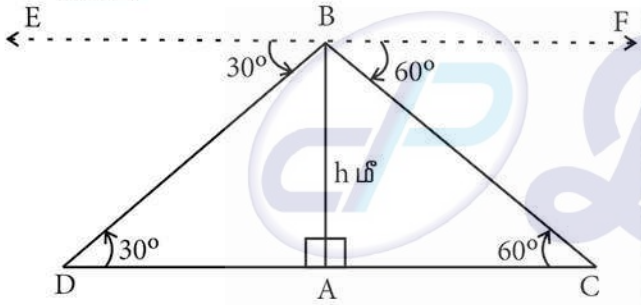
$$= 1200 \times 1.732$$

DE = 2078.4 மீ

∴ படகுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் = 2078.4 மீ

5. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள இரண்டு கப்பல்கள் 30° மற்றும் 60° இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கப்படுகின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் h மீ. இரு கப்பல்கள் மற்றும் கலங்கரை விளக்கத்தின் அடிப்பகுதி ஆகியவை ஒரே நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனில், இரண்டு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\frac{4h}{\sqrt{3}}$ மீ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :



D மற்றும் C என்பன இரு கப்பல்கள் மற்றும் AB என்பது கலங்கரை விளக்கம் என்க.

AB = 'h' மீ

$\angle EBD = \angle BDA = 30^\circ$

$\angle FBC = \angle BCA = 60^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ΔBAC –லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{AC}$$

$$AC = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔBAD லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{AD}$$

$$AD = h\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow AC + AD = \frac{h}{\sqrt{3}} + h\sqrt{3}$$

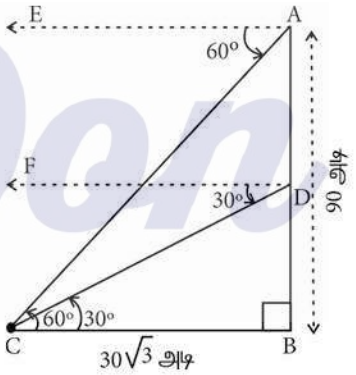
$$DC = \frac{h + h\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$DC = \frac{h+3h}{\sqrt{3}} = \frac{4h}{\sqrt{3}} \text{ மீ}$$

∴ இரு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் = $\frac{4h}{\sqrt{3}}$ மீ

6. 90 அடி உயரமுள்ள கட்டடத்தின் மேலிருந்து ஒளி ஊடுருவும் கண்ணாடிச் சுவர் கொண்ட மின் தூக்கியானது கீழ் நோக்கி வருகிறது. கட்டடத்தின் உச்சியில் மின் தூக்கி இருக்கும்போது பூந்தோட்டத்தில் உள்ள ஒரு நீரூற்றின் இறக்கக்கோணம் 60° ஆகும். இரண்டு நிமிடம் கழித்து அதன் இறக்கக்கோணம் 30° ஆக குறைகிறது. மின்தூக்கியின் நுழைவு வாயிலிருந்து நீரூற்று $30\sqrt{3}$ அடி தொலைவில் உள்ளது எனில், மின்தூக்கி கீழே வரும் வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு :



AB என்பது 90 அடி உயரமுள்ள கட்டடம்.
AD என்பது மின்தூக்கி 2 நிமிடத்தில் இறங்கிய தொலைவு என்க.

$\angle EAC = \angle ACB = 60^\circ$

$\angle FDC = \angle DCB = 30^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ΔDCB –லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{DB}{CB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DB}{30\sqrt{3}}$$

$$\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = DB$$

DB = 30 அடி

∴ AD = AB – DB = 90 – 30 = 60 அடி

கடந்த தொலைவு = 60 × 0.305 மீ

எடுத்துக் கொண்ட காலம் n = 2 நிமி = 2×60 நொடி

$\therefore$ மின்தூக்கியின் வேகம் = $\frac{\text{தூரம்}}{\text{காலம்}}$

$= \frac{60 \times 0.305}{2 \times 60}$ மீ/நொடி $= 0.1525$ மீ/நொடி

$= 0.15$ மீ/நொடி

மின்தூக்கியின் வேகம் = 0.15 மீ/நொடி.

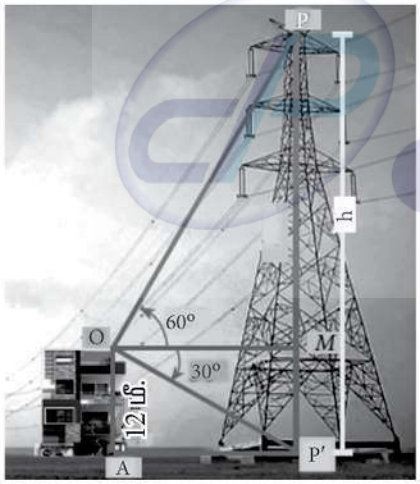
1 அடி = 30.5 செ.மீ
= 0.305 மீ

ஏற்றக்கோணமும் இறக்கக்கோணமும் கொண்ட கணக்குகள்

எடுத்துக்காட்டு

6.31 12 மீ உயரமுள்ள கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து மின்சாரக் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° மற்றும் அதன் அடியின் இறக்கக்கோணம் 30° எனில், மின்சாரக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :



படத்தில் AO என்பது கட்டடம்.
O என்பது கட்டடத்தின் உச்சிப் புள்ளி என்க.
மேலும், OA = 12 மீ.
PP' என்பது மின்சாரக் கோபுரம். இதில் P என்பது மின் கோபுரத்தின் உச்சி, P' என்பது மின் கோபுரத்தின் அடி.
P -யின் ஏற்றக்கோணம், $\angle MOP = 60°$ மற்றும் P' –ன் இறக்கக்கோணம், $\angle MOP' = 30°$
மின் கோபுரத்தின் உயரம் PP' = h மீ என்க.
O வழியாக $OM \perp PP'$ வரைக.

$$MP = PP' - MP' = h - OA = h - 12$$

செங்கோண முக்கோணம் OMP –ல், $\frac{MP}{OM} = \tan 60°$

எனவே, $\frac{h-12}{OM} = \sqrt{3}$

ஆகவே, $OM = \frac{h-12}{\sqrt{3}}$ ... (1)

செங்கோண முக்கோணம் OMP' –ல், $\frac{MP'}{OM} = \tan 30°$

எனவே, $\frac{12}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ஆகவே, $OM = 12\sqrt{3}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நாம் பெறுவது,

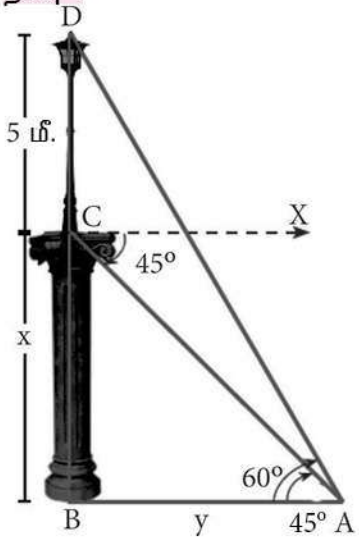
$$\frac{h-12}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

எனவே $h - 12 = 12\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ஆகவே, h = 48

எனவே, மின் கோபுரத்தின் உயரம் = 48 மீ

6.32 ஒரு கோபுர உச்சியின் மீது 5 மீ உயரமுள்ள கம்பம் பொருத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. தரையில் உள்ள 'A' என்ற புள்ளியிலிருந்து கம்பத்தின் உச்சியை 60° ஏற்றக்கோணத்திலும், கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 'A' என்ற புள்ளியை 45° இறக்கக் கோணத்திலும் பார்த்தால், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு :



கோபுரத்தின் உயரம் BC என்க.

கம்பத்தின் உயரம் CD எனக் கொள்க.

உற்று நோக்குப் புள்ளி 'A' என்க.

மேலும், BC = x மற்றும் AB = y என்க.

படத்தில்,

$\angle BAD = 60^\circ$ மற்றும் $\angle XCA = 45^\circ = \angle BAC$

செங்கோண முக்கோணம் ABC –ல், $\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}$

எனவே, $1 = \frac{x}{y}$ ஆகவே $x = y$ ... (1)

செங்கோண முக்கோணம் ABD –ல்

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{BC+CD}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x+5}{y}$$

$$\sqrt{3}\, y = x + 5$$

எனவே, $\sqrt{3}\, x = x + 5$ [(1) லிருந்து]

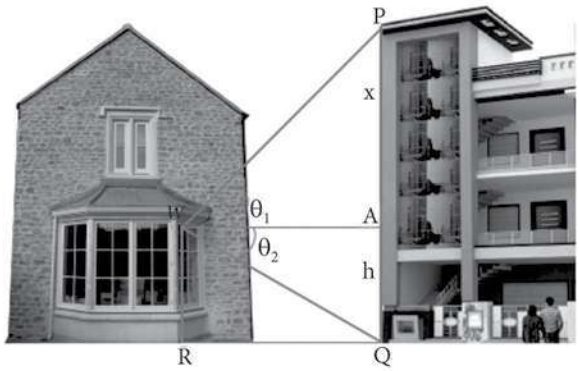
ஆகவே, $x = \frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

$$= \frac{5(1.732+1)}{2} = 6.83$$

எனவே, கோபுரத்தின் உயரம் = 6.83 மீ

6.33 ஒரு தெருவில் உள்ள ஒரு வீட்டின் சன்னலிலிருந்து, (சன்னல் தரைக்கு மேல் h மீ உயரத்தில் உள்ளது) தெருவின் எதிர்ப் பக்கத்தில் உள்ள மற்றொரு வீட்டின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக்கோணம், இறக்கக்கோணம் முறையே θ_1 மற்றும் θ_2 எனில், எதிர்ப்பக்கத்தில் அமைந்த வீட்டின் உயரம் $h\left(1+\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :



படத்தில் W என்பது சன்னலிலுள்ள ஒரு புள்ளி என்க. இப்புள்ளியிலிருந்து ஏற்றக்கோணமும், இறக்கக்கோணமும் கணக்கிடப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். PQ என்பது எதிர்ப்பக்கத்தில் உள்ள வீடு என்க.

WA என்பது சன்னலிலிருந்து வீட்டிற்கு உள்ள தொலைவாகும்.

சன்னலின் உயரம் = h = AQ (WR = AQ)

PA = x மீ என்க.

செங்கோண முக்கோணம் PAW, –ல்

$$\tan\theta_1 = \frac{AP}{AW}$$

எனவே, $\tan\theta_1 = \frac{x}{AW}$

இதிலிருந்து, $AW = \frac{x}{\tan\theta_1}$

ஆகவே, $AW = x\cot\theta_1$ ... (1)

செங்கோண முக்கோணம் QAW –ல்

$$\tan\theta_2 = \frac{AQ}{AW}$$

எனவே, $\tan\theta_2 = \frac{h}{AW}$

$AW = h\cot\theta_2$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து நமக்குக் கிடைப்பது,

$$x\cot\theta_1 = h\cot\theta_2$$

இதிலிருந்து, $x = h\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}$

ஆகவே, எதிர்ப்பக்கத்தில் உள்ள வீட்டின் உயரம்

$$= PA + AQ = x + h = h\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1} + h$$

$$= h\left(1+\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. உற்றுநோக்குபவரின் கண்ணிலிருந்து பொருளின் ஒரு புள்ளிக்கு வரையப்படும் கோடு _____ ஆகும்.

விடை: பார்வைக்கோடு

2. ஒரு பொருளை உற்றுநோக்கும்போது கிடைமட்டக் கோட்டிற்கும் பார்வைக்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் எக்கருவி மூலம் அளவிடப்படுகிறது?

விடை: தியோடலைட்

3. பார்வைக் கோடானது கிடைமட்டக் கோட்டிற்கு மேலே இருக்கும்போது ஏற்படும் கோணம் _____ ஆகும்.

விடை: ஏற்றக்கோணம்

4. செங்குத்தாக உள்ள பொருளின் (கோபுரம்) அடியை நோக்கிச் செல்லும்போது அதன் ஏற்றக்கோணம்_____.

விடை: அதிகரிக்கும்

5. பார்வைக்கோடானது கிடைமட்டக் கோட்டிற்குக் கீழே இருக்கும்போது ஏற்படும் கோணம் _____ ஆகும்.

விடை: இறக்கக்கோணம்

சிந்தனைக் களம்

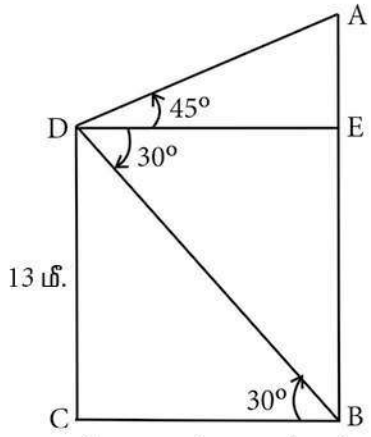
1. உயரம், தொலைவு மற்றும் ஏற்றக்கோணம் காண்பதற்குக் குறைந்தது எத்தனை அளவுகள் தேவை?

விடை: குறைந்தது ஏதேனும் இரு அளவுகள் தரப்பட்டால் மூன்றாவது அளவைக் காண இயலும்.

பயிற்சி 6.4

1. 13 மீ உயரமுள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சியிலிருந்து மற்றொரு மரத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக்கோணம் முறையே 45° மற்றும் 30° எனில், இரண்டாவது மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3}$ = 1.732)

தீர்வு :



CD என்பது 13 மீ உயரமுள்ள மரம் மற்றும் AB என்பது மற்றொரு மரம் என்க.

$\angle ADE = 45^\circ$

$\angle EDB = \angle DBC = 30^\circ$

CB = DE மற்றும் CD = EB = 13 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔAED லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

$$1 = \frac{AE}{DE}$$

$$AE = DE \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔDBC லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{13}{BC}$$

$$BC = 13\sqrt{3} \text{ மீ}$$

$\therefore$ (1) லிருந்து AE = $13\sqrt{3}$ மீ

[$\because$ BC = DE = AE]

இரண்டாவது மரத்தின் உயரம் = AB = AE + EB

$= (13\sqrt{3} + 13)$

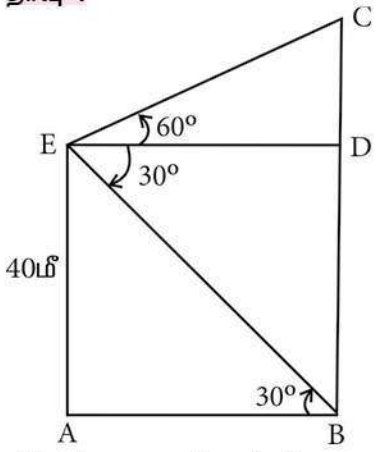
$= (13 \times 1.732 + 13)$

$= (22.516 + 13) = 35.516 = 35.52$ மீ

$\therefore$ இரண்டாவது மரத்தின் உயரம் = 35.52 மீ

2. கடலின் நீர் மட்டத்திலிருந்து 40 மீட்டருக்கு மேலே உள்ள ஒரு கப்பலின் மேல் பகுதியில் நின்று கொண்டிருக்கிற ஒருவர், குன்றின் உச்சியை 60° ஏற்றக்கோணத்திலும் அடிப்பகுதியை 30° இறக்கக்கோணத்திலும் காண்கிறார் எனில், கப்பலிலிருந்து குன்றுக்கு உள்ள தொலைவையும், குன்றின் உயரத்தையும் காண்க. ($\sqrt{3}$ = 1.732)

தீர்வு :



AB என்பது கடல் மட்டம்,

E என்பது கப்பலின் மேல்பகுதியில் நிற்கும் பார்வையாளர் என்க.

$AE = 40$ மீ

$\therefore \quad AE = BD = 40$ மீ

மேலும் $AB = ED$

BC என்பது குன்றின் உயரம் எனில்

செங்கோண முக்கோணம் ΔABE லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{AB}$$

$$AB = 40\sqrt{3} \text{ மீ} \quad \ldots (1)$$

$$AB = 40 \times 1.732 = 69.28 \text{ மீ}$$

$\therefore$ கப்பலிலிருந்து குன்றின் தூரம் = 69.28 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔCDE லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{ED}$$

$$\sqrt{3} = \frac{CD}{40\sqrt{3}} \quad [\because AB = ED = 40\sqrt{3} \text{ மீ }]$$

$$CD = 40\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 40 \times 3 = 120 \text{ மீ}$$

குன்றின் உயரம் $= BC = BD + DC$

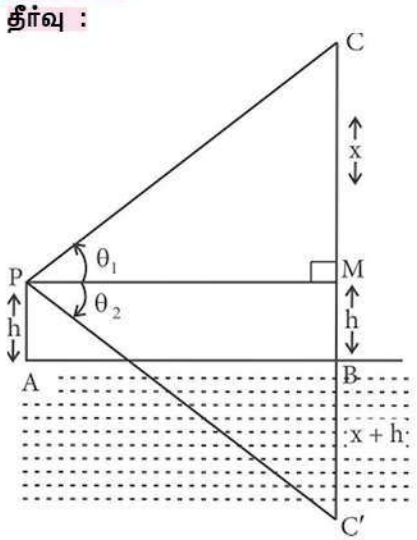
$= 40 + 120 = 160$ மீ

$\therefore$ குன்றின் உயரம் = 160 மீ

குன்றிலிருந்து கப்பலின் தூரம் = 69.28 மீ

3. ஏரியின் நீர் மட்டத்திலிருந்து 'h' மீ உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு மேகத்தின் ஏற்றக்கோணம் θ_1 மற்றும் ஏரி நீரில் விழும் மேகப் பிம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் θ_2 எனில், தரையிலிருந்து மேகத்தின் உயரம் $\frac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :



θ_1 என்பது ஏரியின் நீர் மட்டத்தின் மேல் h மீ உயரத்திலுள்ள புள்ளி P லிருந்து மேகத்தின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் θ_2 என்பது மேகப் பிம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் என்க.

$PA = MB =$ 'h' மீ

BC என்பது நீர்மட்டத்திலிருந்து மேகத்தின் உயரம், C' என்பது மேகத்தின் பிம்பம் என்க.

$BC' =$ 'x + h' மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔCPM லிருந்து

$$\tan\theta_1 = \frac{CM}{PM}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{AB}$$

$$AB = x\cot\theta_1 \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் $\Delta PMC'$ லிருந்து

$$\tan\theta_2 = \frac{C'M}{PM}$$

$$= \frac{x+h+h}{AB}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{x+2h}{AB}$$

$$AB = (x + 2h)\cot\theta_2 \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$x\cot\theta_1 = (x + 2h)\cot\theta_2$$

$$x\cot\theta_1 = x\cot\theta_2 + 2h\cot\theta_2$$

$$x\cot\theta_1 - x\cot\theta_2 = 2h\cot\theta_2$$

$$x(\cot\theta_1 - \cot\theta_2) = 2h\cot\theta_2$$

$$x\left(\frac{1}{\tan\theta_1} - \frac{1}{\tan\theta_2}\right) = \frac{2h}{\tan\theta_2} \quad \left[\because \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta\right]$$

$$x\left(\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{\tan\theta_1\tan\theta_2}\right) = \frac{2h}{\tan\theta_2}$$

$$x = \frac{2h\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_2(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}$$

$$x = \frac{2h\tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

மேகம் உள்ள உயரம் CB ஆனது

$$CB = x + h$$

$$= \frac{2h\tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} + h$$

$$= \frac{2h\tan\theta_1 + h(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

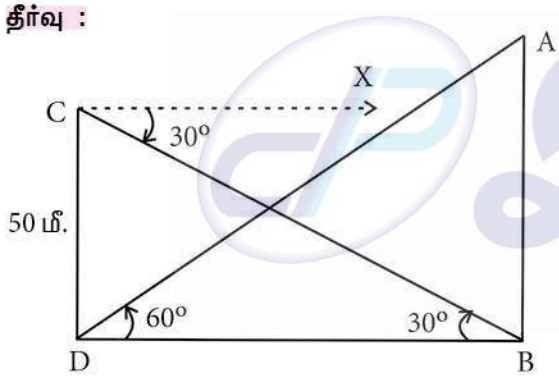
$$= \frac{2h \tan\theta_1 + h\tan\theta_2 - h\tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

$$= \frac{h\tan\theta_1 + h\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1} = \frac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

∴ தேவையான உயரம் $= \frac{h(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$ மீ

4. உயரமான அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் அடியிலிருந்து அலைபேசி கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° மற்றும் குடியிருப்பின் உச்சியிலிருந்து கோபுர அடியின் இறக்கக்கோணம் 30° ஆகும். அடுக்குமாடி குடியிருப்பின் உயரம் 50 மீ எனில் அலைபேசிக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. கதிர்வீச்சுக் கட்டுப்பாடு விதியின்படி அலைபேசிக் கோபுரத்தின் குறைந்தபட்ச உயரம் 120 மீ இருக்க வேண்டும். மேற்கண்ட அலைக்கோபுரம் இந்தக் கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்படுகிறதா?

தீர்வு :



AB என்பது அலைபேசி கோபுரம் மற்றும் CD என்பது அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் உயரம் என்க.

$\angle XCB = \angle CBD = 30°$

$\angle ADB = 60°$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 60° = \frac{AB}{BD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{BD}$$

$$BD = \frac{AB}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோண ΔCDB லிருந்து

$$\tan 30° = \frac{CD}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{BD}$$

$$BD = 50\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{AB}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$$

$AB = 50 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 50 \times 3 = 150$ மீ

∴ அலைபேசி கோபுர உயரம் = 150 மீ.

கதிர்வீச்சு கட்டுப்பாட்டு விதிப்படி,

கோபுரத்தின் உயரம் > 120 மீ இருக்க வேண்டும்.

எனவே அலைகோபுர கதிர்வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்பட்டே உள்ளது.

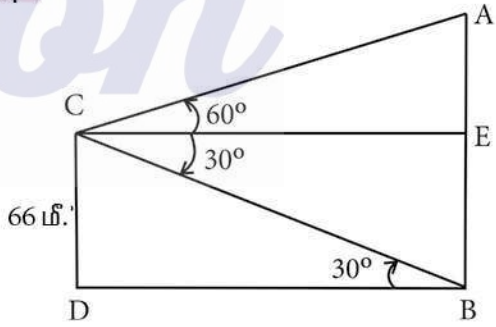
5. 66 மீ உயரமான அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் உச்சியிலிருந்து ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக்கோணம் முறையே 60°, 30° எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம்.

(ii) விளக்குக் கம்ப உயரத்திற்கும் அடுக்குமாடியின் உயரத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம்.

(iii) விளக்குக் கம்பத்திற்கும் அடுக்குமாடிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு :



AB என்பது விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம் மற்றும் CD என்பது அடுக்குக்மாடி குடியிருப்பு என்க.

$CD = 66$ மீ $= EB$

$\angle ACE = 60°$

$\angle ECB = \angle CBD = 30°$

(i) செங்கோண முக்கோணம் ΔBDC லிருந்து

$$\tan 30° = \frac{CD}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{66}{BD}$$

$$BD = 66\sqrt{3} \quad \ldots (1)$$

$$= 66 \times 1.732 = 114.312 \text{ மீ}$$

∴ விளக்குக் கம்பத்திற்கும் அடுக்குமாடிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் = 114.31 மீ

மேலும் BD = EC = 114.31 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔACE லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{AE}{CE}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AE}{66\sqrt{3}}$$

$$AE = 66\sqrt{3} \times \sqrt{3} \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

$$= 66 \times 3 = 198 \text{ மீ}$$

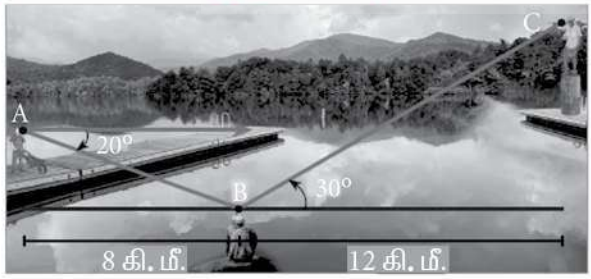
(i) விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம் = AB

= AE + EB = 198 + 66 = 264 மீ

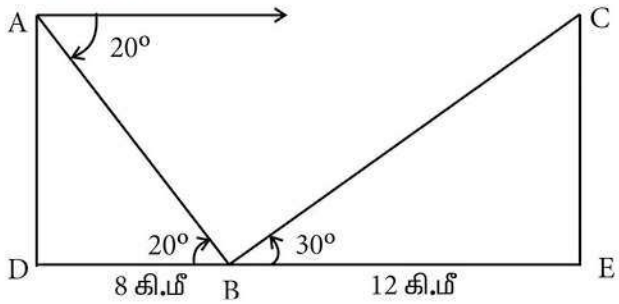
(ii) விளக்குக்கம்ப உயரத்திற்கும் அடுக்கு மாடியின் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள வேறுபாடு = 198 மீ

(iii) விளக்குக் கம்பத்திற்கும் அடுக்குமாடிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு = 114.31 மீ

6. A, B மற்றும் C என்ற மூன்று கிராமவாசிகள் ஒரு பள்ளத்தாக்கில் ஒருவருக்கொருவர் பார்க்குமாறு உள்ளனர். A-க்கும், B-க்கும் இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 8 கி.மீ மற்றும் B-க்கும், C-க்கும் இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 12 கி.மீ. A-லிருந்து B-க்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் 20° மற்றும் B-லிருந்து C-க்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் 30° எனில் பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக.
(i) A-க்கும் B-க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம்.
(ii) B-க்கும் C-க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம்.
($\tan 20^\circ = 0.3640$, $\sqrt{3} = 1.732$)



தீர்வு :



(i) செங்கோண முக்கோணம் ΔADB லிருந்து

$$\tan 20^\circ = \frac{AD}{DB}$$

$$0.3640 = \frac{AD}{8}$$

$$AD = 8 \times 0.3640 = 2.91 \text{ கி.மீ}$$

A க்கும் B க்கும் உள்ள செங்குத்து உயரம் = 2.91 கி.மீ

(ii) செங்கோண முக்கோணம் ΔCEB இல்

$$\tan 30^\circ = \frac{CE}{BE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CE}{12}$$

$$CE = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12 \times 1.732}{3} = 4 \times 1.732$$

$$= 6.928$$

$$= 6.93 \text{ கி.மீ}$$

B க்கும் C க்கும் இடையே உள்ள செங்குத்து உயரம் = 6.93 கி.மீ

பயிற்சி 6.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்:

1. $\sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta}$ **-ன் மதிப்பு**

(1) $\tan^2\theta$ (2) 1

(3) $cot^2\theta$ (4) 0 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

$$\sin^2\theta + \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \sin^2\theta + \frac{1}{\sec^2\theta}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

2. $\tan\theta \operatorname{cosec}^2\theta - \tan\theta$ **-ன் மதிப்பு**

(1) $\sec\theta$ (2) $\cot^2\theta$

(3) $\sin\theta$ (4) $\cot\theta$ **[விடை : (4)]**

தீர்வு :

$$\tan\theta \operatorname{cosec}^2\theta - \tan\theta = \tan\theta(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$$

$$= \tan\theta \cot^2\theta$$

$$= \tan\theta \times \frac{1}{\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

3. $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = k + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ **எனில், k-ன் மதிப்பு**

(1) 9 (2) 7

(3) 5 (4) 4 **[விடை : (2)]**

தீர்வு : $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2$

$= \sin^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha + 2\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha + \cos^2\alpha + \sec^2\alpha + 2\cos\alpha\sec\alpha$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \operatorname{cosec}^2\alpha + \sec^2\alpha + 2\sin\alpha\frac{1}{\sin\alpha} + 2\cos\alpha\frac{1}{\cos\alpha}$

$= 1 + \operatorname{cosec}^2\alpha + \sec^2\alpha + 2 + 2$

$= 5 + 1 + \cot^2\alpha + 1 + \tan^2\alpha$

$= 7 + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$

$k + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ உடன் ஒப்பிட

$k = 7$

4. $\sin\theta + \cos\theta = a$ **மற்றும்** $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = b$ **எனில்,** $b(a^2 - 1)$ **-ன் மதிப்பு**

(1) 2a (2) 3a

(3) 0 (4) 2ab **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$b(a^2 - 1) = (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)[(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1]$

$= (\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta)[\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1]$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)(1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1)$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \times 2\sin\theta\cos\theta = 2a$

5. $5x = \sec\theta$ **மற்றும்** $\frac{5}{x} = \tan\theta$ **எனில்,** $x^2 - \frac{1}{x^2}$ **-ன் மதிப்பு**

(1) 25 (2) $\frac{1}{25}$

(3) 5 (4) 1 **[விடை : (2)]**

தீர்வு : $5x = \sec\theta \Rightarrow 25x^2 = \sec^2\theta$ ... (1)

$\frac{5}{x} = \tan\theta \Rightarrow \frac{25}{x^2} = \tan^2\theta$ ... (2)

(1) – (2) $\Rightarrow 25x^2 - \frac{25}{x^2} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$25\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

$x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{25}$

6. $\sin\theta = \cos\theta$ **எனில்,** $2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1$ **-ன் மதிப்பு**

(1) $\frac{-3}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$

(3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{-2}{3}$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு : $\sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 2\tan^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ - 1$

$= 2(1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1$

$= 2 + \frac{1}{2} - 1$

$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

7. $x = a\tan\theta$ **மற்றும்** $y = b\sec\theta$ **எனில்**

(1) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

[விடை : (1)]

தீர்வு : $x = a\tan\theta$ $y = b\sec\theta$

$x^2 = a^2\tan^2\theta$ $y^2 = b^2\sec^2\theta$

$\frac{x^2}{a^2} = \tan^2\theta$ $\frac{y^2}{b^2} = \sec^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

8. $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ **-ன் மதிப்பு**

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) – 1 **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

$= \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$

$= \left(\frac{(\cos\theta + \sin\theta) + 1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{(\sin\theta + \cos\theta) - 1}{\sin\theta}\right)$

$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1^2}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$

$$= \frac{1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= 2$$

9. $a\cot\theta + b\,\text{cosec}\,\theta = p$ மற்றும் $b\cot\theta + a\,\text{cosec}\,\theta = q$ எனில், $p^2 - q^2$ -ன் மதிப்பு

(1) $a^2 - b^2$ (2) $b^2 - a^2$

(3) $a^2 + b^2$ (4) $b - a$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$p^2 - q^2 = (a\cot\theta + b\,\text{cosec}\,\theta)^2 - (b\cot\theta + a\,\text{cosec}\,\theta)^2$

$= a^2\cot^2\theta + b^2\,\text{cosec}^2\theta + 2ab\cot\theta\,\text{cosec}\,\theta$

$- (b^2\cot^2\theta + a^2\,\text{cosec}^2\theta + 2ab\cot\theta\,\text{cosec}\,\theta)$

$= a^2\cot^2\theta + b^2\,\text{cosec}^2\theta + 2ab\cot\theta\,\text{cosec}\,\theta$

$- b^2\cot^2\theta - a^2\,\text{cosec}^2\theta - 2ab\cot\theta\,\text{cosec}\,\theta$

$= a^2(\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta) + b^2(\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)$

$= a^2(-1) + b^2(1)$

$= -a^2 + b^2$

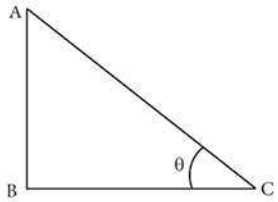
$= b^2 - a^2$

10. ஒரு கோபுரத்தின் உயரத்திற்கும் அதன் நிழலின் நீளத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $\sqrt{3} : 1$, எனில் சூரியனைக் காணும் ஏற்றக்கோண அளவானது

(1) 45° (2) 30°

(3) 90° (4) 60° **[விடை: (4)]**

தீர்வு :



BC = நிழலின் நீளம்

AB = கோபுர உயரம்

$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ (தரப்பட்டுள்ளது)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

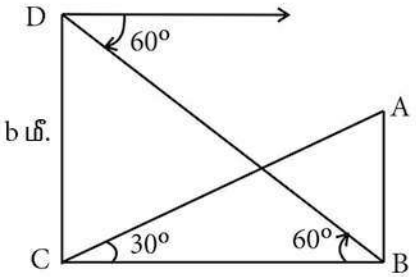
$\theta = 60^\circ$

11. ஒரு மின் கம்பமானது அதன் அடியில் சமதளப் பரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. முதல் புள்ளிக்கு 'b' மீ உயரத்தில் உள்ள இரண்டாவது புள்ளியிலிருந்து மின்கம்பத்தின் அடிக்கு இறக்கக்கோணம் 60° எனில் மின் கம்பத்தின் உயரமானது

(1) $\sqrt{3}\,b$ (2) $\frac{b}{3}$

(3) $\frac{b}{2}$ (4) $\frac{b}{\sqrt{3}}$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



AB மின்கம்பம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC}$

$BC = AB\sqrt{3}$ ... (1)

செங்கோண முக்கோணம் ΔDCB இல்

$\tan 60^\circ = \frac{DC}{BC}$

$\sqrt{3} = \frac{b}{BC}$

$BC = \frac{b}{\sqrt{3}}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$AB\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{3}}$

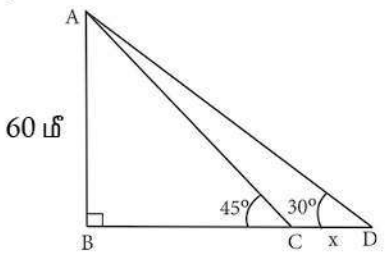
$AB = \frac{b}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{b}{3}$

12. ஒரு கோபுரத்தின் உயரம் 60 மீ ஆகும். சூரியனை காணும் ஏற்றக்கோணம் 30° லிருந்து 45° ஆக உயரும்போது கோபுரத்தின் நிழலானது x மீ குறைகிறது எனில், x -ன் மதிப்பு

(1) 41.92 மீ (2) 43.92 மீ

(3) 43 மீ (4) 45.6 மீ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



படத்தில்
AB - கோபுரம்
BC - ஏற்றக்கோணம் 45° ஆக இருக்கும்போது கோபுர நிழல்

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1 = \frac{60}{BC}$$

$$BC = 60 \text{ மீ} \quad \ldots (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$= \frac{60}{BC + CD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{60 + x} \quad [\because (1) \text{ லிருந்து}]$$

$$60 + x = 60\sqrt{3}$$

$$x = 60\sqrt{3} - 60$$

$$= 60(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 60(1.732 - 1)$$

$$= 60 \times 0.732$$

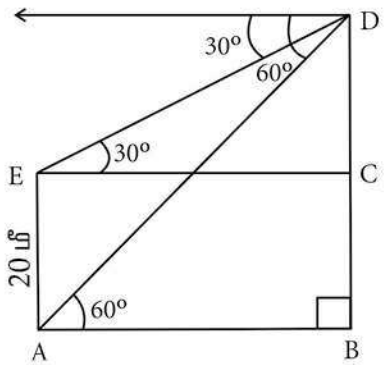
$$= 43.92 \text{ மீ}$$

13. பல அடுக்குக் கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து 20 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 60° எனில் பல அடுக்குக் கட்டடத்தின் உயரம் மற்றும் இரு கட்டடங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவானது (மீட்டரில்)

(1) $20, 10\sqrt{3}$ (2) $30, 5\sqrt{3}$

(3) 20, 10 (4) $30, 10\sqrt{3}$ **[விடை : (4)]**

தீர்வு :



செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{BD}{AB}$$

$$AB = \frac{BD}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔDEC லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{DC}{EC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DC}{AB}$$

$$AB = DC\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\frac{BD}{\sqrt{3}} = DC\sqrt{3}$$

$$\frac{BC + CD}{\sqrt{3}} = DC\sqrt{3}$$

$$BC + CD = DC \times 3$$

$$BC = 3\,CD - CD$$

$$BC = 2\,CD$$

$$AE = 2\,CD$$

$$20 = 2\,CD$$

$$CD = \frac{20}{2}$$

$$= 10 \text{ மீ}$$

கட்டடத்தின் உயரம்

$BD = BC + CD = 20 + 10 = 30$ மீ

இரு கட்டடங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு

$$AB = DC\sqrt{3} \quad [\because (2) \text{ லிருந்து}]$$

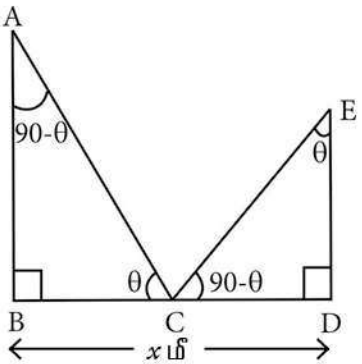
$$= 10\sqrt{3} \text{ மீ}$$

14. இரண்டு நபர்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 'x'மீ ஆகும். முதல் நபரின் உயரமானது இரண்டாவது நபரின் உயரத்தைப் போல இரு மடங்காக உள்ளது. அவர்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு நேர்கோட்டின் மையப் புள்ளியிலிருந்து இரு நபர்களின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் நிரப்புக்கோணங்கள் எனில், குட்டையாக உள்ள நபரின் உயரம் (மீட்டரில்) காண்க.

(1) $\sqrt{2}\,x$ (2) $\frac{x}{2\sqrt{2}}$

(3) $\frac{x}{\sqrt{2}}$ (4) $2x$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



AB மற்றும் DE - இரு நபர்கள்

$AB = 2\ DE$

$BD = x \Rightarrow BC = CD = \frac{x}{2}$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\theta = \frac{2\,DE}{BC} = \frac{2\,DE}{\frac{x}{2}} = \frac{4\,DE}{x} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔEDC லிருந்து

$$\tan\theta = \frac{CD}{ED} = \frac{\frac{x}{2}}{ED}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{2\,ED} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\frac{4\,DE}{x} = \frac{x}{2\,ED}$$

$$8\,DE^2 = x^2$$

$$DE^2 = \frac{x^2}{8}$$

$$DE = \frac{x}{\sqrt{8}}$$

$$DE = \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

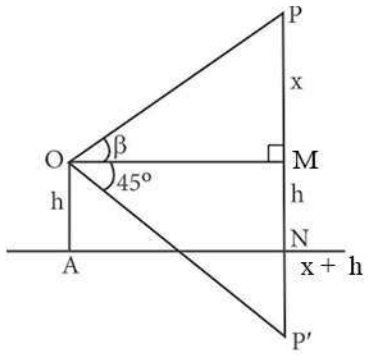
15. ஓர் ஏரியின் மேலே h மீ உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து மேகத்திற்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் β. மேக பிம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் 45° எனில், ஏரியில் இருந்து மேகத்திற்கு உள்ள உயரமானது

(1) $\frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$ (2) $\frac{h(1-\tan\beta)}{1+\tan\beta}$

(3) $h\tan(45^\circ-\beta)$ (4) இவை ஒன்றும் இல்லை

[விடை : (1)]

தீர்வு :



செங்கோண முக்கோணம் $\Delta OMP'$ லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{h+(x+h)}{OM}$$

$$1 = \frac{x+2h}{OM}$$

$$OM = x + 2h \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔOMP லிருந்து

$$\tan\beta = \frac{x}{OM}$$

$$OM = \frac{x}{\tan\beta} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$x + 2h = \frac{x}{\tan\beta}$$

$$\frac{x}{\tan\beta} - x = 2h$$

$$\frac{x - x\tan\beta}{\tan\beta} = 2h$$

$$x(1-\tan\beta) = 2h\tan\beta$$

$$x = \frac{2h\tan\beta}{1-\tan\beta}$$

$$PN = x + h = \frac{2h\tan\beta}{1-\tan\beta} + h$$

$$= \frac{2h\tan\beta + h - h\tan\beta}{1-\tan\beta}$$

$$= \frac{h\tan\beta + h}{1-\tan\beta}$$

$$= \frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$$

∴ ஏரியிலிருந்து மேகத்தின் உயரம்

$$= \frac{h(1+\tan\beta)}{1-\tan\beta}$$

அலகு பயிற்சி - 6

1. நிரூபிக்கவும்

(i) $\cot^2 A\left(\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right)+\sec^2 A\left(\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right)=0.$

(ii) $\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=1-2\cos^2\theta.$

தீர்வு :

(i) இடப்பக்கம்

$$=\cot^2 A\left(\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right)+\sec^2 A\left(\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right)$$

$$=\frac{\cot^2 A\,(\sec A-1)(\sec A+1)+\sec^2 A\,(\sin A-1)(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$$

$$=\frac{\cot^2 A\,(\sec^2 A-1)\ +\sec^2 A\,(\sin^2 A-1)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$$

$$=\frac{\cot^2 A\tan^2 A-\sec^2 A\,(1-\sin^2 A)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$$

$[\because \sec^2 A-\tan^2 A=1]$

$$=\frac{\cot^2 A\tan^2 A-\sec^2 A\cos^2 A}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\tan^2 A}\tan^2 A-\frac{1}{\cos^2 A}\cos^2 A}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$$

$$=\frac{1-1}{(1+\sin A)(1-\sec A)}=0=\text{வலப்பக்கம்}$$

(ii) $\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=1-2\cos^2\theta$

இடப்பக்கம் $=\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}$

$$=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1}$$

$$=\frac{\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{1}\quad[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$

$$=(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta$$

$[\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta]$

$$=1-\cos^2\theta-\cos^2\theta$$

$$=1-2\cos^2\theta=\text{வலப்பக்கம்}$$

2. $\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

தீர்வு :

இடப்பக்கம் $=\left(\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right)^2$

$$=\left(\frac{(1+\sin\theta)-\cos\theta}{(1+\sin\theta)+\cos\theta}\times\frac{(1+\sin\theta)-\cos\theta}{(1+\sin\theta)-\cos\theta}\right)^2$$

$$=\left[\frac{((1+\sin\theta)-\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-(\cos\theta)^2}\right]^2$$

$$=\left[\frac{1+\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{1+\sin^2\theta+2\sin\theta-\cos^2\theta}\right]^2$$

$[\because\ (a-b)^2=a^2+b^2-2ab]$

$$=\left[\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta+1+\cos^2\theta-2\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta}{1+(1-\cos^2\theta)+2\sin\theta-\cos^2\theta}\right]^2$$

$$=\left[\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2\sin\theta+1-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{1+1-2\cos^2\theta+2\sin\theta}\right]^2$$

$$=\left[\frac{1+1+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{2-2\cos^2\theta+2\sin\theta}\right]^2$$

$$=\left[\frac{2+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{2-2\cos^2\theta+2\ \sin\theta}\right]^2$$

$$=\left(\frac{2(1+\sin\theta)-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{2(1-\cos^2\theta)+2\sin\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{(1+\sin\theta)\,2\,(1-\cos\theta)}{2\sin^2\theta + 2\sin\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2\,(1+\sin\theta)\,(1-\cos\theta)}{2\sin\theta\,(1+\sin\theta)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)\,(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)\,(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\,(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

= வலப்பக்கம்

3. $x\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$ மற்றும் $x\sin\theta = y\cos\theta$ எனில், $x^2 + y^2 = 1$ என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$x\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$ என்க.

$\Rightarrow (x\sin\theta)(\sin^2\theta) + (y\cos\theta)\cos^2\theta = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow x\sin\theta(\sin^2\theta) + (x\sin\theta)\cos^2\theta = \sin\theta\cos\theta \quad [\because x\sin\theta = y\cos\theta]$

$\Rightarrow x\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow x\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

$x = \cos\theta \quad \ldots (1)$

மேலும், $x\sin\theta = y\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta\sin\theta = y\cos\theta \quad [\because x = \cos\theta \text{ from } (1)]$

$\Rightarrow y = \sin\theta \quad \ldots (2)$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$x^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$

4. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ எனில், $(a\sin\theta + b\cos\theta) = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

$a\cos\theta - b\sin\theta = c$ என்க.

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$

$a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\cos\theta\sin\theta = c^2$

$a^2(1-\sin^2\theta) + b^2(1-\cos^2\theta) - 2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$

$a^2 - a^2\sin^2\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta = c^2$

$a^2 + b^2 - c^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta$

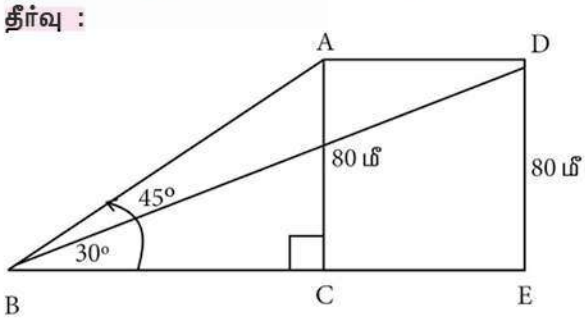
$a^2 + b^2 - c^2 = (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$

$\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2} = a\sin\theta + b\cos\theta$

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

5. 80 மீ உயரமுள்ள மரத்தின் உச்சியில் ஒரு பறவை இருக்கிறது. தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பறவையின் ஏற்றக்கோணம் 45°. பறவை ஒரே உயரத்தில் கிடைமட்டத்தில் பறந்து செல்கிறது. 2 வினாடிகள் கழித்து அதே புள்ளியிலிருந்து பறவையின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், பறவை பறக்கும் வேகத்தினைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு :



பறவை முதலில் மரத்தில் A என்ற நிலையிலும் 2 வினாடிகளுக்குப்பின் D என்ற நிலையிலும் உள்ளது எனக் கொள்வோம்.

$AC = DE = 80$ மீ

$\angle ABC = 45°$

$\angle DBC = 30°$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 45° = \frac{AC}{BC}$$

$$1 = \frac{80}{BC}$$

$BC = 80$ மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔDBE லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{BE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{80}{BC + CE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{80}{80 + CE}$$

$$80 + CE = 80\sqrt{3}$$

$$CE = (80\sqrt{3} - 80)$$

$$= 80(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 80\ (1.732 - 1)$$

$$= 80 \times 0.732$$

$$CE = 58.56 \text{ மீ}$$

∴ 2 வினாடிகளில் பறவை 58.56 மீ தூரம் பறக்கிறது.

$$\text{பறவையின் வேகம்} = \frac{\text{கடந்த தொலைவு}}{\text{எடுத்துக்கொண்ட காலம்}}$$

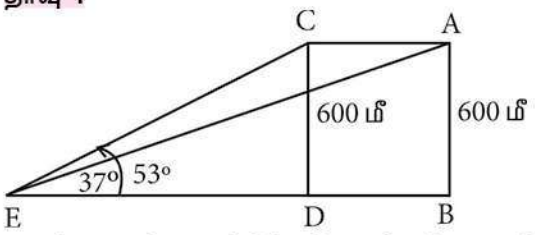
$$= \frac{58.56}{2}$$

$$= 29.28 \text{ மீ/வி}$$

∴ பறவை பறக்கும் வேகம் = 29.28 மீ/வி

6. விமானம் ஒன்று புவிப் பரப்பிற்கு இணையாக 600 மீ உயரத்தில் 175 மீ/வி வேகத்தில் செல்கிறது. புவியின் மீது ஒரு புள்ளியிலிருந்து விமானத்திற்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் 37° ஆகும். அதே புள்ளியிலிருந்து ஏற்றக்கோணம் 53° –க்கு அதிகரிக்க எவ்வளவு நேரம் தேவைப்படும்? (tan 53° = 1.3270, tan 37° = 0.7536)

தீர்வு :



A என்பது விமானத்தின் தொடக்கநிலை மற்றும் C என்பது 53° ஏற்றக்கோணத்தில் விமானத்தின் நிலை என்க.

$$\angle AEB = 37^\circ$$

$$\angle CED = 53^\circ$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔAEB -லிருந்து

$$\tan 37^\circ = \frac{AB}{BE}$$

$$0.7536 = \frac{600}{BD + DE}$$

$$BD + DE = \frac{600}{0.7536}$$

$$= \frac{60,00,000}{7536}$$

$$BD + DE = 796.18 \text{ மீ} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔCED லிருந்து

$$\tan 53^\circ = \frac{CD}{DE}$$

$$1.3270 = \frac{600}{DE}$$

$$DE = \frac{600}{1.3270}$$

$$= \frac{6,00,000}{1327}$$

$$DE = 452.15 \text{ மீ} \quad \ldots (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow BD + DE - DE = 796.18 - 452.15$

$$BD = 344.03 \text{ மீ}$$

∴ $CA = 344.03$ மீ $[\because BD = CA]$

∴ விமானம் கடந்த தொலைவு = 344.03 மீ

விமானத்தின் வேகம் = 175 மீ/வி

$$\text{வேகம்} = \frac{\text{கடந்த தொலைவு}}{\text{எடுத்துக்கொண்ட காலம்}}$$

$$\text{எடுத்துக்கொண்ட காலம்} = \frac{\text{கடந்த தொலைவு}}{\text{வேகம்}}$$

$$= \frac{344.03}{175}$$

$$= 1.965 \text{ வினாடிகள்}$$

$$= 1.97 \text{ வினாடிகள்}$$

∴ ஏற்றக்கோணம் 53° க்கு அதிகரிக்க 1.97 வினாடிகள் தேவைப்படும்.

7. ஒரு பறவை A என்ற இடத்திலிருந்து 30 கி.மீ தொலைவில் B என்ற இடத்திற்கு 35° கோணத்தில் பறக்கிறது. B ல் 48° கோணத்தைத் தாங்கி 32 கி.மீ தொலைவில் உள்ள C என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது, எனில்

(i) A -ன் வடக்குப் புறமாக B -ன் தொலைவு எவ்வளவு?

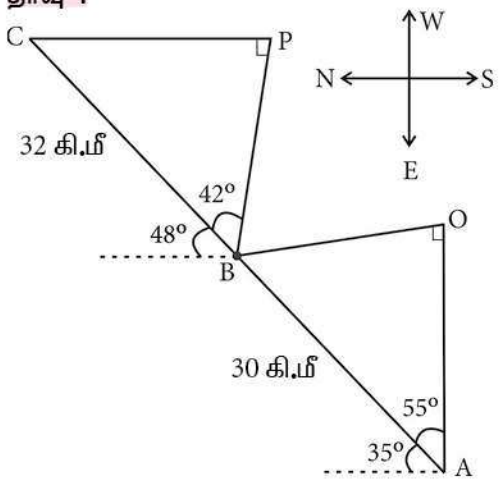
(ii) A -ன் மேற்குப் புறமாக B -ன் தொலைவு எவ்வளவு?

(iii) B -ன் வடக்குப் புறமாக C -ன் தொலைவு எவ்வளவு?

(iv) B -ன் கிழக்குப் புறமாக C -ன் தொலைவு எவ்வளவு?

$\left(\begin{matrix}\sin 55^\circ = 0.8192, \cos 55^\circ = 0.5736 \\ \sin 42^\circ = 0.6691, \cos 42^\circ = 0.7431\end{matrix}\right)$

தீர்வு :



A என்பது பறவையின் தொடக்க நிலை

B என்பது 30° கோணத்தில் பறந்த பின் இருந்த நிலை மற்றும் C என்பது பறவை 32 கி.மீ பறந்த பின் இருந்த நிலை என்க.

$\therefore \quad \angle OAP = 55^\circ$

$\angle PBC = 42^\circ$

[$\because$ நிரப்புக் கோணங்கள்]

(i) செங்கோண முக்கோணம் ΔAOB -லிருந்து

$$\sin 55^\circ = \frac{OB}{AB}$$

$$0.8192 = \frac{OB}{30}$$

$$OB = 30 \times 0.8192 = 24.58 \text{ கி.மீ}$$

A -ன் வடக்குப் புறமாக B -ன் தொலைவு 24.58 கி.மீ.

(ii) செங்கோண முக்கோணம் ΔAOB லிருந்து

$$\cos 55^\circ = \frac{OA}{AB}$$

$$0.5736 = \frac{OA}{30}$$

$$OA = 30 \times 0.5736 = 17.21 \text{ கி.மீ}$$

A இன் மேற்குப் புறமாக B இன் தொலைவு 17.21 கி.மீ.

(iii)

$$\sin 42^\circ = \frac{PC}{BC}$$

$$0.6691 = \frac{PC}{32}$$

$$PC = 32 \times 0.6691 = 21.41 \text{ கி.மீ}$$

B இன் வடக்குப் புறமாக C இன் தொலைவு 21.41 கி.மீ.

(iv) செங்கோண முக்கோணம் ΔBPC லிருந்து

$$\cos 42^\circ = \frac{BP}{BC}$$

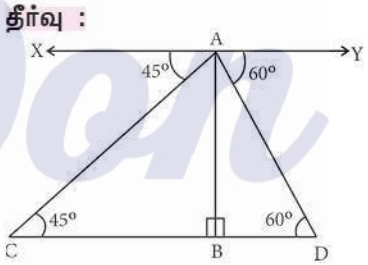
$$0.7431 = \frac{BP}{32}$$

$$BP = 23.78 \text{ கி.மீ}$$

B இன் கிழக்குப் புறமாக C இன் தொலைவு 23.78 கி.மீ.

8. கலங்கரை விளக்கம் இருக்கும் இடத்திலிருந்து கடலில் எதிரெதிர் திசையில் இரு கப்பல்கள் பயணம் செய்கின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து இரு கப்பல்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45°. கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ மீ எனில், கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :



AB என்பது கலங்கரை விளக்கம்,

C மற்றும் D இரு கப்பல்கள் என்க.

$\angle XAC = \angle ACB = 45^\circ$

$\angle YAD = \angle ADB = 60^\circ$

$$CD = 200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right) \text{ மீ}$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{BD}$$

$$BD = \frac{AB}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ABC லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1 = \frac{AB}{BC}$$

$$BC = AB \quad \ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \quad BD + BC = \frac{AB}{\sqrt{3}} + AB$$

$$CD = AB\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) \quad [\because \ CB + BD = CD]$$

$$\frac{CD}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)} = AB$$

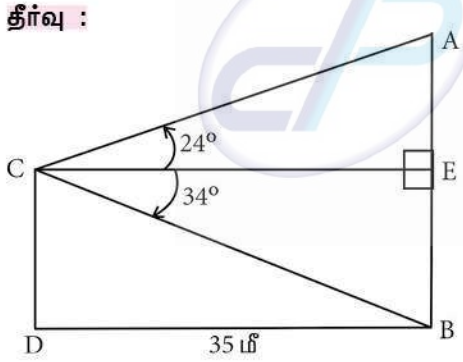
$$AB = \frac{200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$AB = 200 \text{ மீ}$$

∴ கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 200 மீ.

9. ஒரு தெருவில் கட்டடமும், சிலையும் எதிரெதிர்த் திசையில் 35 மீ இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து, சிலை உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 24° மற்றும் சிலை அடியின் இறக்கக்கோணம் 34° எனில், சிலையின் உயரம் என்ன? (tan 24° = 0.4452, tan 34° = 0.6745)

தீர்வு :



AB என்பது சிலை எனவும், CD என்பது கட்டடம் எனவும் கொள்க.

$$BD = 35 \text{ மீ}$$
$$\angle ACE = 24^\circ$$
$$\angle ECB = 34^\circ$$
$$DB = CE = 35 \text{ மீ}$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔECB லிருந்து

$$\tan 34^\circ = \frac{EB}{CE}$$

$$EB = CE \times \tan 34^\circ$$
$$= 35 \times 0.6745 \text{ மீ}$$
$$EB = 23.61 \text{ மீ} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் Δ*AEC* லிருந்து

$$\tan 24^\circ = \frac{AE}{EC}$$

$$AE = \tan 24^\circ \times EC$$
$$= 0.4452 \times 35$$
$$AE = 15.58 \text{ மீ} \quad \ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \quad AE + EB = 15.58 + 23.61$$
$$AB = 39.19 \text{ மீ}$$

∴ சிலையின் உயரம் = 39.19 மீ

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்:

முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

1. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ எனில், $\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta}$ என்பது

(1) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ (2) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

(3) $\frac{a+b}{a-b}$ (4) $\frac{a-b}{a+b}$ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta} = \frac{a\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + b\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{a\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - b\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$$

[$\cos\theta$ ஆல் வகுக்க]

$$= \frac{a\tan\theta + b}{a\tan\theta - b}$$

$$= \frac{a\times\frac{a}{b} + b}{a\times\frac{a}{b} - b}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{b} + b}{\frac{a^2}{b} - b}$$

$$= \frac{\frac{a^2+b^2}{b}}{\frac{a^2-b^2}{b}}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{b}\times\frac{b}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

2. A மற்றும் B நிரப்புக் கோணங்கள் எனில்

(1) $\sin A = \sin B$ (2) $\cos A = \cos B$

(3) $\tan A = \tan B$ (4) $\sec A = \operatorname{cosec} B$

[விடை : (4)]

தீர்வு :

A மற்றும் B நிரப்பிக் கோணங்கள் எனில்

$$A + B = 90^\circ$$

$$A = 90^\circ - B$$

$$\sec A = \sec(90^\circ - B) = \operatorname{cosec} B$$

3. $x \sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta) = \cos(90^\circ-\theta)$ எனில், x =

(1) 0 (2) 1

(3) -1 (4) 2 **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$$x\sin(90^\circ-\theta)\cot(90^\circ-\theta) = \cos(90^\circ-\theta)$$

$$x\cos\theta\tan\theta = \sin\theta$$

$$x = \frac{\sin\theta}{\cos\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cot\theta$$

$$= \tan\theta\cot\theta$$

$$= \tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta} = 1$$

4. $x\tan 45^\circ\cos 60^\circ = \sin 60^\circ\cot 60^\circ$ எனில், x இன் மதிப்பு

(1) 1 (2) $\sqrt{3}$

(3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **[விடை : (1)]**

தீர்வு :

$$x\tan 45^\circ\cos 60^\circ = \sin 60^\circ\cot 60^\circ$$

$$x\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

5. $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$ =

(1) $\tan 90^\circ$ (2) 1

(3) $\sin 45^\circ$ (4) $\sin 0^\circ$

[விடை : (4)]

தீர்வு :

$$\frac{1-\tan^2 45}{1+\tan^2 45} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்:

6. $\sec\theta + \tan\theta = x$ எனில், $\sec\theta =$

(1) $\frac{x^2+1}{x}$ (2) $\frac{x^2+1}{2x}$

(3) $\frac{x^2-1}{2x}$ (4) $\frac{x^2-1}{x}$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :

$$\sec\theta + \tan\theta = x$$
$$(\sec\theta + \tan\theta)^2 = x^2$$
$$\sec^2\theta + \tan^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta = x^2$$
$$\sec^2\theta + \sec^2\theta - 1 + 2\sec\theta\tan\theta = x^2$$
$$2\sec^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta = x^2 + 1$$
$$2\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = x^2 + 1$$
$$\sec\theta\ (x) = \frac{x^2+1}{2}$$
$$\sec\theta = \frac{x^2+1}{2x}$$

7. $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} =$

(1) $\sec\theta + \tan\theta$ (2) $\sec\theta - \tan\theta$

(3) $\sec^2\theta + \tan^2\theta$ (4) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$

[விடை : (1)]

தீர்வு :

$$\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$
$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \sec\theta + \tan\theta$$

8. $\cos^4 A - \sin^4 A =$

(1) $2\cos^2 A + 1$ (2) $2\cos^2 A - 1$

(3) $2\sin^2 A - 1$ (4) $2\sin^2 A + 1$

[விடை : (2)]

தீர்வு :

$$\cos^4 A - \sin^4 A = (\cos^2 A)^2 - (\sin^2 A)^2$$
$$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$$
$$= (1)(\cos^2 A - (1 - \cos^2 A))$$
$$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1$$

9. $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} =$

(1) $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ (2) $\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

(3) $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ (4) $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

10. $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ எனில், $\cos^2\theta + \cos^4\theta =$

(1) -1 (2) 1

(3) 0 (4) இவற்றுள் ஏதுமில்லை

[விடை : (2)]

தீர்வு :

$$\sin\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\sin\theta + 1 - \cos^2\theta = 1$$
$$\sin\theta = 1 - 1 + \cos^2\theta$$

$\sin\theta = \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = \cos^4\theta$ ... (1)

இப்பொழுது $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$ (1)லிருந்து

$\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

உயரங்களும் தொலைவுகளும் – ஏற்றக் கோணம்:

11. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு பொருளின் உயரம் அதிகரிக்கும்போது அதன் ஏற்றக்கோணத்தின் அளவு

(1) அதிகரிக்கும்
(2) குறையும்
(3) அதிகரிக்கவும் செய்யாது குறையவும் செய்யாது
(4) சமமாக இருக்கும்

[விடை : (1)]

12. ஒரு கம்பி மற்றும் அதன் நிழலின் நீளங்கள் $1:\sqrt{3}$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன எனில், கம்பியின் ஏற்றக்கோணம்

(1) 30° (2) 45°
(3) 60° (4) 90°

[விடை : (1)]

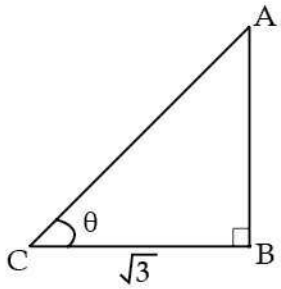
தீர்வு :

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \tan 30^\circ$

$\theta = 30^\circ$



ஏற்றக்கோணம் 30°

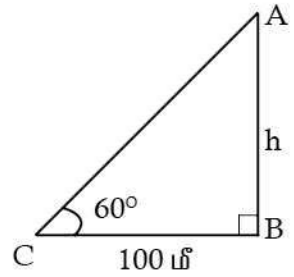
13. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 100 மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணம் 60° எனில் அக்கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(1) $100\sqrt{3}$ மீ (2) $\frac{100}{\sqrt{3}}$ மீ

(3) $50\sqrt{3}$ மீ (4) $\frac{200}{\sqrt{3}}$ மீ

[விடை: (1)]

தீர்வு :



AB – கோபுரம்

புள்ளி C லிருந்து தொலைவு = 100 மீ

ஏற்றக்கோணம் $\theta = 60^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{h}{100}$

$\sqrt{3} = \frac{h}{100}$

$h = 100\sqrt{3}$

கோபுரத்தின் உயரம் = $100\sqrt{3}$ மீ

14. சூரியனின் கதிர்கள் 60° கோணத்தில் பூமியில் விழும்போது ஒரு கோபுரம் 30 மீ நீளமுள்ள நிழலைத் தருகிறது எனில் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(1) $30\sqrt{3}$ மீ (2) 15 மீ

(3) $\frac{30}{\sqrt{3}}$ மீ (4) $15\sqrt{2}$ மீ **[விடை: (1)]**

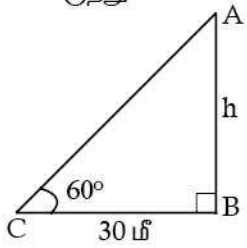
தீர்வு :

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\sqrt{3} = \frac{h}{30}$

$h = 30\sqrt{3}$ மீ

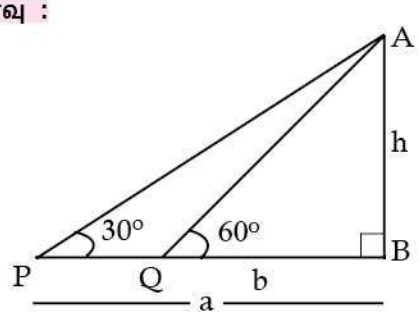


15. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து a மற்றும் b (a > b) என்ற ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ள இரு வேறு புள்ளிகளிலிருந்து கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 60° எனில், கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(1) $\sqrt{a+b}$ (2) $\sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a-b}$ (4) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ **[விடை : (2)]**

தீர்வு :



$$\tan 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{QB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{b} \quad \ldots (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{h}{a} \times \frac{h}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}$$

$$\frac{h^2}{ab} = 1$$

$$h^2 = ab$$

கோபுரத்தின் உயரம் $h = \sqrt{ab}$

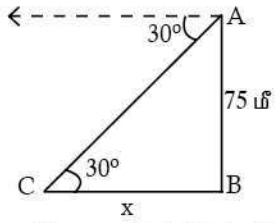
இறக்கக் கோணம்:

16. ஒரு கோபுரத்தின் மீதிருந்து தரையில் நிறுத்தி வைக்கப்பட்டிருந்த ஒரு மகிழுந்தின் இறக்கக் கோணம் 30°. மேலும் கோபுரத்தின் உயரம் 75 மீ எனில் மகிழுந்து கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

(1) $25\sqrt{3}$ (2) $50\sqrt{3}$

(3) $75\sqrt{3}$ (4) 150 **[விடை: (3)]**

தீர்வு :



செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{75}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{x}$$

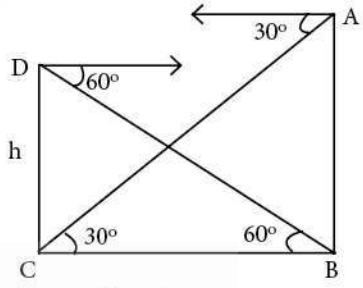
$$x = 75\sqrt{3} \text{ மீ}$$

17. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து சமதளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியானது கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 30° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கப்படுகிறது. அப்புள்ளியில h மீ உயரமுள்ள ஒரு கம்பத்திலிருந்து கோபுரத்தின் அடியானது 60° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கப்படுகிறது எனில், கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(1) $\frac{h}{2}$ மீ (2) $\sqrt{3}\,h$ மீ

(3) $\frac{h}{3}$ மீ (4) $\frac{h}{\sqrt{3}}$ மீ **[விடை : (3)]**

தீர்வு :



AB என்பது கோபுரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔDCB லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{BC}$$

$$BC = \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔCBA லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC}$$

$$BC = AB\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$AB\sqrt{3} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{h}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{h}{3} \text{ மீ}$$

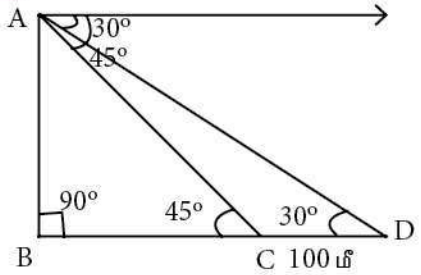
18. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்திலிருந்து ஒரே நேர்கோட்டில் வரும் இரு கப்பல்கள் முறையே 45° மற்றும் 30° இறக்கக்கோணங்களில் உள்ளன. இரு கப்பல்களுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 100 மீ எனில், கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் என்ன?

(1) $\frac{50}{\sqrt{3}+1}$ மீ (2) $\frac{50}{\sqrt{3}-1}$ மீ

(3) $50(\sqrt{3}-1)$ மீ (4) $50(\sqrt{3}+1)$ மீ

[விடை : (4)]

தீர்வு :



AB என்பது கலங்கரை விளக்கம். C மற்றும் D என்பன கப்பல்கள்.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1 = \frac{AB}{BC}$$

$$BC = AB \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC+CD}$$

$$BC + 100 = \sqrt{3}\,AB \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) –லிருந்து

$$\sqrt{3}\,AB = AB + 100$$

$$\sqrt{3}\,AB - AB = 100$$

$$(\sqrt{3}-1)\,AB = 100$$

$$AB = \frac{100}{(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{100\times(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{100\ (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$= \frac{100\ (\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= \frac{100}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$AB = 50\,(\sqrt{3}+1)\text{ மீ}$$

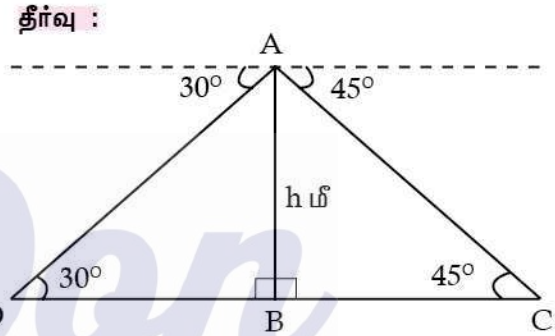
19. h மீ உயரமுடைய ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து அதன் எதிர் புறங்களில் வரும் இரு கப்பல்கள் 30° மற்றும் 45° இறக்கக் கோணங்களில் பார்க்கப்படுகின்றன எனில், அக்கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

(1) $(\sqrt{3}+1)\,h$ மீ (2) $(\sqrt{3}-1)\,h$ மீ

(3) $\sqrt{3}\,h$ மீ (4) $1+\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)h$ மீ

[விடை : (1)]

தீர்வு :



AB என்பது கலங்கரை விளக்கம், C மற்றும் D இரு கப்பல்கள் மற்றும் CD என்பது அவற்றுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{DB}$$

$$DB = h\sqrt{3} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து $BC + DB = h + h\sqrt{3}$

$$DC = (1+\sqrt{3})\,h$$

இரு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

$$= (\sqrt{3}+1)\ h \text{ மீ}$$

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்:

1. $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ எனில், $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

$$\sin\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \cos^2\theta \quad \ldots (1)$$

இங்கு $\cos^2\theta + \cos^4\theta = \cos^2\theta + (\cos^2\theta)^2$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + \cos^4\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

[$\because$ (1) லிருந்து]

$$\Rightarrow \cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$$

[$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

2. $(1 - \sin^2\theta)\sec^2\theta = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= (1 - \sin^2\theta)\sec^2\theta = \cos^2\theta \sec^2\theta$

$$= \cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right) = 1 = \text{வலதுபக்கம்}$$

3. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta)$

$= \cos^2\theta \sec^2\theta$ [$\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$]

$= \cos^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 =$ வலதுபக்கம்

4. $\cos^2\theta + \frac{1}{1 + \cot^2\theta} = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \cos^2\theta + \frac{1}{1 + \cot^2\theta}$

$= \cos^2\theta + \frac{1}{\text{cosec}^2\theta}$ [$\because 1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$]

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$ $\left[\because \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} = \sin\theta\right]$

$= 1 =$ வலதுபக்கம்

5. $\frac{1}{1 + \sin\theta} + \frac{1}{1 - \sin\theta} = 2\sec^2\theta$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \frac{1}{1 + \sin\theta} + \frac{1}{1 - \sin\theta}$

$= \frac{1 - \sin\theta + 1 + \sin\theta}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}$

$= \frac{2}{1 - \sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta}$

$= 2\sec^2\theta$ $\left[\because \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right]$

$=$ வலதுபக்கம்

6. $\text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta = \text{cosec}^2\theta \sec^2\theta$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \text{cosec}^2\theta + \sec^2\theta$

$= \frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta}$

$= \frac{1}{\sin^2\theta \cos^2\theta}$ $\left[\because \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta, \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right]$

$= \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}$

$= \text{cosec}^2\theta \sec^2\theta =$ வலதுபக்கம்

7. $\cot^2\theta - \frac{1}{\sin^2\theta} = -1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \cot^2\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}$

$= \cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta$

$= -(\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)$ [$\because \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$]

$= -1 =$ வலதுபக்கம்

8. $(1 + \tan^2\theta)(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= (1 + \tan^2\theta)(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

$= (1 + \tan^2\theta)(1 - \sin^2\theta)$

[$\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$]

$= (1 + \tan^2\theta)(\cos^2\theta)$

$= \sec^2\theta \cos^2\theta$ [$\because 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$]

$= \frac{1}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta$

$= 1 =$ வலதுபக்கம்

9. $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= (1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

$= (1+\cot^2\theta)(1-\cos^2\theta)$

$= \operatorname{cosec}^2\theta \sin^2\theta$ $\left[\because\ 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta \text{ மற்றும் } 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta\right]$

$= \dfrac{1}{\sin^2\theta}\sin^2\theta = 1 =$ வலதுபக்கம்

10. $\tan^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta} = -1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

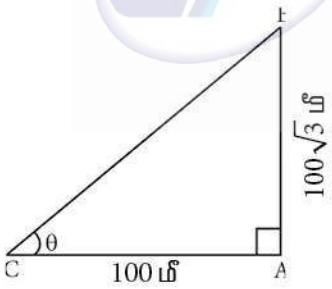
இடதுபக்கம் $= \tan^2\theta - \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$= \tan^2\theta - \sec^2\theta = -(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$

$= -1 =$ வலதுபக்கம் $[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

11. $100\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 100 மீ தூரத்திலுள்ள புள்ளி C எனில் அப்புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் என்ன?

தீர்வு :



AB என்பது கோபுரம் மற்றும் AC என்பது புள்ளியில் இருந்து கோபுரத்தின் அடிக்கான தூரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔCAB லிருந்து

$$\tan\theta = \frac{BA}{AC}$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{100}$$

$$= \sqrt{3}$$

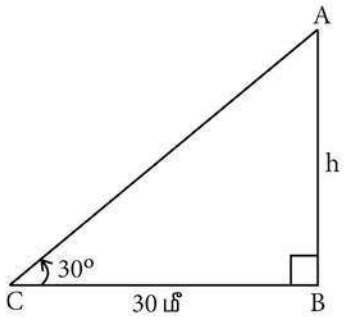
$$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$$

$$\theta = 60^\circ$$

ஏற்றக்கோணம் 60°

12. ஒரு புள்ளியிலிருந்து 30 மீ தூரத்தில் உள்ள ஒரு கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



AB –கோபுரம்,

BC ஆனது கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து புள்ளிக்கான தூரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$$

$$AB = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

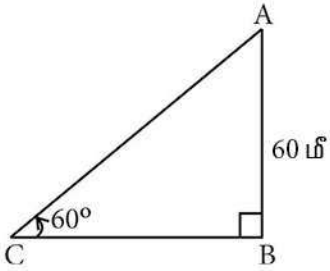
$$= \frac{3\times 10}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ மீ}$$

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம் $10\sqrt{3}$ மீ.

13. தரையிலிருந்து 60 மீ உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு பட்டமானது கயிற்றின் மூலம் தரையிலிருந்து பறக்கவிடப்படுகிறது. அக்கயிற்றின் முனை தரையுடன் 60° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனில், பட்டத்துடன் இணைக்கப்பட்ட கயிற்றின் நீளம் என்ன?

தீர்வு :



AB என்பது தரையிலிருந்து பட்டத்தின் உயரம்,
AC என்பது கயிற்றின் நீளம் என்க.
செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$$

$$AC = \frac{2 \times 60}{\sqrt{3}}$$

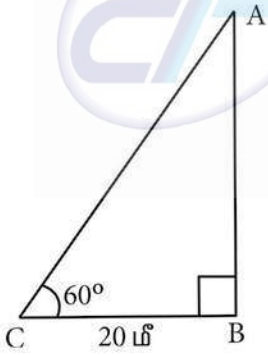
$$= \frac{2 \times 20 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= 40\sqrt{3} \text{ மீ}$$

கயிற்றின் நீளம் = $40\sqrt{3}$ மீ

14. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து 20 மீ தூரத்தில் உள்ள கோபுரத்தின் உச்சியானது 60° ஏற்றக்கோணத்தில் பார்க்கப்படுகிறது எனில், கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



AB என்பது கோபுரம் என்க.
செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

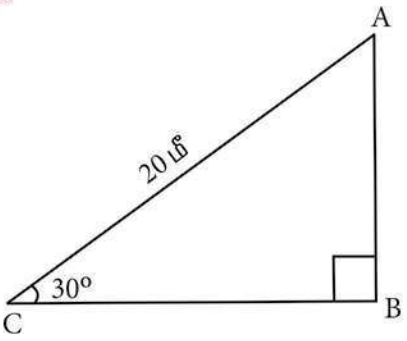
$$\sqrt{3} = \frac{AB}{20}$$

$$AB = 20\sqrt{3} \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் $20\sqrt{3}$ மீ.

15. 20 மீ நீளமுள்ள ஒரு கயிறானது ஒரு கம்பத்தின் உச்சியிலிருந்து தரையுடன் இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. அக்கயிறு தரையுடன் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனில், கம்பத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



AB என்பது கம்பத்தின் செங்குத்து உயரம்,
AC என்பது கயிற்றின் நீளம் என்க.
செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

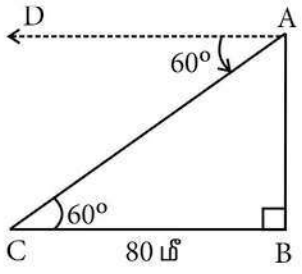
$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{20}$$

$$AB = \frac{20}{2} = 10 \text{ மீ}$$

∴ கம்பத்தின் உயரம் = 10 மீ

16. ஒரு கட்டடத்திலிருந்து 80 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியானது கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து 60° கோணத்தில் பார்க்கப்படுகிறது எனில், கட்டடத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



AB என்பது கட்டடம் என்க.

$$\angle DAC = \angle ACB = 60^\circ$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

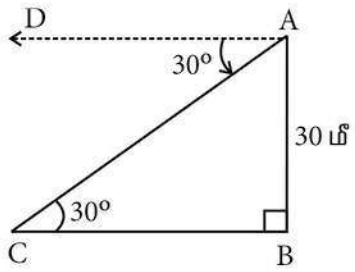
$$\sqrt{3} = \frac{AB}{80}$$

$$AB = 80\sqrt{3} \text{ மீ}$$

கட்டடத்தின் உயரம் $80\sqrt{3}$ மீ.

17. 30 மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒருவர் ஒரு மரத்தை 30^o இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கிறார் எனில், மரத்துக்கும் கோபுரத்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

தீர்வு :



AB = 30 மீ என்பது கோபுரத்தின் உயரம்.

$$\angle DAC = \angle ACB = 30^o$$

CB என்பது மரத்திற்கும் கோபுரத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 30^o = \frac{AB}{BC}$$

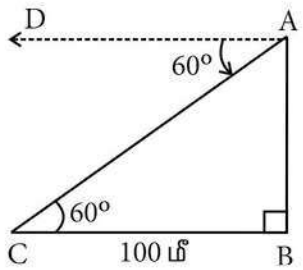
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{BC}$$

$$BC = 30\sqrt{3} \text{ மீ}$$

∴ மரத்திற்கும் கோபுரத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் = $30\sqrt{3}$ மீ

18. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து தரையில் இருக்கும் ஒரு வண்டியின் இறக்கக் கோணம் 60^o. வண்டியானது கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 100 மீ தூரத்தில் உள்ளது எனில், கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



AB –கோபுரம்

$$\angle DAC = \angle ACB = 60^o$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 60^o = \frac{AB}{BC}$$

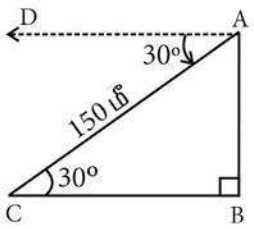
$$\sqrt{3} = \frac{AB}{100}$$

$$AB = 100\sqrt{3} \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் = $100\sqrt{3}$ மீ

19. ஒரு குன்றின் மேலிருந்து பறக்கவிடப்பட்ட ஒரு பட்டமானது குன்றின் அடியிலுள்ள குளத்தில் விழுந்துவிட்டது. பட்டத்துடன் இணைக்கப்பட்ட கயிறானது 150 மீ நீளமுடையது. மேலும் குன்றின் மேலிருந்து குளத்தில் உள்ள பட்டத்தின் இறக்கக்கோணம் 30^o எனில், குன்றின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



குன்றின் உயரம் AB மற்றும் C என்பது குளம் என்க.

$$\angle DAC = \angle ACB = 30^o$$

பட்டத்துடன் இணைக்கப்பட்ட கயிற்றின் நீளம் AC = 150 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\sin 30^o = \frac{AB}{AC}$$

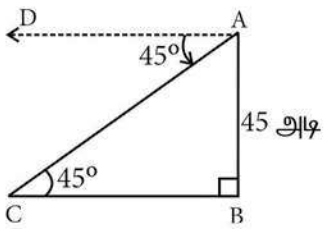
$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{150}$$

$$AB = \frac{150}{2} = 75 \text{ மீ}$$

குன்றின் உயரம் = 75 மீ

20. 45 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் மீதிருந்து தரையிலுள்ள ஒருவர் 45^o இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கப்படுகிறார் எனில், அவருக்கும் கோபுரத்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

தீர்வு :



தரையில் இருக்கும் நபர் C மற்றும் AB என்பது கோபுரம் என்க.

$$\angle DAC = \angle ACB = 45^o$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔACB இலிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$1 = \frac{45}{BC}$$

$$BC = 45 \text{ அடி}$$

∴ கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து அவர் 45 அடி தொலைவில் உள்ளார்.

21. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{cosec}\ \theta + \cot\theta$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta\ (1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$ $[\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta]$

$= \frac{1}{\sin\theta}(1+\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \text{cosec}\ \theta + \cot\theta$ = வலதுபக்கம்

22. $\frac{\tan\theta + \sin\theta}{\tan\theta - \sin\theta} = \frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \frac{\tan\theta + \sin\theta}{\tan\theta - \sin\theta}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \sin\theta}$

$= \frac{\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)}{\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)} = \frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}$

= வலதுபக்கம்

23. $\cot\theta - \tan\theta = \frac{2\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடது பக்கம் $= \cot\theta - \tan\theta$

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$ $[\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta]$

$= \frac{\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{2\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$ = வலதுபக்கம்

24. $\tan\theta - \cot\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \tan\theta - \cot\theta$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\ \cos\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta - (1-\sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta}$

= வலதுபக்கம்

25. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^2\theta + \tan^4\theta$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \sec^4\theta - \sec^2\theta$

$= \sec^2\theta\ (\sec^2\theta - 1)$

$= (1+\tan^2\theta)\ (1+\tan^2\theta - 1)$

$[\because \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta]$

$= (1+\tan^2\theta)\tan^2\theta$

$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$ = வலதுபக்கம்

26. $(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= (\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \text{வலதுபக்கம்}$$

27. $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta} \times \frac{(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta$$

= வலதுபக்கம்

28. $\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

$= (\sec\theta - \tan\theta)^2$ = வலதுபக்கம்

29. $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = (\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2}$$

$= \text{cosec}\ \theta - \cot\theta$ = வலதுபக்கம்

30. $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta$ என நிரூபி.

தீர்வு :

இடதுபக்கம் $= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

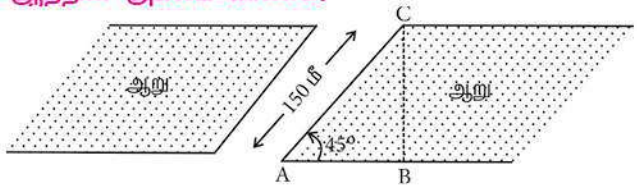
$$= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta) + \cos\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta + \cos\theta\sin\theta + \cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta = \text{வலதுபக்கம்}$$

31. ஆற்றின் குறுக்கே கட்டப்பட்ட ஒரு பாலமானது ஆற்றின் கரையுடன் 45° கோணத்தை உருவாக்குகிறது. பாலத்தின் நீளம் 150 மீ எனில், ஆற்றின் அகலம் காண்க.



தீர்வு :

ஆற்றின் அகலம் = BC

பாலத்தின் நீளம் AC என்க.

செங்கோண முக்கோணம் CBA லிருந்து

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BC}{150}$$

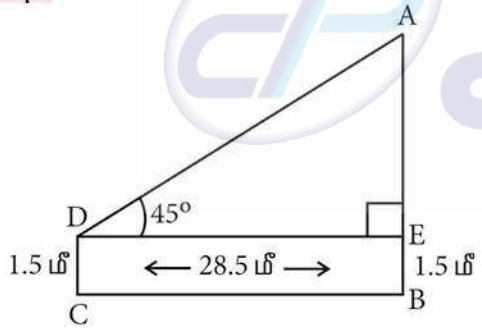
$$BC = \frac{150}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{75\sqrt{2}\ \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 75\sqrt{2} \text{ மீ}$$

∴ ஆற்றின் அகலம் $75\sqrt{2}$ மீ.

32. 1.5 மீ உயரமுள்ள ஒருவர் ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 28.5 மீ தூரத்திலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியை 45° கோணத்தில் பார்க்கிறார் எனில், கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



கோபுரத்தின் உயரம் AB,

CD என்பது 1.5 மீ உயரமுள்ள பார்வையாளர்,

CB என்பது கோபுரத்திற்கும் பார்வையாளருக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔAED லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

$$1 = \frac{AE}{28.5}$$

$$AE = 28.5 \text{ மீ}$$

$$AB = AE + BE$$

$$= AE + DC$$

$$= (28.5 + 1.5) \text{ மீ} = 30 \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் 30 மீ.

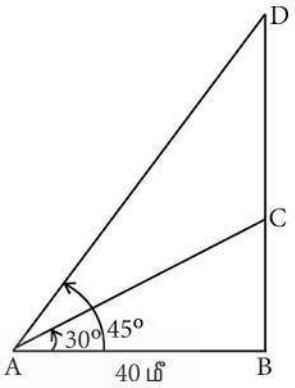
III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்:

1. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 40 மீ தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30°. அதே புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் மீது அமைந்துள்ள நீர்த்தொட்டியின் மேல் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 45° எனில்,

(i) கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

(ii) நீர்த்தொட்டியின் ஆழம் என்ன?

தீர்வு :



BC –கோபுரம்.

CD நீர்த்தொட்டி என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 45^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$1 = \frac{BC + CD}{40}$$

$$BC + CD = 40 \text{ மீ} \quad \ldots(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{40}$$

$$BC = \frac{40}{\sqrt{3}} \text{ மீ}$$

$$BC = 23.1 \text{ மீ}$$

BC = 23.1 மீ என (1) இல் பிரதியிட,

$$23.1 + CD = 40$$

$$CD = 40 - 23.1$$

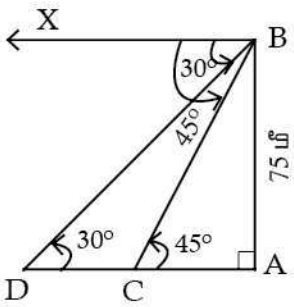
$$= 16.9 \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் = 23.1 மீ

நீர்த்தொட்டியின் ஆழம் = 16.9 மீ

2. கடல் மட்டத்திலிருந்து 75 மீ உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் மேலிருந்து ஒரே பக்கத்தில் வரும் இரு கப்பல்களின் இறக்கக்கோணங்கள் 30° மற்றும் 45°. இரு கப்பல்களும் ஒன்றன் பின் ஒன்றாக வருகின்றன எனில், இரு கப்பல்களுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

தீர்வு :



C மற்றும் D என்பது கப்பல்கள்

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\frac{AB}{AC} = \tan 45^\circ$$

$$\frac{75}{AC} = 1$$

$$AC = 75 \text{ மீ}$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{AD}$$

$$AD = 75\sqrt{3}$$

$$\therefore CD = AD - AC$$

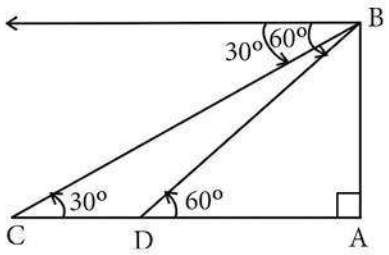
$$= 75\sqrt{3} - 75 = 75(\sqrt{3} - 1)$$

$$= 75\,[1.732 - 1]$$

$$= 75 \times 0.732 = 54.9 \text{ மீ}$$

$\therefore$ கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 54.9 மீ.

தீர்வு :



AB என்பது கோபுரத்தின் உயரம்.

C மற்றும் D என்பன மகிழுந்து வரும் நிலை என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD லிருந்து

$$\frac{AB}{AD} = \tan 60^\circ$$

$$\frac{AB}{AD} = \sqrt{3}$$

$$AB = \sqrt{3}\ AD \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC லிருந்து

$$\frac{AB}{AC} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{3}}$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\sqrt{3}\ AD = \frac{AC}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times AD = 3\ AD$$

$$CD = AC - AD$$

$$= 3\ AD - AD = 2\ AD$$

2AD தூரத்தைக் கடக்க 6 வினாடிகள் எனில்,
AD தூரத்தை கடக்க ஆகும் நேரம்

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ வினாடிகள்.}$$

3. ஒரு நேர் சாலையானது ஒரு கோபுர அடி வரை போடப்பட்டுள்ளது. கோபுரத்தின் மேல்நிற்கும் ஒருவர் சாலையில் வந்துகொண்டிருக்கும் ஒரு வண்டியை 30° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். அவர் 6 வினாடிகளுக்குப் பின் அவ்வண்டியை 60° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். வண்டியானது கோபுரத்தை நோக்கி வந்து கொண்டிருக்கிறது எனில், அப்புள்ளியிலிருந்து கோபுர அடிவரை வர ஆகும் நேரம் என்ன?

4. $\tan^2\theta = 1 - a^2$ எனில்,

$\sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta = (2 - a^2)^{3/2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இடப்பக்கம் $= \sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta$

$$= \sec\theta \left\{ \frac{\sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta}{\sec\theta} \right\}$$

[$\because$ பகுதி மற்றும் தொகுதியை $\sec\theta$ ஆல் பெருக்க]

$$= \sec\theta \left\{ \frac{\frac{1}{\cos\theta} + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} \right\}$$

$$= \sec\theta \left\{ \frac{\frac{1+\tan^3\theta \cos\theta . \operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} \right\}$$

$$= \sec\theta \frac{(1+\tan^3\theta \cos\theta \sec\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{1}$$

$$= \sec\theta \left[1 + \tan^3\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right]$$

$$= \sec\theta (1 + \tan^3\theta \cot\theta)$$

$$= \sqrt{1+\tan^2\theta} \left\{ 1 + \tan^3\theta \times \frac{1}{\tan\theta} \right\}$$

$$= \sqrt{1+\tan^2\theta}\,(1+\tan^2\theta)$$

$$= (1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}} (1+\tan^2\theta)$$

$$= (1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}} = \left(1+(1-a^2)\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(1+1-a^2\right)^{\frac{3}{2}} = (2-a^2)^{\frac{3}{2}} = \text{வலதுபக்கம்}$$

$\sec\theta + \tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta = (2-a^2)^{3/2}$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

5. $a\cos\theta + b\sin\theta = m$ மற்றும் $a\sin\theta - b\cos\theta = n$ எனில், $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ என நிரூபி.

தீர்வு :

$a\cos\theta + b\sin\theta = m$

$a\sin\theta - b\cos\theta = n$ என்க.

வலதுபக்கம் $= m^2 + n^2$

$$= (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\cos\theta)^2$$

$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + ab\sin\theta\cos\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - ab\sin\theta\cos\theta$$

$$= a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$= a^2 + b^2$ = இடதுபக்கம்

$a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

6. $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = m$ மற்றும் $\sec\theta - \cos\theta = n$ எனில் $(m^2n)^{\frac{2}{3}} + (mn^2)^{\frac{2}{3}} = 1$ என நிரூபி.

தீர்வு :

$\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = m$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta = m$$

$$\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} = m$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = m$$

மேலும் $\sec\theta - \cos\theta = n$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = n$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} = n$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = n$$

இடது பக்கம் $= (m^2n)^{2/3} + (mn^2)^{2/3}$

$$= \left(\frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

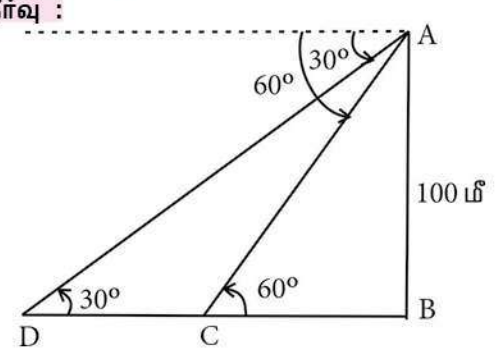
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$= 1$ = வலதுபக்கம்

$(m^2n)^{\frac{2}{3}} + (mn^2)^{\frac{2}{3}} = 1$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. கடல்மட்டத்திலிருந்து 100 மீ உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் மேலிருந்து அதன் ஒரே பக்கத்தில் ஒன்றுக்குப் பின் ஒன்றாக வரும் இரு கப்பல்களின் இறக்கக் கோணங்கள் 30° மற்றும் 60°. இரு கப்பல்களுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் காண்க. $[\sqrt{3} = 1.732]$

தீர்வு :



A என்பது பார்வையாளர் இருக்கும் இடம் என்க

AB = 100 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC இல்

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{BC}$$

$$BC = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{100 \times 1.732}{3} = 57.73 \text{ மீ}$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD இல்

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{BD}$$

$$BD = \sqrt{3} \times 100$$

$$= 1.732 \times 100 = 173.2 \text{ மீ}$$

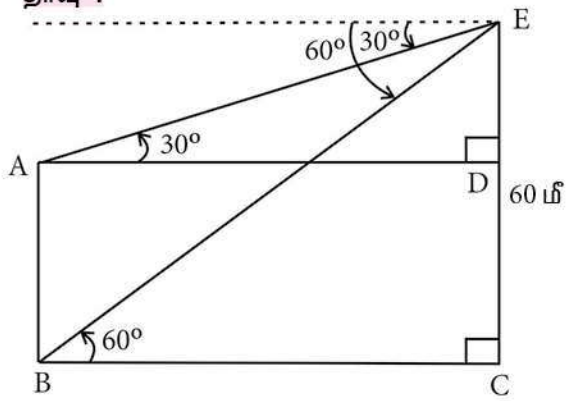
∴ இரு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்

CD = BD – BC

= 173.2 – 57.73 = 115.47 மீ

8. 60 மீ உயரமுள்ள ஒரு கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சிக்கும் அடிக்குமான இறக்கக்கோணங்கள் 30° மற்றும் 60° எனில், (i) கட்டடத்திற்கும் விளக்குக் கம்பத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் என்ன? (ii) விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம் என்ன? ($\sqrt{3}$ = 1.732)

தீர்வு :



CE –கட்டடம், AB –விளக்குக் கம்பம் என்க.

CE = 60 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔBCE இல்

$$\frac{CE}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\sqrt{3} = \frac{60}{BC}$$

$$BC = \frac{60}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = 20\sqrt{3} \text{ மீ} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔADE இல்

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DE}{20\sqrt{3}}$$

[(1) லிருந்து மற்றும் BC = DE]

$$DE = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 20 \text{ மீ}$$

விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம் = AB = CD

= CE – DE

= 60 மீ – 20 மீ = 40 மீ

கட்டடத்திற்கும் விளக்குக் கம்பத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் = $20\sqrt{3}$ மீ = 20 × 1.732 மீ

= 34.64 மீ

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்:

1. tan A = n tan B மற்றும் sin A = m sin B எனில், $\cos^2 A = \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}$ என நிரூபி.

தீர்வு : tan A = n tan B

$$\Rightarrow \tan B = \frac{1}{n} \tan A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan B} = \frac{n}{\tan A}$$

$$\Rightarrow \cot B = \frac{n}{\tan A} \quad \ldots (1)$$

மேலும் sin A = m sin B

$$\Rightarrow \sin B = \frac{1}{m} \sin A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin B} = \frac{m}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} B = \frac{m}{\sin A} \quad \ldots (2)$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

எனவே, $\operatorname{cosec}^2 B - \cot^2 B = 1$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{\sin^2 A} - \frac{n^2}{\tan^2 A} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{\sin^2 A} - n^2\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = 1$$

$$\frac{m^2 - n^2\cos^2 A}{\sin^2 A} = 1$$

$$m^2 - n^2\cos^2 A = \sin^2 A$$

$$m^2 = \sin^2 A + n^2\cos^2 A$$

$$m^2 = 1 - \cos^2 A + n^2\cos^2 A$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 = n^2\cos^2 A - \cos^2 A$$

$$\Rightarrow m^2 - 1 = (n^2 - 1)\cos^2 A$$

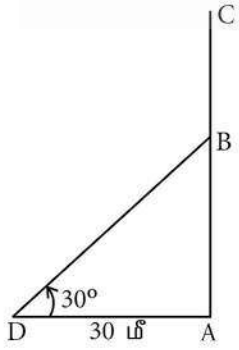
$$\Rightarrow \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1} = \cos^2 A$$

$$\cos^2 A = \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}$$

$\cos^2 A = \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

2. ஒரு மரமானது காற்றில் ஒரு பகுதி முறிந்து, முறிந்த பகுதியானது தரையுடன் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துமாறு சாய்த்து தரையைத் தொடுகிறது. அதன் அடியிலிருந்து நுனி தரையைத் தொடும் இடம் வரையிலான தூரம் 30 மீ எனில், மரத்தின் மொத்த உயரம் என்ன?

தீர்வு :



மரத்தின் உயரம் AC

மரத்தின் முறிந்த பகுதி BD என்க.

BD = BC

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD இல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{30}$$

$$AB = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ மீ} \qquad \ldots(1)$$

மேலும் செங்கோண முக்கோணம் ΔABD இல்

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{BD}$$

$$BD = \frac{2 \times 30}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} \text{ மீ} \qquad \ldots(2)$$

∴ மரத்தின் மொத்த உயரம் = AB + BC

= AB + BD

$$= \frac{30}{\sqrt{3}} + \frac{60}{\sqrt{3}}$$

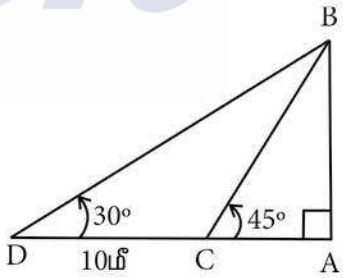
$$= \frac{30 + 60}{\sqrt{3}} = \frac{90}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \text{ மீ}$$

∴ மரத்தின் மொத்த உயரம் = $30\sqrt{3}$ மீ

3. ஒரு கோபுரத்தின் நிழலானது சூரியனின் கதிர்கள் 45° இருந்து 30° சாயும் போது 10 மீ அதிகரிக்கிறது எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தை இரு தசம இடத் திருத்தமாகக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

தீர்வு :



AB –கோபுரம்,

AC மற்றும் AD என்பன 45° மற்றும் 30° ஏற்றக்கோணங்களில் கோபுரத்தின் நிழல் என்க.

CD = 10 மீ

செங்கோண முக்கோணம் ΔCAB இல்

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$1 = \frac{AB}{AC}$$

$$AC = AB \qquad \ldots(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔDAB இல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{AC+CD} = \frac{AB}{AC+10}$$

$$AC + 10 = AB\sqrt{3} \quad \ldots(2)$$

$$AC + 10 = \sqrt{3}\,AC \quad (1 \text{ லிருந்து})$$

$$\sqrt{3}\,AC - AC = 10$$

$$\left(\sqrt{3}-1\right)AC = 10$$

$$AC = \frac{10}{\sqrt{3}-1}$$

$$AC = \frac{10}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{10\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}$$

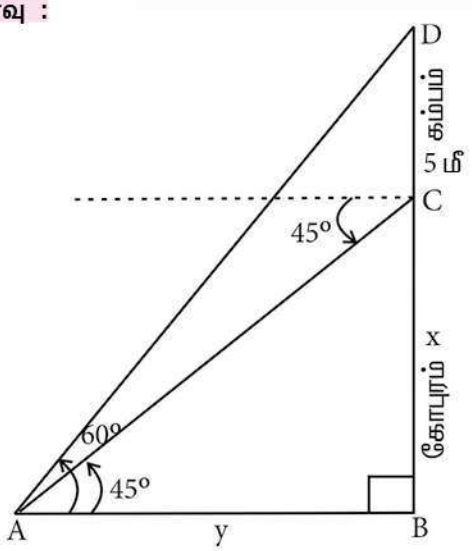
$$= \frac{10\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 5\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$= 5\,(1.732+1) = 13.65 \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் = 13.65 மீ

4. ஒரு கோபுரத்தின் மீது 5 மீ நீளமுள்ள ஒரு கம்பம் உள்ளது. தரையிலுள்ள A என்ற புள்ளியிலிருந்து அந்த கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60°. மேலும் கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து புள்ளி A இன் இறக்கக்கோணம் 45° எனில் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



BC –கோபுரம், CD –கம்பம் என்க.

மேலும் BC = 'x' மீ மற்றும் AB = 'y' மீ என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC –இல்

$$\frac{BC}{AB} = \tan 45^\circ = 1$$

$$BC = AB$$

$$y = x \quad \ldots(1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABD –இல்

$$\frac{BD}{AB} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{x+5}{y} = \sqrt{3}$$

$$y\sqrt{3} = x+5$$

$$x\sqrt{3} = x+5 \quad [\because x = y]$$

$$\sqrt{3}x - x = 5$$

$$(\sqrt{3}-1)\,x = 5$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

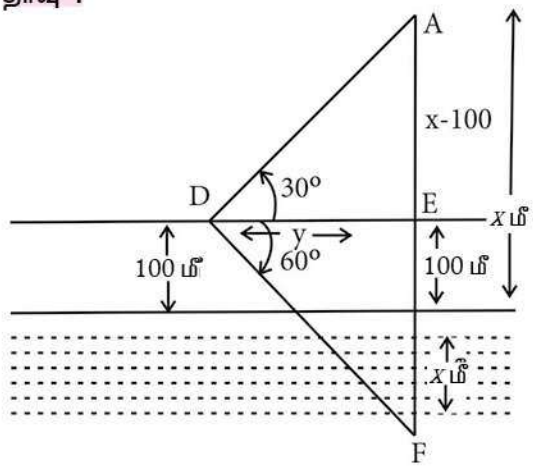
$$= \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5\,(1.732+1)}{2}$$

$$= \frac{5}{2} \times 2.732 = 6.83 \text{ மீ}$$

∴ கோபுரத்தின் உயரம் 6.83 மீ.

5. ஒரு ஏரியின் மட்டத்திலிருந்து 100 மீ உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து நிலையாக வான்வெளியில் உள்ள ஒரு ஹெலிகாப்டரின் ஏற்றக்கோணம் 30° மற்றும் அந்த ஹெலிகாப்டரின் நிழல் ஏரியில் 60° இறக்கக் கோணத்திலும் உள்ளது. எனில், ஏரி மட்டத்திலிருந்து ஹெலிகாப்டர் எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது?

தீர்வு :



படத்தில் A நிலையாக உள்ள ஹெலிகாப்டர், F அதன் பிம்பம் என்க.

செங்கோண முக்கோணம் ΔAED இல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AE}{DE}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AE}{DE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x-100}{y}$$

$$y = (x-100)\sqrt{3} \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔDEF இல்

$$\tan 60^\circ = \frac{EF}{DE}$$

$$\frac{x+100}{y} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\, y = x + 100$$

$$y = \frac{(x+100)}{\sqrt{3}} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\frac{x+100}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,(x-100)$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3}\,(x-100) = x + 100$$

$$3\,(x-100) = x + 100$$

$$3x - 300 - x - 100 = 0$$

$$2x = 400$$

$$x = 200$$

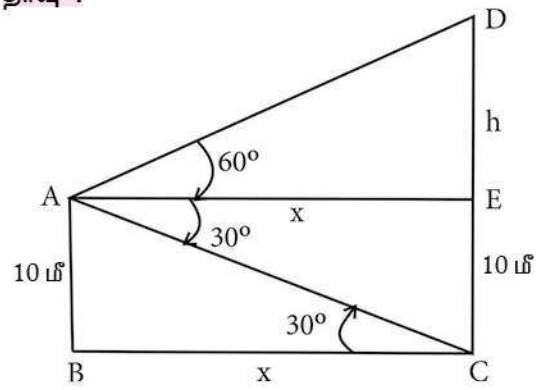
∴ ஹெலிகாப்டர் இருக்கும் உயரம் = 200 மீ

6. கப்பலின் மேல்தளத்தில் உள்ள ஒருவர் கடல்மட்டத்திலிருந்து 10 மீ உயரத்தில் உள்ளார். அவர் தூரத்தில் தெரியும் ஒரு குன்றின் உச்சியை 60° ஏற்றக்கோணத்திலும் அதன் அடியை 30° இறக்கக் கோணத்திலும் காண்கிறார் எனில்,

(i) குன்றுக்கும் கப்பலுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

(ii) குன்றின் உயரம் என்ன?

தீர்வு :



பார்வையாளர் A ல் இருப்பின் CD குன்று என்க.

$\angle EAD = 60^\circ$; $\angle BCA = 30^\circ$

செங்கோண முக்கோணம் ΔAED இல்

$$\tan 60^\circ = \frac{DE}{EA}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$h = \sqrt{3}\, x \quad \ldots (1)$$

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC இல்

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$$

$$x = 10\sqrt{3} \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$x = 10\sqrt{3}$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$h = \sqrt{3}\,(10\sqrt{3})$$

$$= 10 \times 3 = 30$$

$$CD = CE + ED$$

$$= 10 + 30$$

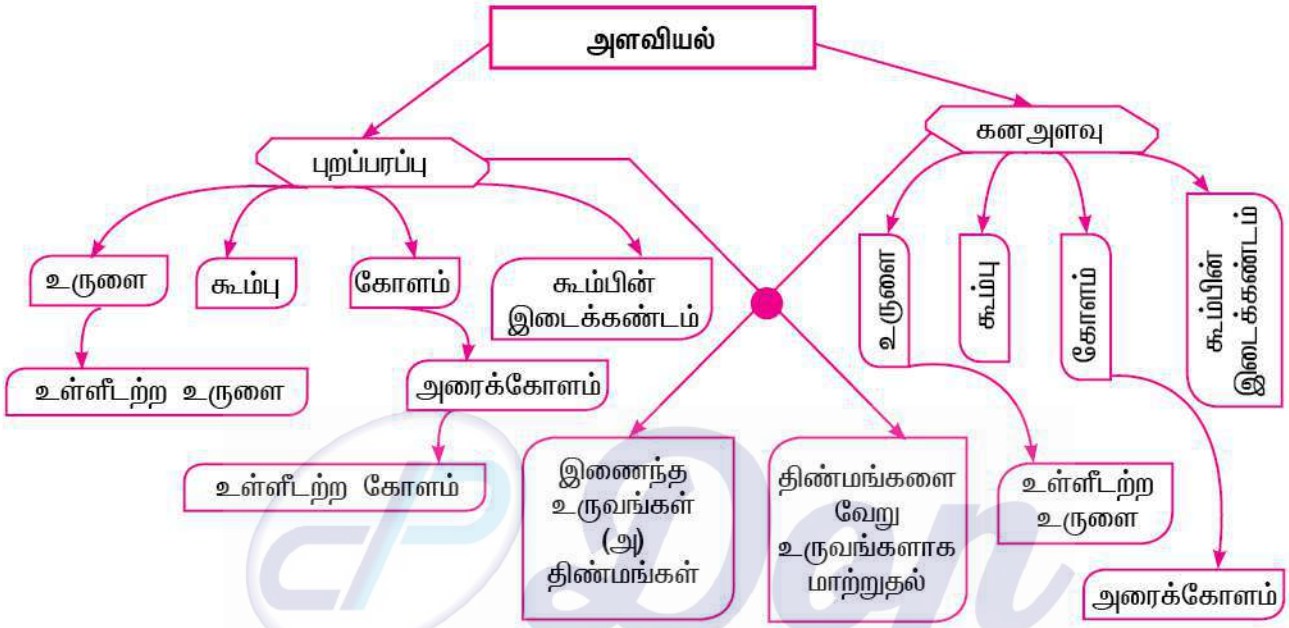
$$= 40 \text{ மீ}$$

கப்பலுக்கும் குன்றுக்கும் இடையேயான தூரம் $10\sqrt{3}$ மீ மற்றும் குன்றின் உயரம் = 40 மீ

அலகு 7

அளவியல்

மன வரைபடம்



புறப்பரப்பு

நினைவில் கொள்க

- புறப்பரப்பு என்பது மொத்தப் புறப்பரப்பைக் குறிக்கும்.
- வேறு மதிப்புகள் கொடுக்கப்படாமலிருப்பின், $\pi = \frac{22}{7}$ என்பதைப் பயன்படுத்தவும்.
- நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு = $2\pi rh$ சதுர அலகுகள்.
- நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $2\pi r(h + r)$ சதுர அலகுகள்.
- உள்ளீடற்ற உருளையின் வளைபரப்பு = $2\pi(R + r)h$ சதுர அலகுகள்
- உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $2\pi(R + r)(R - r + h)$ சதுர அலகுகள்
- நேர்வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பு = πrl சதுர அலகுகள்
- நேர்வட்டக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $\pi r(l + r)$ சதுர அலகுகள்
- அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு = $2\pi r^2$ சதுர அலகுகள்
- அரைக் கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $3\pi r^2$ சதுர அலகுகள்
- உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு = $2\pi(R^2 + r^2)$ சதுர அலகுகள்
- உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $\pi(3R^2 + r^2)$ சதுர அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு

7.1 ஓர் உருளை வடிவப் பீப்பாயின் உயரம் 20 செ.மீ மற்றும் அடிப்புற ஆரம் 14 செ.மீ எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : r மற்றும் h என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு $h = 20$ செ.மீ; $r = 14$ செ.மீ

உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$ ச.அ

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 20$$

$$= 2 \times 22 \times 2 \times 20$$

$$= 1760 \text{ செ.மீ}^2$$

உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$$= 2\pi r(h + r) \text{ ச.அ}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (20 + 14)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 34$$

$$= 2992 \text{ செ.மீ}^2$$

ஆகவே, உருளையின் வளைபரப்பு $= 1760$ செ.மீ^{2}, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2992$ செ.மீ^{2}

7.2 88 ச.செ.மீ வளைபரப்புடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் உயரம் 14 செ.மீ எனில், உருளையின் விட்டம் காண்க.

தீர்வு :

r மற்றும் h என்பன முறையே திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றம் உயரம் என்க.

இங்கு, உருளையின் வளைபரப்பு = 88 ச.செ.மீ

$$2\pi rh = 88$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14 = 88 \quad (\text{உயரம் } h = 14 \text{ செ.மீ})$$

$$2r = \frac{88 \times 7}{22 \times 14} = 2$$

$$2r = 2 \text{ செ.மீ}$$

ஆகவே, உருளையின் விட்டம் = 2 செ.மீ

7.3 நீளம் 3 மீ மற்றும் விட்டம் 2.8 மீ உடைய ஒரு சமன்படுத்தும் உருளையைக் கொண்டு ஒரு தோட்டம் சமன்படுத்தப்படுகிறது. 8 சுற்றுகளில் எவ்வளவு பரப்பை உருளை சமன் செய்யும்?



தீர்வு :

r மற்றும் h என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. இங்கு,

விட்டம் $d = 2.8$ மீ

உயரம் $h = 3$ மீ

ஆரம் $r = 1.4$ மீ

உருளை ஒரு சுற்றில் சமன்படுத்தும் பரப்பு

= சமன்படுத்தும் உருளையின் வளைபரப்பு

$$= 2\pi rh \text{ ச.அ}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1.4 \times 3 = 26.4$$

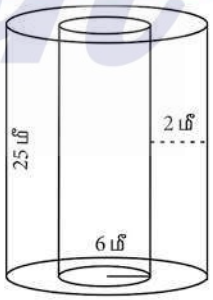
உருளை ஒரு சுற்றில் சமன்படுத்தும் பரப்பு

$= 26.4$ ச.மீ

ஆகவே, 8 சுற்றுகளில் சமன்படுத்தப்படும் மொத்தப் பரப்பு $= 8 \times 26.4 = 211.2$ மீ^{2}

எனவே, உருளை சமன்படுத்தும் பரப்பு 211.2 மீ^{2} ஆகும்.

7.4 தடிமன் 2 மீ, உட்புற ஆரம் 6 மீ மற்றும் உயரம் 25 மீ உடைய ஓர் உருளை வடிவக் சுரங்கப்பாதையின் உள் மற்றும் வெளிப்புறப் பரப்புகளுக்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. ஒரு லிட்டர் வர்ணத்தை 10 ச.மீ பூச முடியுமானால், சுரங்கப்பாதைக்கு வர்ணம் பூச எத்தனை லிட்டர் வர்ணம் தேவை?



தீர்வு :

h, r மற்றும் R என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற ஆரம் மற்றும் வெளிப்புற ஆரம் என்க.

இங்கு, உயரம் (h) = 25 மீ; தடிமன் = 2 மீ

உட்புற ஆரம் (r) = 6 மீ

தற்போது, வெளிப்புற ஆரம் (R) = 6 + 2 = 8 மீ

சுரங்கப்பாதையின் வளைபரப்பு

= உள்ளீடற்ற உருளையின் வளைபரப்பு

$$= 2\pi (R + r) h \text{ ச.அ}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} (8 + 6) \times 25$$

எனவே, சுரங்கப்பாதையின் வளைபரப்பு = 2200 ச.மீ

ஒரு லிட்டர் வர்ணம் பூசக்கூடிய பரப்பு = 10 ச.மீ

எனவே, தேவைப்படும் வர்ணம் $= \frac{2200}{10} = 220$ லி.

ஆகவே, சுரங்கப்பாதைக்கு வர்ணம் பூச 220 லிட்டர் வர்ணம் தேவைப்படும்.

7.5 **கித்தானைக் கொண்டு 7 மீ ஆரமும் 24 மீ உயரமும் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவக் கூடாரம் உருவாக்கப்படுகிறது. செவ்வக வடிவக் கித்தானின் அகலம் 4 மீ எனில், அதன் நீளம் காண்க.**

தீர்வு :

r மற்றும் h என்பன முறையே கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, ஆரம் (r) = 7 மீ, உயரம் (h) = 24 மீ

$$\text{தற்போது, } l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{49 + 576}$$

$$l = \sqrt{625} = 25 \text{ மீ}$$

கூம்பின் வளைபரப்பு = πrl ச.அ

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ மீ}^2$$

மேலும், கூம்பின் வளைபரப்பு = கித்தானின் பரப்பு

$$\text{கித்தானின் நீளம்} = \frac{\text{கித்தானின் பரப்பு}}{\text{கித்தானின் அகலம்}}$$

$$= \frac{550}{4} = 137.5 \text{ மீ}$$

ஆகவே, கித்தானின் நீளம் 137.5 மீ ஆகும்.

7.6 **704 ச.செ.மீ மொத்தப் புறப்பரப்பு கொண்ட ஒரு கூம்பின் ஆரம் 7 செ.மீ எனில், அதன் சாயுயரம் காண்க.**

தீர்வு :

கூம்பின் ஆரம் r = 7 செ.மீ

கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = $\pi r\ (l + r)$ ச.அ

மொத்தப் புறப்பரப்பு = 704 ச.செ.மீ

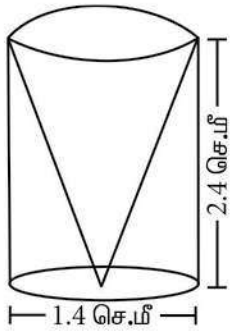
$$704 = \frac{22}{7} \times 7\ (l + 7)$$

$$32 = l + 7$$

எனவே, l = 25 செ.மீ

ஆகவே, கூம்பின் சாயுயரம் 25 செ.மீ ஆகும்.

7.7 **2.4 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு திண்ம உருளையின் விட்டம் 1.4 செ.மீ ஆகும். உருளையினுள் அதே ஆரமுள்ள கூம்பு வடிவக் குழிவு உருளையின் உயரத்திற்கு ஏற்படுத்தப்படுகிறது எனில், மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு காண்க.**



தீர்வு :

h மற்றும் r என்பன கூம்பு மற்றும் உருளை ஆகியவற்றின் உயரம் மற்றும் ஆரம் என்க.

l என்பது கூம்பின் சாயுயரம் என்க.

இங்கு, h = 2.4 செ.மீ, d = 1.4 செ.மீ, r = 0.7 செ.மீ

மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

= உருளையின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளைபரப்பு + அடிப்பரப்பு

$= (2\pi rh + \pi rl + \pi r^2)$ ச.அ

$$\text{தற்போது, } l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{0.49 + 5.76}$$

$$= \sqrt{6.25} = 2.5 \text{ செ.மீ}$$

l = 2.5 செ.மீ

மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$ ச.அ

$= \pi r\ (2h + l + r)$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times \left[(2 \times 2.4) + 2.5 + 0.7\right]$$

$= 17.6$

ஆகவே, மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 17.6 ச.செ.மீ ஆகும்.

7.8 **ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு 154 ச.மீ எனில், அதன் விட்டம் காண்க.**

தீர்வு :

கோளத்தின் ஆரம் 'r' என்க.

புறப்பரப்பு = 154 மீ^{2}

$$4\pi r^2 = 154$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$r^2 = 154 \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{22}$$

எனவே, $r^2 = \frac{49}{4}$ லிருந்து

$$r = \frac{7}{2}$$

ஆகவே, விட்டம் 7 மீ ஆகும்.

7.9 ஒரு கோள வடிவ வளிக்கூண்டினுள் (balloon) காற்று உந்தப்படும்போது அதன் ஆரம் 12 செ.மீ -லிருந்து 16 செ.மீ ஆக உயருகிறது. இரு புறப்பரப்புகளின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு :

r_1 மற்றும் r_2 என்பன வளிக்கூண்டுகளின் ஆரங்கள் என்க.

இங்கு, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

எனவே, புறப்பரப்புகளின் விகிதம்

$$= \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

ஆகவே, புறப்பரப்புகளின் விகிதம் 9 : 16 ஆகும்.

7.10 ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் அடிப்பரப்பு 1386 ச.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

r என்பது அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்க.

இங்கு, அடிப்பரப்பு = πr^2 ச.அ = 1386 ச.மீ

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பு

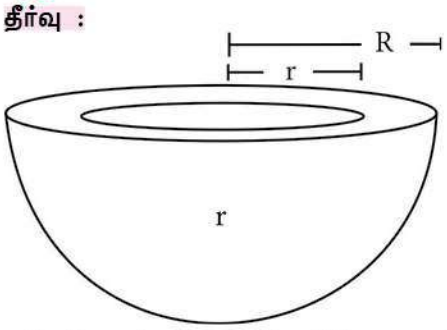
$= 3\pi r^2$ ச.அ

$= 3 \times 1386 = 4158$

ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு 4158 ச.மீ ஆகும்.

7.11 ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோள ஓட்டின் உள் மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே 3 மீ மற்றும் 5 மீ ஆகும். ஓட்டின் மொத்தப் புறப்பரப்பு மற்றும் வளைபரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



ஓட்டின் உள் மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே r மற்றும் R என்க.

இங்கு, R = 5 மீ, r = 3 மீ

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= 2\pi (R^2 + r^2)$ ச.அ

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (25 + 9)$

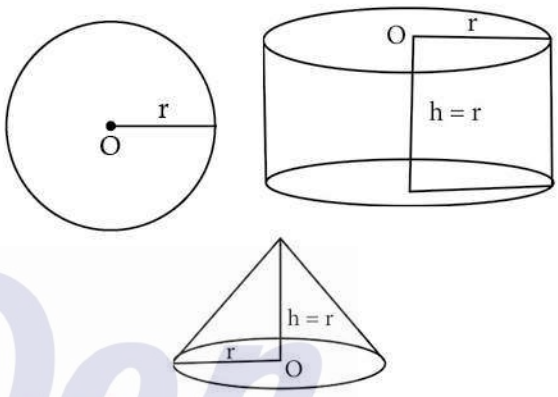
$= 213.71$

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi(3R^2 + r^2)$ ச.அ

$= \frac{22}{7}(75 + 9) = 264$

ஆகவே, வளைப்பரப்பு 213.71 ச.மீ மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பு 264 ச.மீ ஆகும்.

7.12 ஒரு கோளம், உருளை மற்றும் கூம்பு ஆகியவற்றின் ஆரங்கள் சமம். படத்தில் உள்ளபடி கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரங்கள் ஆரத்திற்குச் சமம் எனில், அவற்றின் வளைப்பரப்புகளின் விகிதம் காண்க.



தீர்வு :

இங்கு, தேவையான விகிதம்

= கோளத்தின் வளைபரப்பு : உருளையின் வளைபரப்பு : கூம்பின் வளைபரப்பு

$= 4\pi r^2 : 2\pi rh : \pi rl$

$(l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r)$

$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \pi r\sqrt{2}\, r$

$= 4\pi r^2 : 2\pi r^2 : \sqrt{2}\pi r^2$

$= 4 : 2 : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$

7.13 ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டச் சாயுயரம் 5 செ.மீ ஆகும். அதன் இரு ஆரங்கள் 4 செ.மீ மற்றும் 1 செ.மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

l, R மற்றும் r ஆகியவை முறையே இடைக்கண்டத்தின் சாயுயரம், மேற்புற மற்றும் கீழ்ப்புற ஆரங்கள் என்க.

இங்கு l = 5 செ.மீ, R = 4 செ.மீ, r = 1 செ.மீ

இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு

$= \pi (R + r)l$ ச.அ

$= \frac{22}{7} \times (4 + 1) \times 5$

$= \frac{550}{7}$

ஆகவே, இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு
= 78.57 ச.செ.மீ

7.14 ஒரு தொழிற்சாலையின் உலோக வாளி, கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் உள்ளது. அதன் மேற்புற, அடிப்புற விட்டங்கள் முறையே 10 மீ மற்றும் 4 மீ ஆகும். அதன் உயரம் 4 மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



இங்கு h, l, R மற்றும் r என்பன முறையே இடைக்கண்டத்தின் உயரம், சாயுயரம், மேற்புற மற்றும் அடிப்புற வட்டத்தின் ஆரங்கள் என்க.

இங்கு மேல் விட்டம் = 10 மீ;

R = 5 மீ

கீழ் விட்டம் = 4 மீ r = 2 மீ,

உயரம் h = 4 மீ

சாயுயரம், $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ அ

$= \sqrt{4^2 + (5 - 2)^2}$

$l = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ மீ

வளைபரப்பு $= \pi(R + r)l$ ச.அ

$= \frac{22}{7}(5 + 2) \times 5 = 110$ மீ²

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= [\pi (R + r) l + \pi R^2 + \pi r^2]$ ச.அ

$= \frac{22}{7}\left[(5 + 2)5 + 25 + 4\right]$

$= \frac{1408}{7} = 201.14$

ஆகவே, வளைபரப்பு = 110 மீ² மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பு = 201.14 மீ².

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு _____ ஐ, அதன் _____ மைய அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றுவதன் மூலம் ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையைப் பெறலாம்.
விடை: செவ்வகம், ஒரு பக்கத்தை.

2. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் அச்சு அதன் விட்டத்துக்கு _____ அமையும்.
விடை: செங்குத்தாக.

3. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தபுறப்பரப்பு மற்றும் வளைபரப்பிற்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் _____ ஆகும்.
விடை: $2\pi r^2$, அதாவது இரு வட்டங்களின் பரப்பளவு.

4. சமமான ஆரமும் உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு அதன் அடிப்பரப்பைப்போல் _____ ஆக இருக்கும்.
விடை: இரு முறை (அல்லது) இரு மடங்கு.

5. ஒரு _____ ஐ, அதன் _____ஐ மைய அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றுவதன் மூலம் ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பினைப் பெறலாம்.
விடை: செங்கோண முக்கோணம், செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களில் ஒன்று

6. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் அச்சு அதன் விட்டத்துக்கு _____ அமையும்.
விடை: செங்குத்தாக

7. ஒரு கூம்பின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பு ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் _____.
விடை: πr^2, அதாவது அடித்தளத்தின் பரப்பளவு

8. ஒரு வட்டக்கோணப்பகுதி கூம்பாக மாறும்போது ஏற்படும் மாற்றங்களைச் சரியாகப் பொருத்துக.
விடை:

வட்டக்கோணப் பகுதி	கூம்பு
ஆரம்	சாயுயரம்
பரப்பு	வளைபரப்பு
வில்லின் நீளம்	அடிப்புறச் சுற்றளவு

9. கோளத்தின் ஒவ்வொரு தளக் குறுக்கு வெட்டும், ஒரு _____ ஆகும்.
விடை: வட்டம்.

10. மீப்பெரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி, கோளத்தின் _____ ஆகும்.
விடை: விட்டம்.

11. ஓர் அரைக் கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பிற்கும் வளைபரப்பிற்கும் இடையேயான வித்தியாசம்_____ ஆகும்.
விடை: πr^2, அதாவது வட்டத்தின் பரப்பு.

12. ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு ஆகியவற்றின் விகிதமானது _____ ஆகும்.
விடை: 3 : 2

13. ஒரு கோளத்தை அதன் மீப்பெரு வட்டம் வழியாக ஒரு தளம் வெட்டும்போது கிடைக்கும் ஒரு பகுதியை _____ என்கிறோம்.
விடை: அரைக்கோளம்.

14. இரு இணை தளங்களால் வெட்டப்படும் கூம்பின் ஒரு பகுதியை _____ எனலாம்.
விடை: கூம்பின் இடைக் கண்டம்.

15. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பில் எத்தனை இடைக்கண்டங்கள் உள்ளன?
விடை: ஒன்றே ஒன்று.

சிந்தனைக் களம்

1. ஓர் அலகு தடிமனும், r அலகுகள் ஆரமும் கொண்ட 'h' வட்ட வில்லைகளை ஒன்றின் மீது ஒன்றாக அடுக்கும்போது தோன்றும் திண்ம உருவத்தின் வடிவம் என்ன? அதன் வளைபரப்பைக் காண்க.
விடை: இங்கு திண்ம உருவம் என்பது ஓர் உருளை
ஆரம் = r
உயரம் = $h \times 1 = h$
வளைபரப்பு = $2\pi rh$ சதுர அலகுகள்

2. ஓர் உருளையின் ஆரம் அதன் உயரத்தின் இரு மடங்கு எனில், வளைபரப்பிற்கும் அடிப்புறப் பரப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்க.
விடை:
ஆரம் உயரத்தைப் போல் இரு மடங்கு $r = 2h$
வளைபரப்பு = $4\pi h^2 = 2\pi (2h)h$
அடிப்பரப்பு = $4\pi h^2 = \pi(2h)^2$
வளைபரப்பு = அடிப்பரப்பு

3. 12 மீ நீளம் 5 மீ அகலமும் கொண்ட இரண்டு செவ்வக வடிவ அலுமினியத் தாள்களை, ஒன்று நீளத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டும், மற்றொன்று அகலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டும் சுழற்றுவதன் மூலம் இரு நேர்வட்ட உருளைகள் உருவாக்கப்படுகின்றன எனில் அவற்றின் வளைபரப்புகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.
விடை:
வளைபரப்புகளின் விகிதம் $= \dfrac{2\pi r(12)}{2\pi r(5)} = \dfrac{12}{5} = 12:5$

4. நீங்கள் அன்றாடம் பயன்படுத்தும் திண்ம கூம்பு வடிவப்பொருட்கள் சிலவற்றைக் குறிப்பிடுக.
விடை: ஐஸ்கிரீம் கூம்பு (அ) பனிக்கூழ் கூம்பு

5. சம ஆரத்தையும், உயரத்தையும் கொண்ட ஒரு கூம்பின் புறப்பரப்பை ஆரத்தின் வழியே எழுதுக.
விடை:
$h = r$,
$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$
புறப்பரப்பு = $\pi r(l + r)$
$= \pi r\left(\sqrt{2}r + r\right)$
$= \pi r^2\left(\sqrt{2} + 1\right)$

6. மேலே கூறப்பட்ட பரப்பைக் கூம்பின் அடிப்புறப் பரப்புடன் ஒப்பிடுக.
விடை:
கூம்பின் அடிப்பரப்பு = πr^2
(5) ன் படி கூம்பின் புறப்பரப்பு
$= \left(\sqrt{2} + 1\right)\pi r^2 = \left(\sqrt{2} + 1\right)$ மடங்கு அதிகம்.

7. ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு 36π ச.அலகுகள் எனில், ஆரத்தின் மதிப்பைக் காண்க.
விடை:
புறப்பரப்பு = 36π
$4\pi r^2 = 36\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

8. ஒரு கோளத்தில் எத்தனை மீப்பெரு வட்டங்கள் உள்ளன?
விடை: இரு வட்டங்கள்

9. பூமியின் விட்டம் 12756 கி.மீ எனில், அதன் புறப்பரப்பைக் காண்க.
விடை:
பூமியின் விட்டம் = 12756 கி.மீ
ஆரம் $r = \dfrac{12756}{2} = 6378$ கி.மீ

$$\text{புறப்பரப்பு} = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times (6378)^2$$
$$= \frac{3579741792}{7}$$
$$= 511391684.571 \text{ ச. கி.மீ}$$

10. ஒரு கோளத்தை அதன் சிறிய வட்டம் வழியே ஒரு தளத்தைக் கொண்டு வெட்டும்போது அரைக்கோளம் கிடைக்குமா?

விடை: இல்லை, கோளத்தை அதன் சிறிய வட்டம் வழியே வெட்டும்போது அரைக்கோளம் கிடைக்காது.

11. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு, அதன் அடிப்பரப்பின் எத்தனை மடங்காகும்?

விடை: 3 மடங்கு.

12. ஒரு கோளத்திலிருந்து எத்தனை அரைக்கோளங்கள் கிடைக்கும்?

விடை: 2 அரைக்கோளங்கள்.

13. கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவிலான ஏதேனும் இரு பொருட்களைக் குறிப்பிடுக.

விடை: வாளி, மேசை விளக்கு.

14. ஓர் அரைக்கோளத்தைக் கோளத்தின் இடைக் கண்டமாகக் கருத முடியுமா?

விடை: இல்லை.

பயிற்சி 7.1

1. ஓர் உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரங்களின் விகிதம் 5 : 7 ஆகும். அதன் வளைபரப்பு 5500 ச.செ.மீ எனில், உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப.: உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் ஆகியன 5 : 7 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன.

அதாவது $\frac{r}{h} = \frac{5}{7} \Rightarrow h = \frac{7r}{5}$

வளைபரப்பு = 5500 சதுர செ.மீ

$2\pi rh = 5500$

$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r \times \frac{7r}{5} = 5500$

$\Rightarrow r^2 = \frac{5500 \times 5}{2 \times 22}$

$\Rightarrow r^2 = 625 \Rightarrow r = 25$

$\therefore h = \frac{7(25)}{5} = 35$

ஆரம் = 25 செ.மீ; உயரம் = 35 செ.மீ

2. ஒரு திண்ம இரும்பு உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 1848 ச.மீ மேலும் அதன் வளைபரப்பு, மொத்தப் புறப்பரப்பில் ஆறில் ஐந்து பங்காகும் எனில், இரும்பு உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காணவும்.

தீர்வு :

கொ.ப.: உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = 1848 ச.மீ

அதாவது, $2\pi r\ (h + r) = 1848$

கொ.ப: வளைபரப்பு $= \frac{5}{6}$ (மொத்தப்புறப்பரப்பு)

வளைபரப்பு $= \frac{5}{6}(1848) = 1540$

வளைபரப்பு $= \frac{5}{6}$ (மொத்தப்புறப்பரப்பு)

$\Rightarrow 2\pi rh = \frac{5}{6}(2\pi r\ (h + r))$

$\Rightarrow h = 5r$

வளைபரப்பு = 1540

$2\pi rh = 1540$

$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 5r = 1540$

$r^2 = \frac{1540 \times 7}{44 \times 5} = 49$

$r = 7$

$\therefore h = 5r = 5(7) = 35$

ஆரம் = 7 மீ; உயரம் = 35 மீ

3. ஓர் உள்ளீடற்ற மர உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் மற்றும் நீளம் முறையே 16 செ.மீ மற்றும் 13 செ.மீ ஆகும். அதன் தடிமன் 4 செ.மீ எனில் உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு எவ்வளவு?

தீர்வு :

உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் R = 16 செ.மீ

நீளம் h = 13 செ.மீ

தடிமன் R – r = 4

$\Rightarrow 16 - r = 4$

$r = 12$ செ.மீ

உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2\pi (R+r)(R-r+h)$ ச. அலகுகள்

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (16 + 12)(4 + 13)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \times 17$

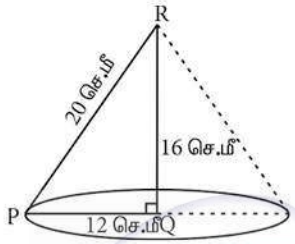
$= 2992$ ச. செ.மீ

4. PQR என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் QR = 16 செ.மீ, PR = 20 செ.மீ மற்றும் $\angle Q = 90^\circ$ ஆகும். QR மற்றும் PQ -ஐ மைய அச்சுகளாகக் கொண்டு சுழற்றும்போது உருவாகும் கூம்புகளின் வளைபரப்புகளை ஒப்பிடுக.

தீர்வு :

செங்கோண முக்கோணம் PQR- ல் Q என்பது செங்கோணம் மற்றும்
PR = 20 செ.மீ, QR = 16 செ.மீ எனவும் உள்ளது.

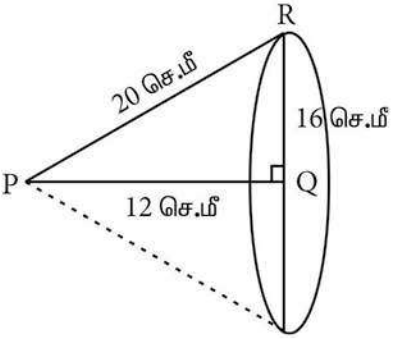
$$\therefore PQ^2 = PR^2 - QR^2$$
$$= (20)^2 - (16)^2$$
$$= 400 - 256 = 144$$
$$\therefore PQ = 12 \text{ செ.மீ}$$



PQR என்ற செங்கோண முக்கோணத்தை, QR –ஐப் பொருத்து சுற்றும்போது PQ = 12 செ.மீ என்பதை ஆரமாகவும், PR = 20 செ.மீ என்பதை சாயுயரமாகவும் கொண்ட கூம்பு உருவாகிறது.

கூம்பின் வளைபரப்பு
$= \pi rl$ சதுர அலகுகள்
$= \frac{22}{7} \times 12 \times 20 = 754.29$ செ.மீ^{2}

PQR என்ற செங்கோண முக்கோணத்தை PQ –ஐப் பொறுத்து சுற்றும்போது QR = 16 செ.மீ என்பதை ஆரமாகவும், PR = 20 செ.மீ என்பதை சாயுயரமாகவும் கொண்ட கூம்பு உருவாகிறது.

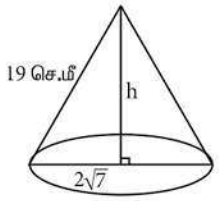


கூம்பின் வளைபரப்பு= πrl சதுர அகுகள்
$= \frac{22}{7} \times 16 \times 20 = 1005.71$ செ.மீ^{2}

எனவே, PQ ஐப் பொருத்து சுற்றும்போது உருவாகும் கூம்பின் வளைபரப்பு அதிகமாகும்.

5. சாயுயரம் 19 செ.மீ கொண்ட கூம்பு வடிவக் கூடாரத்தில் நால்வர் உள்ளனர். ஒருவருக்கு 22 ச.செ.மீ பரப்பு தேவை எனில், கூடாரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு :



ஒவ்வொரு நபருக்கும் 22 செ.மீ^{2} பரப்பளவு தேவைப்படுகிறது.

$\therefore$ தேவைப்படும் பரப்பளவு = $22 \times 4 = 88$ செ.மீ^{2}

$\Rightarrow \quad \pi r^2 = 88$

$$r^2 = \frac{88 \times 7}{22} = 4 \times 7$$
$$r = 2\sqrt{7} \text{ செ.மீ}$$

சாயுயரம் = 19 செ.மீ

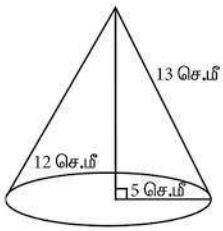
$\therefore$ கூடாரத்தின் உயரம்

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$
$$= \sqrt{(19)^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2}$$
$$= \sqrt{361 - 28} = \sqrt{330} \simeq 18.25 \text{ செ.மீ}$$

$\therefore$ கூடாரத்தின் உயரம் = 18.25 செ.மீ

6. ஒரு சிறுமி தனது பிறந்த நாளைக் கொண்டாடக் கூம்பு வடிவத் தொப்பிகளை 5720 ச.செ.மீ பரப்புள்ள காகிதத்தாளை பயன்படுத்தித் தயாரிக்கிறாள். 5 செ.மீ ஆரமும், 12 செ.மீ உயரமும் கொண்ட எத்தனை தொப்பிகள் தயாரிக்க முடியும்?

தீர்வு :



காகிதத்தாளின் பரப்பு = 5720 செ.மீ^{2}
தொப்பியின் ஆரம் r = 5 செ.மீ
தொப்பியின் உயரம் h = 12 செ.மீ

$\therefore$ சாயுயரம் $l = \sqrt{h^2 + r^2}$
$= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25}$
$= \sqrt{169} = 13$ செ.மீ

கூம்பு வடிவத் தொப்பியின் வளைபரப்பு = πrl ச.அ
$= \frac{22}{7} \times 5 \times 13 = \frac{1430}{7}$

∴ தொப்பிகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{காகிதத்தாளின் பரப்பு}}{\text{கூம்பு வடிவத் தொப்பியின் வளைபரப்பு}}$$

$$= \frac{5720}{1430} \times 7 = 28 \text{ தொப்பிகள்}$$

7. சம உயரங்களையுடைய இரு நேர்வட்டக் கூம்புகளின் ஆரங்கள் 1 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. கூம்புகளின் உயரம் சிறிய கூம்பின் ஆரத்தின் மூன்று மடங்கு எனில், வளைபரப்புகளின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு :

இரு கூம்புகளின் ஆரங்களை r_1, r_2 எனவும் உயரங்களை h_1, h_2 எனவும் கொள்க.

கொ.ப.: ஆரங்களின் விகிதம் $= \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad r_1 = \frac{r_2}{3}$$

மற்றும் $h_1 = 3r_1, h_2 = 3r_1$

[$\because r_1$ என்பது சிறிய கூம்பின் ஆரம்]

சாயுயரங்கள் $l_1 = \sqrt{h_1^2 + r_1^2}$

$$= \sqrt{9r_1^2 + r_1^2} = \sqrt{10}\ r_1$$

$$l_2 = \sqrt{h_2^2 + r_2^2} = \sqrt{9r_1^2 + 9r_1^2}$$

$$= \sqrt{18r_1^2} = 3\sqrt{2}\ r_1$$

வளைபரப்புகளின் விகிதம்

$$= \frac{\text{முதல் கூம்பின் வளைபரப்பு}}{\text{2-வது கூம்பின் வளைபரப்பு}}$$

$$= \frac{\pi r_1 l_1}{\pi r_2 l_2} = \frac{r_1\left(\sqrt{10}\ r_1\right)}{(3r_1)\left(3\sqrt{2}\ r_1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{9}$$

வளைபரப்புகளின் விகிதம் = $\sqrt{5} : 9$

8. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 25% அதிகரிக்கும்போது, அதிகமாகும் புறப்பரப்பின் சதவீதம் காண்க.

தீர்வு :

கோளத்தின் ஆரத்தை 'r' செ.மீ என்க.

புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2$

ஆரத்தை 25% அதிகரிக்கும்போது, அதன் புதிய விட்டம் $= r + 25\%\ (r)$

$$= r + \frac{25\ r}{100} = \frac{5r}{4}$$

புதிய கோளத்தின் புறப்பரப்பு

$$= 4\pi\left(\frac{5r}{4}\right)^2$$

$$= 4\pi\left(\frac{25r^2}{16}\right)$$

$$= \frac{25\ \pi r^2}{4}$$

புறப்பரப்பின் அதிகம் $= \frac{25\ \pi r^2}{4} - 4\pi r^2$

$$= \frac{25\pi r^2 - 16\pi r^2}{4}$$

$$= \frac{9\pi r^2}{4}$$

∴ அதிகமாகும் புறப்பரப்பின் சதவீதம்

$$= \frac{9\pi r^2 / 4}{4\pi r^2} \times 100\%$$

$$= \frac{900}{16}\% = 56.25\%$$

9. உள்ளீடற்ற ஓர் அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்திற்கு ஒரு சதுர செ.மீ -க்கு வர்ணம் பூச ₹ 0.14 வீதம் செலவாகும். அதன் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற விட்டங்கள் முறையே 20 செ.மீ மற்றும் 28 செ.மீ எனில், அதனை முழுமையாக வர்ணம் பூச எவ்வளவு செலவாகும்?

தீர்வு :

உட்புற விட்டம் = 20 செ.மீ

வெளிப்புற விட்டம் = 28 செ.மீ

உட்புற ஆரம் = 10 செ.மீ

வெளிப்புற ஆரம் = 14 செ.மீ

மொத்தப்புறப்பரப்பு = $\pi\ (3R^2 + r^2)$

சதுர அலகுகள்

$$= \frac{22}{7}\ (3(14)^2 + (10)^2)$$

$$= \frac{22}{7}\ [588 + 100]$$

$$= \frac{22}{7} \times 688$$

$$= \frac{15136}{7} \text{ செ.மீ}^2$$

ஒரு சதுர செ.மீ க்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு = ₹ 0.14

∴ மொத்தச் செலவு $= \frac{15136}{7} \times 0.14$

$= ₹\ 302.72$

10. ஒரு மேஜை விளக்கின் வெளிப்புறத்திற்கு (மேல்பகுதியுடன்) மட்டும் வர்ணம் பூசப்படுகிறது. 1 ச.செ.மீ வர்ணம் பூச ₹ 2 செலவாகுமெனில் விளக்கிற்கு வர்ணம் பூசுவதற்கான மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக.



தீர்வு :

படத்திலிருந்து $r = 6$ செ.மீ

$R = 12$ செ.மீ

$h = 8$ செ.மீ

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + (12 - 6)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 36}$$

$$= \sqrt{100} = 10 \text{ செ.மீ}$$

வர்ணம் பூச வேண்டிய பரப்பு = வளைபரப்பு + மேற்புற வட்டப் பகுதியின் பரப்பு

$$= \pi(R + r)l + \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7}(12 + 6)(10) + \frac{22}{7}(6)^2$$

$$= \frac{22}{7}(180) + \frac{22}{7}(36)$$

$$= \frac{22}{7}(180 + 36)$$

$$= \frac{22}{7}(216)$$

$$= \frac{4752}{7} \simeq 678.86$$

ஒரு சதுர செ.மீ க்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு = ₹ 2

∴ மொத்தச் செலவு = 678.86×2

= ₹ 1357.72

கன அளவு

நினைவில் கொள்க

ஒரு பொருள் ஆக்கிரமித்துள்ள வெளியின் அளவே அதன் கனஅளவு எனப்படும். கன அளவை 'கன அலகுகள்' எனும் அலகால் குறிக்கிறோம்.

- உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ கன அலகுகள்
- உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு = $\pi(R^2 - r^2)h$ கன அலகுகள்
- கூம்பின் கன அளவு = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன அலகுகள்
- கோளத்தின் கன அளவு = $\frac{4}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்
- உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கன அளவு = $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ கன அலகுகள்
- திண்ம அரைக்கோளத்தின் கன அளவு = $\frac{2}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்
- உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கன அளவு = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ கன அலகுகள்
- இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு = $\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ கன அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு

7.15 உயரம் 2 மீ மற்றும் அடிப்பரப்பு 250 ச.மீ கொண்ட ஓர் உருளையின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு :

உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே r மற்றும் h என்க.

இங்கு, உயரம் h = 2 மீ, அடிப்பரப்பு = 250 ச.மீ

உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ க.அ

= அடிப்பரப்பு × h

= $250 \times 2 = 500$ மீ^{3}

எனவே, உருளையின் கனஅளவு = 500 க.மீ

7.16 ஓர் உருளை வடிவ தண்ணீர் தொட்டியின் கன அளவு 1.078×10^6 லிட்டர் ஆகும். தொட்டியின் விட்டம் 7 மீ எனில், அதன் உயரம் காண்க.

தீர்வு :

r மற்றும் h என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

தொட்டியின் கன அளவு = $1.078 \times 10^6 = 1078000$ லி

= 1078 மீ^{3}

(ஏனெனில் 1 லிட்டர் = $\frac{1}{1000}$ மீ^{3})

இங்கு, விட்டம் = 7 மீ எனில், ஆரம் = $\frac{7}{2}$ மீ

தொட்டியின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ க.அ

$$1078 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times h \Rightarrow h = 28$$

ஆகவே, தொட்டியின் உயரம் 28 மீ ஆகும்.

7.17 ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே 9 செ.மீ, 21 செ.மீ மற்றும் 28 செ.மீ ஆகும். உருளையை உருவாக்கத் தேவைப்படும் இரும்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற ஆரம் மற்றும் வெளிப்புற ஆரம் முறையே h, r மற்றும் R என்க.

இங்கு, r = 21செ.மீ, R = 28 செ.மீ, h = 9 செ.மீ

உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு

= $\pi (R^2 - r^2)h$ க.அ

= $\frac{22}{7}(28^2 - 21^2) \times 9$

= $\frac{22}{7}(784 - 441) \times 9 = 9702$

ஆகவே, தேவையான இரும்பின் கன அளவு

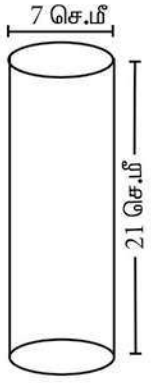
= 9402 க.செ.மீ

7.18 படத்தில் உள்ள உருளை A மற்றும் B -ல்

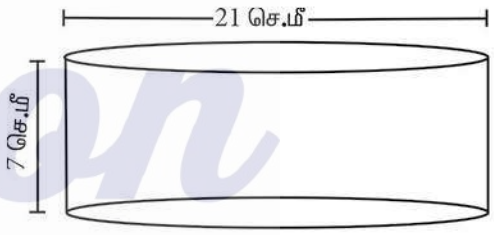
(i) எந்த உருளையின் கன அளவு அதிகமாக இருக்கும்?

(ii) அதிகக் கன அளவு கொண்ட உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பு அதிகமாக இருக்குமா எனச் சோதிக்க.

(iii) உருளை A மற்றும் B -ன் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க.



உருளை A



உருளை B

தீர்வு :

(i) உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ க.அ

உருளை A -ன் கன அளவு

= $\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 21 = 808.5$ செ.மீ^{3}

உருளை B -ன் கன அளவு

= $\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} \times 7 = 2425.5$ செ.மீ^{3}

ஆகவே, உருளை B -ன் கன அளவு உருளை A-ன் கன அளவை விட அதிகம் ஆகும்.

(ii) உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

= $2\pi r (h + r)$ ச.அ

உருளை A -ன் மொத்தப் புறப்பரப்பு

= $2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times (21 + 3.5)$ செ.மீ^{2}

= 539 செ.மீ^{2}

உருளை B -ன் மொத்தப் புறப்பரப்பு

= $2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times (7 + 10.5)$

= 1155 செ.மீ^{2}

ஆகவே, கன அளவு அதிகம் கொண்ட உருளை B -ன் மொத்தப் புறப்பரப்பு அதிகமாக உள்ளது.

(iii) $\frac{\text{உருளை } A \text{ – ன் கன அளவு}}{\text{உருளை } B \text{ – ன் கன அளவு}}$

$= \frac{808.5}{2425.5} = \frac{1}{3}$

ஆகவே, உருளை A மற்றும் B-ன் கன அளவுகளின் விகிதம் 1 : 3.

7.19 ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் கன அளவு 11088 க.செ.மீ ஆகும். கூம்பின் உயரம் 24 செ.மீ எனில், அதன் ஆரம் காண்க.

தீர்வு :

கூம்பின் உயரம் மற்றும் ஆரம் h மற்றும் r என்க.
இங்கு,
h = 24 செ.மீ, கன அளவு = 11088 க.செ.மீ

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 11088$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 24 = 11088$$

$$r^2 = 441$$

ஆகவே, கூம்பின் ஆரம் r = 21 செ.மீ

7.20 இரு கூம்புகளுடைய கன அளவுகளின் விகிதம் 2 : 3 ஆகும். இரண்டாம் கூம்பின் உயரம் முதல் கூம்பின் உயரத்தைப் போல் இரு மடங்கு எனில், அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதம் காண்க

தீர்வு :

r_1 மற்றும் h_1 என்பன முதல் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. r_2 மற்றும் h_2 என்பன இரண்டாம் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு $h_2 = 2h_1$ மற்றும்

$$\frac{\text{முதல் கூம்பின் கன அளவு}}{\text{இரண்டாம் கூம்பின் கன அளவு}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} \times \frac{h_1}{2h_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ஆகவே, ஆரங்களின் விகிதம் = $2 : \sqrt{3}$

7.21 ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கன அளவு 29106 க.செ.மீ. மூன்றில் இரண்டு பங்கு கன அளவுள்ள மற்றோர் அரைக்கோளம் இதிலிருந்து செதுக்கப்படுமானால் புதிய அரைகோளத்தின் ஆரம் என்ன?

தீர்வு :

r என்பது செதுக்கப்பட்ட அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்க.

அரைக்கோளத்தின் கன அளவு = 29106 க.செ.மீ
புதிய அரைக்கோளத்தின் கன அளவு

$= \frac{2}{3} \times$ (முந்தைய அரைக்கோளத்தின் கன அளவு)

$= \frac{2}{3} \times 29106$

புதிய அரைக்கோளத்தின் கன அளவு

= 19404 க.செ.மீ

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 19404$$

$$r^3 = \frac{19404 \times 3 \times 7}{2 \times 22} = 9261$$

$$r = \sqrt[3]{9261} = 21 \text{ செ.மீ}$$

ஆகவே, புதிய அரைக்கோளத்தின் ஆரம் 21 செ.மீ ஆகும்.

7.22 ஓர் உள்ளீடற்ற பித்தளை கோளத்தின் உள்விட்டம் 14 செ.மீ, தடிமன் 1 மி.மீ மற்றும் பித்தளையின் அடர்த்தி 17.3 கிராம்/க.செ.மீ எனில், கோளத்தின் எடையைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

r, R என்பன முறையே உள்ளிடற்ற கோளத்தின் உள் ஆரம் மற்றும் வெளி ஆரம் என்க.
இங்கு, உள்விட்டம் d = 14 செ.மீ
உள்ஆரம் r = 7 செ.மீ

$$\text{தடிமன்} = 1 \text{ மி.மீ} = \frac{1}{10} \text{ செ.மீ}$$

$$\text{வெளிஆரம் } R = 7 + \frac{1}{10} = \frac{71}{10} = 7.1 \text{ செ.மீ}$$

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கன அளவு

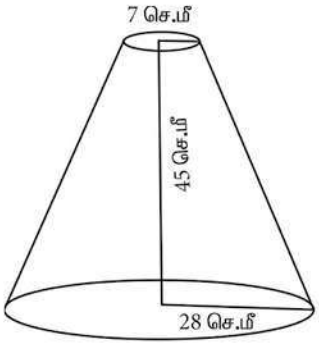
$$= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) \text{ க. அ}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} (357.91 - 343) = 62.48 \text{ க.செ.மீ}$$

ஆனால் 1 க.செ.மீ பித்தளையின் எடை = 17.3 கி
மொத்த எடை = 17.3 × 62.48 = 1080.90 கி.
எனவே, மொத்த எடை = 1080.90 கிராம் ஆகும்.

7.23 45 செ.மீ உயரமுள்ள ஓர் இடைக்கண்டத்தின் இரு புற ஆரங்கள் முறையே 28 செ.மீ மற்றும் 7 செ.மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :



இடைக்கண்டத்தின் உயரம் h எனவும் அதன் இருபுற ஆரங்கள் R மற்றும் r எனவும் கொள்க.
இங்கு, h = 45 செ.மீ, R = 28 செ.மீ, r = 7 செ.மீ
எனவே, இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3}\pi\, h\,[R^2 + Rr + r^2] \text{ க.அ}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times [28^2 + (28 \times 7) + 7^2] \times 45$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 1029 \times 45 = 48510$$

எனவே இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு
= 48510 க.செ.மீ

முன்னேற்றச் சோதனை

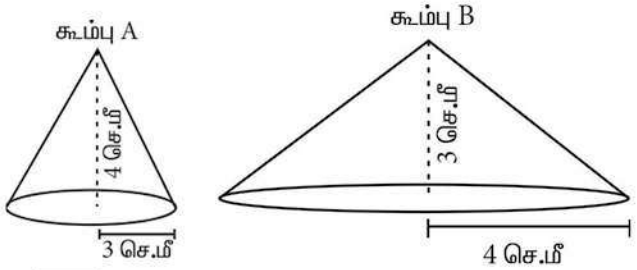
1. ஒரு கூம்பின் கன அளவு என்பது அதன் அடிப்புறப்பரப்பு மற்றும் _____ ன் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

விடை: $\frac{1}{3}$ மடங்கு உயரம்

2. ஒரு கூம்பின் ஆரம் இரு மடங்கானால் அதன் கனஅளவு _____மடங்காகும்.

விடை: 4 மடங்கு

3. படத்தில் உள்ள கூம்புகளைக் கருதுக.



(i) கணக்கீடுகள் செய்யாமல் எந்தக் கூம்பின் கன அளவு அதிகம் எனக் காண்க

(ii) அதிகக் கன அளவு உடைய கூம்பின் புறப்பரப்பு அதிகம் என்பதைச் சரிபார்க்க.

(iii) கூம்பு A-ன் கன அளவு : கூம்பு B -ன் கன அளவு = ?

விடை:

(i) கூம்பு B –ன் ஆரம் அதிகம் என்பதால் அதன் கன அளவும் அதிகமாகும்.

(ii) கூம்பு Aன் கன அளவு கூம்பு B ன் கன அளவு

$= \frac{1}{3}\pi(3)^2(4)$ $= \frac{1}{3}\pi(4)^2(3)$

$= 12\ \pi$ $= 16\ \pi$

கூம்பு A ன் புறப்பரப்பு	**கூம்பு B –ன் புறப்பரப்பு**
மொத்தப் புறப்பரப்பு	மொத்தப் புறப்பரப்பு
$= \pi r\,(l + r)$	$= \pi(4)\,(5 + 4)$
$= \pi(3)\,(5 + 3)$	$= 36\ \pi$
$= 24\ \pi$	

கூம்பு B ன் புறப்பரப்பு > கூம்பு A –ன் புறப்பரப்பு

(iii) $\frac{\text{கூம்பு } A \text{ ன் கன அளவு}}{\text{கூம்பு } B \text{ ன் கன அளவு}} = \frac{12\ \pi}{16\ \pi} = 3 : 4$

4. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு ஆகியவற்றின் விகிதம் என்ன?

விடை: $\frac{\text{கோளத்தின் கனஅளவு}}{\text{கோளத்தின் புறப்பரப்பு}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = r : 3.$

5. ஓர் அரைக்கோளத்தின் உயரம் மற்றும் ஆரத்திற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு _____ ஆகும்.

விடை: உயரம் = ஆரம்

6. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு என்பது அதன் புறப்பரப்பு மற்றும் _____ ன் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

விடை: ஆரத்தின் மூன்றில் ஒரு பங்கு

சிந்தனைக் களம்

1. ஓர் உருளையின் உயரம் அதன் ஆரத்தின் வர்க்கத்தோடு எதிர் விகிதத் தொடர்பு உடையது எனில், அதன் கன அளவு _____ ஆகும்.

விடை: உயரம் $\alpha \frac{1}{(\text{ஆரம்})^2}$

உயரம் $= k\left(\frac{1}{(\text{ஆரம்})^2}\right)$ [$\because$ k – மாறிலி]

கன அளவு $= \pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(\frac{k}{r^2}\right) = k\pi$

2. 'r' ஆரமும் 'h' உயரமும் உடைய ஒரு உருளையின் கன அளவை, அதன்
(அ) ஆரம் பாதியாகும்போது காண்க.
(ஆ) உயரம் பாதியாகும்போது காண்க.

விடை: (அ) ஆரம் பாதியாகும்போது, ஆரம் $\frac{r}{2}$, உயரம் h

கன அளவு $= \pi r^2 h = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 h = \frac{\pi r^2 h}{4}$

$= \frac{1}{4}$ (உண்மையான உருளையின் கனஅளவு)

(ஆ) உயரம் பாதியாகும்போது, அதன் உயரம் $= \frac{h}{2}$

கன அளவு $= \pi r^2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\pi r^2 h}{2}$

$= \frac{1}{2}$ (உண்மையான உருளையின் கனஅளவு).

3. கீழ்க்கண்டவைகள் சமமாக அமையுமாறு ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பைக் காண முடியுமா?
(i) உயரம் மற்றும் சாயுயரம்
(ii) ஆரம் மற்றும் சாயுயரம்
(iii) உயரம் மற்றும் ஆரம்

விடை:

(i) உயரம் = சாயுயரம்
அதாவது, $h = l \Rightarrow$ கூம்பு சாத்தியமல்ல

(ii) $r = l \Rightarrow$ கூம்பு சாத்தியமல்ல

(iii) $h = r \Rightarrow$ கூம்பு சாத்தியமானது

4. இரு கூம்புகளின் கன அளவுகள் சமம் எனில், அவற்றின் ஆரம் மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றின் விகிதம் காண்க.

விடை: ஆரங்களின் விகிதமும் உயரங்களின் விகிதமும் ஒன்றானது.

5. ஒரு கூம்பு, ஓர் அரைக்கோளம் மற்றும் ஓர் உருளை ஆகியவற்றின் அடிப்புறப் பரப்புகள் சமம் ஆகும். உருளை மற்றும் கூம்பின் உயரங்கள் ஆரத்துக்குச் சமம் எனில், இவை மூன்றின் கன அளவுகள் சமமா?

விடை: இல்லை.

6. கோளம் மற்றும் அரைக்கோள வடிவில் உள்ள ஏதேனும் இரு பொருட்களைக் குறிப்பிடுக.

விடை: கோளம் – பூமிப்பந்து, பந்து
அரைக்கோளம் – மூளையின் இடது பக்கம்

7. ஒரு கோளத்தின் மீப்பெரு வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் தளம் கோளத்தை _____ பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்.

விடை: இரண்டு பகுதிகள்.

8. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு ஆகியவை சம அளவில் இருக்குமெனில், கோளத்தின் ஆரம் _____.

விடை: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \Rightarrow r = 3.$

9. ஒரு கூம்பின் இடைக் கண்டத்தின் கன அளவைக் கொண்டு முழுக் கூம்பின் கன அளவைக் காண முடியுமா?

விடை: சாத்தியமற்றது.

பயிற்சி 7.2

1. 10 மீ உட்புற விட்டம் மற்றும் 14 மீ ஆழம் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவக் கிணற்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மண் கொண்டு 5 மீ அகலத்தில் கிணற்றைச் சுற்றி மேடை அமைக்கப்படுகிறது எனில், மேடையின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

கிணற்றின் ஆரம் = 5மீ
கிணற்றின் ஆழம் = 14 மீ

எடுக்கப்பட்ட மண்ணின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times (5)^2 \times 14 = 1100$ மீ^{3}

எடுக்கப்பட்ட மண்ணைக் கொண்டு கிணற்றைச் சுற்றி உள்ளீடற்ற உருளை வடிவத்தில் மேடை அமைக்கப்படுகிறது.

உட்புற ஆரம் = 5 மீ

மேடையின் அகலம் = 5 மீ

$\therefore$ வெளிப்புற ஆரம் = 5 + 5 = 10 மீ

உயரம் = h

உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு

$= \pi h\,(R^2 - r^2)$

$\therefore \quad \pi h\,(R^2 - r^2) = 1100$

$\frac{22}{7} \times h\,(10^2 - 5^2) = 1100$

மேடையின் உயரம்

$h = \frac{1100 \times 7}{22 \times 75} = 4.67$ மீ

2. விட்டம் 20 செ.மீ உள்ள ஓர் உருளை வடிவக் கண்ணாடிக் குவளையில் 9 செ.மீ உயரத்திற்கு நீர் உள்ளது. ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் உயரம் 4 செ.மீ உடைய ஓர் சிறிய உலோக உருளை, நீரில் முழுமையாக மூழ்கும்போது ஏற்படும் நீரின் உயர்வைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

கண்ணாடிக் குவளையின் விட்டம் = 20 செ.மீ

∴ ஆரம் = 10 செ.மீ

தண்ணீர் உள்ள உயரம் = 9 செ.மீ

உலோக உருளையின் ஆரம் = 5 செ.மீ

உலோக உருளையின் உயரம் = 4 செ.மீ

வெளியேற்றப்பட்ட நீரின் கன அளவு = உலோக உருளையின் கன அளவு

$$\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$$

$$(10)^2 h_1 = (5)^2 (4)$$

$$h_1 = \frac{100}{100} = 1 \text{ செ.மீ}$$

எனவே, நீரில் ஏற்படும் உயர்வு 1 செ.மீ.

3. 484 செ.மீ சுற்றளவுள்ள ஒரு மரக்கூம்பின் உயரம் 105 செ.மீ எனில், கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப.: சுற்றளவு = 484 செ.மீ

$$2\pi r = 484$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 484$$

$$r = \frac{484 \times 7}{44} = 77 \text{ செ.மீ}$$

உயரம் h = 105 செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 77 \times 77 \times 105$$

$$= 652190 \text{ செ.மீ}^3$$

4. ஆரம் 10 மீட்டரும், உயரம் 15 மீட்டரும் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவக் கொள்கலன் முழுமையாகப் பெட்ரோலால் நிரம்பியுள்ளது. நிமிடத்திற்கு 25 கன மீட்டர் பெட்ரோல் கொள்கலனின் அடிப்புறம் வழியாக வெளியேற்றப்பட்டால் எத்தனை நிமிடங்களில் கொள்கலன் காலியாகும்? விடையை நிமிடத் திருத்தமாகத் தருக.

தீர்வு :

கூம்பு வடிவக் கொள்கலனின் ஆரம் = 10 மீ

கூம்பு வடிவக் கொள்கலனின் உயரம் = 15 மீ

கன அளவு $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 15$$

$$= \frac{11000}{7} \text{ மீ}^3$$

பெட்ரோலானது நிமிடத்திற்கு 25 க.மீ என வெளியேற்றப்படுகிறது.

∴ கொள்கலன் காலியாகத் தேவைப்படும் நேரம்

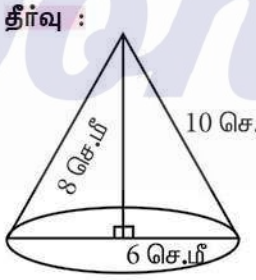
$$= \frac{\frac{11000}{7}}{25}$$

$$= \frac{11000}{7 \times 25} = 62.85$$

≃ 63 நிமிடங்கள் (தோராயமாக)

5. 6 செ.மீ, 8 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அதன் செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களை மைய அச்சுகளாகக் கொண்டு சுழற்றும்போது ஏற்படும் திண்மங்களின் கன அளவுகளின் வித்தியாசம் காண்க.

தீர்வு :



ஒரு செங்கோண முக்கோணம், செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களில் ஒன்றைப் பற்றிச் சுழலும்போது, கூம்பு உருவாகிறது.

இப்போது,

கூம்பின் ஆரம் = 6 செ.மீ

கூம்பின் உயரம் = 8 செ.மீ

சாயுயரம் = 10 செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 8$$

$$= \frac{22 \times 12 \times 8}{7} = 301.71 \text{ செ.மீ}^3$$

இப்போது, செங்கோண முக்கோணம் 8 செ. மீ நீளமுள்ள பக்கத்தைப் பற்றிச் சுழலுகிறது

∴ ஆரம் = 8 செ.மீ

உயரம் = 6 செ.மீ

சாயுயரம் = 10 செ.மீ

கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (8)^2 \times 6$

$= \frac{2816}{7} = 402.29$ செ.மீ^{3}

கன அளவுகளின் வேறுபாடு

$= 402.29 - 301.71$

$= 100.58$ செ.மீ^{3}

6. சம ஆரங்கள் கொண்ட இரு கூம்புகளின் கன அளவுகள் 3600 க.செ.மீ மற்றும் 5040 க.செ.மீ எனில், உயரங்களின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு : r_1, r_2 என்பன இரு கூம்புகளின் ஆரங்கள் என்க.

கொடுக்கப்பட்டது: $r_1 = r_2$ மற்றும் h_1, h_2 என்பன கூம்புகளின் உயரங்கள்.

V_1 = முதல் கூம்பின் கன அளவு

$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{\pi}{3} r_1^2 h_1$

$= 3600$ செ.மீ^{3}

V_2 = 2 –வது கூம்பின் கன அளவு

$= \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = 5040$ செ.மீ^{3}

இப்போது, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3600}{5040} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{3} r_1^2 h_1}{\frac{\pi}{3} r_2^2 h_2} = \frac{3600}{5040}$

$\therefore$ உயரங்களின் விகிதம் $\frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{7} = 5:7$ $[\because r_1 = r_2]$

7. இரு கோளங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் 4:7 எனில், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு :

r_1, r_2 என்பன இரு கோளங்களின் ஆரங்கள் என்க.

கொ.ப: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{7} \Rightarrow r_1 = \frac{4r_2}{7}$

கன அளவுகளின் விகிதம் $= \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}$

$= \frac{\left(\frac{4r_2}{7}\right)^3}{r_2^3} = \frac{4^3}{7^3}$

கன அளவுகளின் விகிதம்

$V_1 : V_2 = 64 : 343$

8. ஒரு திண்மக் கோளம் மற்றும் திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பு சமமானதாக இருக்குமானால் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் $3\sqrt{3} : 4$ என நிரூபி.

தீர்வு :

r_1 , r_2 என்பன முறையே கோளம் மற்றும் அரைக்கோளத்தின் ஆரங்கள் என்க.

கொடுக்கப்பட்டது: கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$4\pi r_1^2 = 3\pi r_2^2$

$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

கன அளவுகளின் விகிதம் : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{2}{3}\pi r_2^3}$

$= 2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

கன அளவுகளின் விகிதம் $= 3\sqrt{3} : 4$

9. ஓர் உள்ளீடற்ற தாமிரக் கோளத்தின் வெளிப்புற, உட்புறப் புறப்பரப்புகள் முறையே 576π ச.செ.மீ மற்றும் 324π ச.செ.மீ எனில், கோளத்தை உருவாக்கத் தேவையான தாமிரத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு :

R, r என்பன முறையே கோளத்தின் வெளிப்புற மற்றும் உட்புற ஆரங்கள் என்க.

கொ.ப: வெளிப்புறப் பரப்பு $= 576\pi$ செ.மீ^{2}

$4\pi R^2 = 576\pi$

$R^2 = 144$

$R = 12$ செ.மீ

உட்புறப் பரப்பு $= 324\pi$ செ.மீ^{2}

$4\pi r^2 = 324\pi$

$r^2 = 81$

$r = 9$ செ.மீ

தேவைப்படும் தாமிரத்தின் கன அளவு

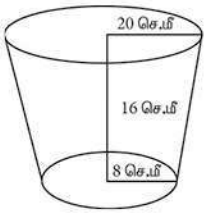
$= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$ கன அலகுகள்

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (12^3 - 9^3)$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 999$$
$$= 4186.285 \simeq 4186.29 \text{ செ.மீ}^3$$

10. உயரம் 16 செ.மீ உடைய ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் அமைந்த கொள்கலன் ஒன்றின் மேற்புறம் திறந்த நிலையில் உள்ளது. கீழ்ப்புற ஆரம் 8 செ.மீ மற்றும் மேற்புற ஆரம் 20 செ.மீ கொண்ட கொள்கலனில் முழுமையாகப் பால் நிரப்பப்படுகிறது. ஒரு லிட்டர் பாலின் விலை ₹ 40 எனில், நிரப்பப்படும் பாலின் மொத்த விலையைக் காண்க.

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்டது: கீழ்ப்புற ஆரம் r = 8 செ.மீ

மேற்புற ஆரம் R = 20 செ.மீ

உயரம் h = 16 செ.மீ

கன அளவு $= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ கன அலகுகள்

$$= \frac{22 \times 16}{7 \times 3}\left((20)^2 + (20)(8) + (8)^2\right)$$
$$= \frac{22 \times 16}{21}[400 + 160 + 64]$$
$$= \frac{22 \times 16}{21}(624)$$
$$= 10459.43 \text{ செ.மீ}^3$$
$$= \frac{10459.43}{1000} \left[\because 1000 \text{ செ.மீ}^3 = 1 \text{ லி}\right]$$
$$= 10.45943 \text{ லிட்டர்}$$

ஒரு லிட்டர் பாலின் விலை = ₹ 40

∴ மொத்த விலை = 10.459 × 40

= ₹ 418.36

இணைந்த உருவங்களின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு

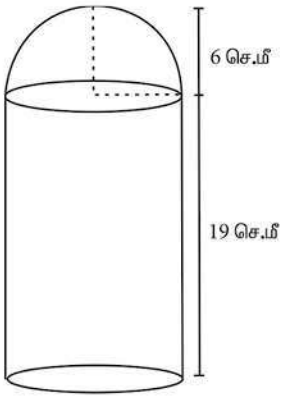
நினைவில் கொள்க

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட திண்மங்களை இணைப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் ஒரு திண்மம் "இணைந்த உருவம்" எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

7.24 ஓர் உருளையின் மீது ஓர் அரைக்கோளம் இணைந்தவாறு உள்ள ஒரு பொம்மையின் மொத்த உயரம் 25 செ.மீ ஆகும். அதன் விட்டம் 12 செ.மீ எனில், பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



r மற்றும் h என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு விட்டம் d = 12 செ.மீ

அதாவது, ஆரம் r = 6 செ.மீ

மொத்த உயரம் h = 25 செ.மீ

எனவே, உருளையின் உயரம் = 25 – 6 = 19 செ.மீ

பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = உருளையின் வளைபரப்பு + அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு + உருளையின் அடிப்பரப்பு

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + \pi r^2$$
$$= \pi r(2h + 3r) \text{ ச.அ}$$
$$= \frac{22}{7} \times 6 \times (38 + 18)$$
$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 56 = 1056$$

ஆகவே, பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 1056 ச.செ.மீ ஆகும்.

7.25 ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் மீது அரை உருளை உள்ளவாறு ஒரு நகைப்பெட்டி உள்ளது. கனச் செவ்வகத்தின் பரிமாணங்கள் 30 செ.மீ × 15 செ.மீ × 10 செ.மீ எனில், நகைப்பெட்டியின் கன அளவு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h_1 என்க.

உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே r மற்றும் h_2 என்க.

பெட்டியின் கன அளவு

= கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு + $\frac{1}{2}$ (உருளையின் கன அளவு)

$= (l \times b \times h_1) + \frac{1}{2}(\pi r^2 h_2)$ க.அ

$= (30 \times 15 \times 10) + \frac{1}{2}\left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times \frac{15}{2} \times 30\right)$

$= 4500 + 2651.79 = 7151.79$

ஆகவே, பெட்டியின் கன அளவு 7151.79 க.செ.மீ ஆகும்.

பெட்டியின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

= கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப்பரப்பு + $\frac{1}{2}$ (உருளையின் வளைபரப்பு) + கனச்செவ்வகத்தின் அடிப்பரப்பு

$= \left[2(l + b)h_1 + \frac{1}{2}(2\pi r h_2) + l \times b\right]$ ச.அ

$= 2(45 \times 10) + \left(\frac{22}{7} \times \frac{15}{2} \times 30\right) + 30 \times 15$

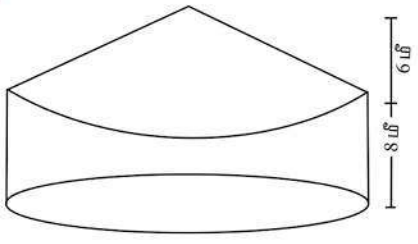
$= 900 + 707.14 + 450 = 2057.14$

ஆகவே, பெட்டியின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2057.14$ ச.செ.மீ

7.26 அருள் தனது குடும்ப விழாவிற்கு 150 நபர்கள் தங்குவதற்கு ஒரு கூடாரம் அமைக்கிறார். கூடாரத்தின் அடிப்பகுதி உருளை வடிவிலும் மேற்பகுதி கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. ஒருவர் தங்குவதற்கு 4 ச.மீ அடிப்பகுதி பரப்பும் 40 க.மீ காற்றும் தேவைப்படுகிறது. கூடாரத்தில் உருளையின் உயரம் 8 மீ எனில், கூம்பின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :



உருளை மற்றும் கூம்பின் உயரம் முறையே h_1 மற்றும் h_2 என்க.

இங்கு, ஒருவருக்கு தேவையான பரப்பு = 4 ச.மீ.

நபர்களின் எண்ணிக்கை = 150

தேவையான மொத்த அடிப்பரப்பு = 150×4

$\pi r^2 = 600$

$r^2 = 600 \times \frac{7}{22} = \frac{2100}{11}$ ... (1)

ஒருவருக்குத் தேவையான காற்றின் கன அளவு = 40 க.மீ.

150 நபர்களுக்குத் தேவையான காற்றின் கன அளவு = $150 \times 40 = 6000$ க.மீ.

$\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 = 6000$

$\pi r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000$

$\frac{22}{7} \times \frac{2100}{11}\left(8 + \frac{1}{3}h_2\right) = 6000$ [(1) ஐப் பிரதியிட]

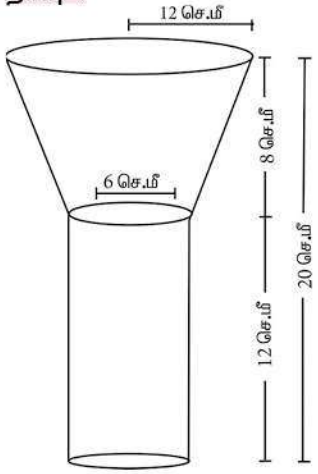
$8 + \frac{1}{3}h_2 = \frac{6000 \times 7 \times 11}{22 \times 2100}$

$\frac{1}{3}h_2 = 10 - 8 = 2;\ h_2 = 6$

ஆகவே, கூம்பின் உயரம் 6 மீ ஆகும்.

7.27 ஓர் உருளையின் மீது ஓர் இடைக்கண்டம் இணைந்தவாறு அமைந்த ஒரு புனலின் (funnel) மொத்த உயரம் 20 செ.மீ. உருளையின் உயரம் 12 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 12 செ.மீ ஆகும். இடைக்கண்டத்தின் மேற்புற விட்டம் 24 செ.மீ எனில், புனலின் வெளிப்புறப் பரப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :



h_1 மற்றும் h_2 என்பன முறையே இடைக்கண்டம் மற்றும் உருளையின் உயரம் என்க.

R மற்றும் r என்பன இடைக்கண்டத்தின் மேல் மற்றும் கீழ்ப்புற ஆரங்கள் என்க.
இங்கு R = 12 செ.மீ, r = 6 செ.மீ, h_2 = 12 செ.மீ,
h_1 = 20 – 12 = 8 செ.மீ
இடைக்கண்டத்தின் சாயுயரம்

$$l = \sqrt{(R - r)^2 + h_1^2} \text{ அலகுகள்}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

$$l = 10 \text{ செ.மீ}$$

வெளிப்புறப் பரப்பு = $2\pi r h_2 + \pi(R + r)\, l$ ச.அ

$$= \pi\left[2rh_2 + (R + r)l\right]$$

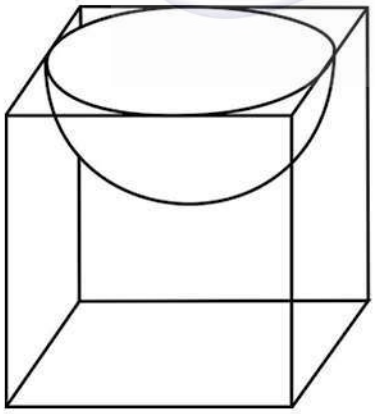
$$= \pi\left[(2 \times 6 \times 12) + (18 \times 10)\right]$$

$$= \pi\ [144 + 180]$$

$$= \frac{22}{7} \times 324 = 1018.28$$

எனவே, புனலின் வெளிப்புறப் பரப்பு 1018.28 ச.செ.மீ ஆகும்.

7.28 கனச்சதுரத்தின் ஒரு பகுதியில் *l* அலகுகள் விட்டமுள்ள (கனசதுரத்தின் பக்கஅளவிற்குச் சமமான) ஓர் அரைக்கோளம் (படத்தில் உள்ளதுபோல) வெட்டப்பட்டால், மீதமுள்ள திண்மத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.



தீர்வு :
அரைக்கோளத்தின் ஆரம் r என்க.
இங்கு, அரைகோளத்தின் விட்டம்
= கனச்சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் = *l* ஆகும்.
ஆரம் $r = \frac{l}{2}$ அலகு

தற்போது, மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப்பரப்பு = கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு + அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு – அரைக்கோளத்தின் அடிப்பரப்பு

$$= 6 \times (\text{பக்கம்})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$$

$$= 6 \times (\text{பக்கம்})^2 + \pi r^2$$

$$= 6 \times (l)^2 + \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(24 + \pi)l^2$$

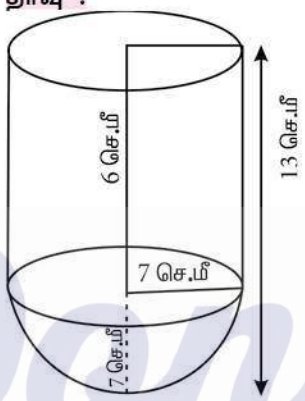
ஆகவே, மீதமுள்ள திண்மத்தின் புறப்பரப்பு

$$= \frac{1}{4}(24 + \pi)l^2 \text{ ச.அ}$$

பயிற்சி 7.3

1. ஒரு அரைக்கோளத்தின் மேல் ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையைப் பொருத்திய வடிவத்தில் அமைந்த ஒரு கிண்ணத்தின் விட்டம் 14 செ.மீ மற்றும் உயரம் 13 செ.மீ எனில், அதன் கொள்ளளவைக் காண்க.

தீர்வு :



கிண்ணத்தின் விட்டம் = 14 செ.மீ
ஆரம் r = 7 செ.மீ
அரைக்கோளத்தின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= \frac{2156}{3} = 718.67 \text{ செ.மீ}^3$$

உருளையின் ஆரம்
'r' = 7 செ.மீ
உயரம் 'h' = 6 செ.மீ
உருளையின் கன அளவு

$$= \pi r^2 h \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 6$$

$$= 924 \text{ செ.மீ}^3$$

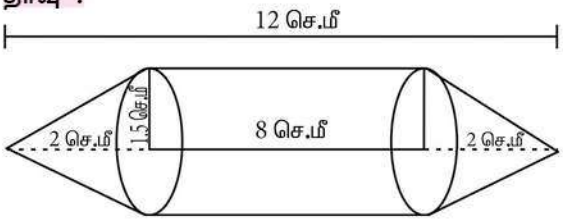
∴ கிண்ணத்தின் கொள்ளளவு = அரைக்கோளத்தின் கன அளவு + உருளையின் கன அளவு

$$= 718.67 + 924$$

$$= 1642.67 \text{ செ.மீ}^3$$

2. நாதன் என்ற பொறியியல் மாணவர் ஓர் உருளையின் இருபுறமும் கூம்புகள் உள்ளவாறு மாதிரி ஒன்றை உருவாக்கினார். மாதிரியின் நீளம் 12 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 3 செ.மீ ஆகும். ஒவ்வொரு கூம்பின் உயரமும் 2 செ.மீ இருக்குமானால் நாதன் உருவாக்கிய மாதிரியின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு :



படத்திலிருந்து உருளையின் ஆரம் $= \frac{3}{2} = 1.5$ செ.மீ

உயரம் = 8 செ.மீ

உருளையின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 8$

கூம்பின் ஆரம் = 1.5 செ.மீ

கூம்பின் உயரம் = 2 செ.மீ

இரு கூம்புகளின் கன அளவு

$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$ கன அலகுகள்

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 2$

∴ மாதிரியின் கன அளவு = உருளையின் கனஅளவு + இரு கூம்புகளின் கன அளவு

$= \frac{22}{7} \times (1.5)^2 \left[8 + \frac{4}{3}\right]$

$= \frac{22}{7} \times 2.25 \times \frac{28}{3}$

$= \frac{1386}{21} = 66$ செ.மீ^{3}

3. உயரம் 2.4 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 1.4 செ.மீ கொண்ட ஒரு திண்ம உருளையில் இருந்து அதே விட்டமும் உயரமும் உள்ள ஒரு கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்பட்டால் மீதமுள்ள திண்மத்தின் கனஅளவு எவ்வளவு கன செ.மீ ஆகும்?

தீர்வு : திண்ம உருளையின் விட்டம் = 1.4 செ.மீ

திண்ம உருளையின் ஆரம் $= \frac{1.4}{2} = 0.7$ செ.மீ

திண்ம உருளையின் உயரம் = 2.4 செ.மீ

உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ கனஅலகுகள்

$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 2.4$

கூம்பின் ஆரம் = 0.7 செ.மீ

கூம்பின் உயரம் = 2.4 செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ கனஅலகுகள்

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 2.4$

∴ மீதமுள்ள திண்மத்தின் கன அளவு = உருளையின் கன அளவு – கூம்பின் கன அளவு

$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 2.4 - \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 2.4$

$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 2.4 \left(1 - \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{22}{7} \times 0.7 \times 0.7 \times 2.4 \times \frac{2}{3} = 2.464$ செ.மீ^{3}

மாற்றுமுறை: உருளை மற்றும் கூம்பு ஆகியவற்றின் உயரங்கள் சமமாகவும், ஆரங்கள் சமமாகவும் இருப்பதால்

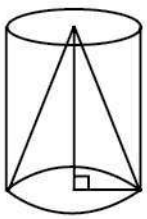
மீதமுள்ள திண்மத்தின் கன அளவு = உருளையின் கன அளவு – கூம்பின் கன அளவு

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

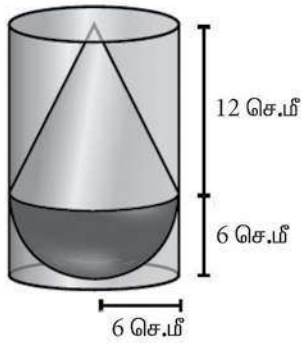
$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.7)^2 \ (2.4)$

$= 2.464$ செ.மீ^{3}



4. ஒரு திண்மத்தின் அடிப்புறம் 6 செ.மீ ஆரம் உடைய அரைக்கோள வடிவிலும் மேற்புறம் 12 செ.மீ உயரமும் 6 செ.மீ ஆரமும் கொண்ட கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. முழுவதும் நீரால் நிரப்பப்பட்ட ஓர் உருளையின் அடிப்புறத்தைத் தொடுமாறு அத்திண்மம் வைக்கப்படும்போது வெளியேறும் நீரின் கனஅளவைக் காண்க. உருளையின் ஆரம் 6 செ.மீ மற்றும் உயரம் 18 செ.மீ எனக் கொள்க.



தீர்வு :

அரைக்கோளத்தின் ஆரம் = 6 செ.மீ

அரைக்கோளத்தின் கன அளவு

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்

$= \frac{2}{3}\pi(6)^3$

$= \frac{2}{3}\pi(216)$

$= 144\,\pi$ செ.மீ^{3}

கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரம் = 6 செ.மீ

கூம்பின் உயரம் = 12 செ.மீ

கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \frac{1}{3}\pi(6)^2\,(12)$

$= 144\,\pi$ செ.மீ^{3}

திண்மத்தின் கன அளவு = கூம்பின் கன அளவு + அரைக் கோளத்தின் கன அளவு

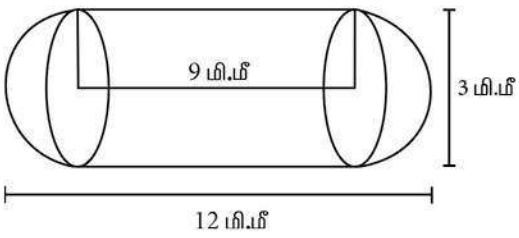
$= 144\pi + 144\,\pi = 288\,\pi$

வெளியேறும் நீரின் கன அளவு = உருளையில் வைக்கப்பட்ட திண்மத்தின் கன அளவு

$= 288\,\pi = 288 \times \frac{22}{7} = 905.14$ செ.மீ^{3}

5. ஒரு மருந்து குப்பி, ஓர் உருளையின் இருபுறமும் அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. குப்பியின் மொத்த நீளம் 12 மி.மீ மற்றும் விட்டம் 3 மி.மீ எனில், அதில் அடைக்கப்படும் மருந்தின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு :



படத்திலிருந்து,

அரைக்கோளத்தின் விட்டம் = 3 மி.மீ

அரைக்கோளத்தின் ஆரம் = 1.5 மி.மீ

அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ கனஅலகுகள்

∴ இரு அரைக்கோளங்களின் கன அளவு

$= 2\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)$

$= \frac{4}{3}\pi(1.5)^3$

$= 4.5\,\pi$ மி.மீ^{3}

உருளையின் ஆரம் = 1.5 மி.மீ

உருளையின் உயரம் = 12 – 3 = 9 மி.மீ

உருளையின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \pi(1.5)^2\,(9)$

$= 20.25\,\pi$ மி.மீ^{3}

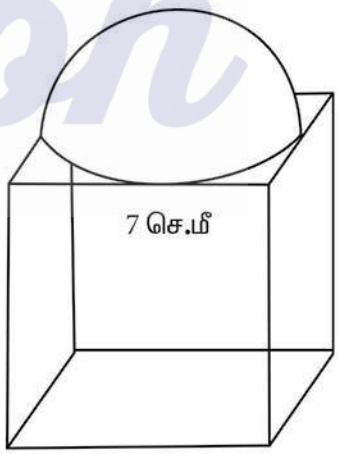
∴ குப்பியில் அடைக்கப்படும் மருந்தின் அளவு = உருளையின் கன அளவு + இரு அரைக்கோளங்களின் கன அளவு

$= 20.25\,\pi + 4.5\,\pi$

$= 24.75\,\pi$ மி.மீ^{3}

$= 24.75 \times \frac{22}{7} = 77.785$ மி.மீ^{3}

6. 7 செ.மீ பக்க அளவுள்ள கனச்சதுரத்தின் மீது ஓர் அரைக்கோளம் படத்தில் உள்ளவாறு பொருந்தியுள்ளது. திண்மத்தின் புறப்பரப்பு காண்க.



தீர்வு :

கன சதுரத்தின் விளிம்பு

$= 7$ செ.மீ

கன சதுரத்தின் புறப்பரப்பு

$= 6a^2$ சதுர அலகுகள்

$= 6(7)^2$

$= 294$ செ.மீ^{2}

அரைக்கோளத்தின் ஆரம்

$= \frac{7}{2}$ செ.மீ

[∵ அரைக்கோளம் கன சதுரத்தின் மீது பொருந்தியுள்ளதால் வளைபரப்பு மட்டும் கணக்கிடப்படுகிறது.]

அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= 2\pi r^2$ சதுர அலகுகள்

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= 77$ செ.மீ^{2}

திண்மத்தின் புறப்பரப்பு = கன சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு + அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு – வட்டப்பகுதியின் பரப்பு (அரைக்கோளத்தின் அடிப்பகுதி)

$= 294 + 77 - \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$

$= 371 - 38.5$

$= 332.5$ செ.மீ^{2}

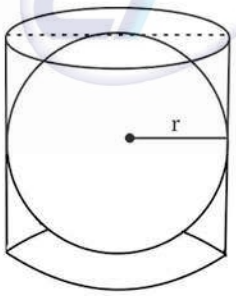
7. ஆரம் r அலகுகள் கொண்ட ஒரு கோளம் ஒரு நேர் வட்ட உருளையினுள் மிகச் சரியாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைக் கணக்கிடுக.

(i) கோளத்தின் புறப்பரப்பு

(ii) உருளையின் வளைபரப்பு

(iii) (i) மற்றும் (ii) -ல் பெறப்பட்ட பரப்புகளின் விகிதம்

தீர்வு :



(i) கோளத்தின் புறப்பரப்பு:

கோளத்தின் ஆரம் = r

புறப்பரப்பு = $4\pi r^2$ சதுர அலகுகள்

(ii) உருளையின் வளைபரப்பு:

உருளையின் ஆரம் = r

உருளையின் உயரம் = r + r = 2r

வளைபரப்பு = $2\pi rh$ சதுர.அ

$= 2\pi r\,(2r)$

$= 4\pi r^2$ சதுர அலகுகள்

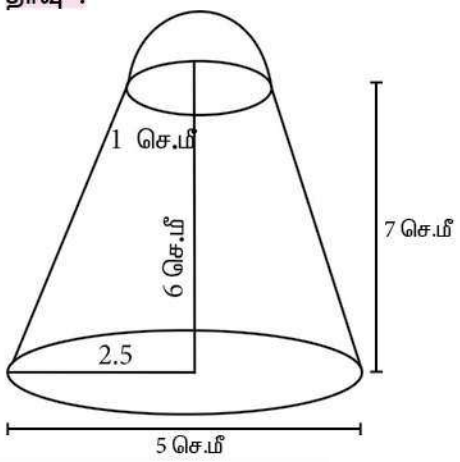
(iii) பரப்புகளின் விகிதம் $= \frac{\text{கோளத்தின் புறப்பரப்பு}}{\text{உருளையின் வளைபரப்பு}}$

$= \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{1}$

விகிதம் = 1 : 1.

8. ஒரு இறகுப்பந்தின், மேற்புறம் கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவிலும், கீழ்ப்புறம் அரைக்கோள வடிவிலும் உள்ளது. இடைக்கண்டத்தின் விட்டங்கள் 5 செ.மீ மற்றும் 2 செ.மீ ஆகவும் இறகுபந்தின் மொத்த உயரம் 7 செ.மீ ஆகவும் இருக்குமானால், இறகுப் பந்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



இடைக்கண்டம்

அடிப்பக்க ஆரம் R = 2.5 செ.மீ

மேற்புற ஆரம் r = 1 செ.மீ

உயரம் h = 7 – 1 = 6 செ.மீ

சாயுயரம் $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (2.5-1)^2}$

$= \sqrt{36 + 2.25}$

$= \sqrt{38.25} = 6.18$ செ.மீ

வளைபரப்பு $= \pi\,(R+r)\,l$ சதுர அலகுகள்

$= \frac{22}{7}\,(2.5 + 1)\,(6.18)$

$= \frac{22}{7}\,(3.5)\,(6.18)$

$= 67.98$ செ.மீ^{2}

அரைக்கோளத்தின் ஆரம் = 1 செ.மீ

அரைக்கோளதத்தின் வளைபரப்பு

$= 2\pi r^2$ சதுர அலகுகள்

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (1)^2$

அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= 6.29$ செ.மீ^{2}

இறகுப் பந்தின் புறப்பரப்பு = இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு + அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= 67.98 + 6.29 = 74.27$ செ.மீ^{2}

திண்மங்களை கன அளவுகள் மாறாமல் மற்றொரு உருவத்திற்கு மாற்றி அமைத்தல்

நினைவில் கொள்க

- திண்மங்களை மற்றொரு உருவத்திற்கு மாற்றும்பொழுது அவற்றின் கன அளவுகள் சமமாகவும், புறப்பரப்பு மாறுபட்டும் இருக்கும்.
- திண்மங்களை உருக்கி வடிக்கும் கணக்குகளில், கன அளவுகள் சமமாதலால் π ன் மதிப்பை $\frac{22}{7}$ எனப் பிரதியிடத் தேவையில்லை. ஏனெனில் கன அளவுகளை சமப்படுத்தும்பொழுது π என்பது இருபுறமும் நீக்கப்பட்டு விடும்.

எடுத்துக்காட்டு

7.29 **16 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் உலோகப் பந்து, உருக்கப்பட்டு 2 செ.மீ ஆரமுள்ள சிறு பந்துகளாக்கப்பட்டால், எத்தனை பந்துகள் கிடைக்கும்?**

தீர்வு :

சிறிய உலோகப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை n என்க.

சிறிய மற்றும் பெரிய உலோகப் பந்துகளின் ஆரங்கள் முறையே r மற்றும் R என்க.

இங்கு, R = 16 செ.மீ, r = 2 செ.மீ.

தற்போது n × (ஒரு சிறிய உலோகப் பந்தின் கனஅளவு) = பெரிய உலோகப் பந்தின் கனஅளவு

$$n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$n\left(\frac{4}{3}\pi \times 2^3\right) = \frac{4}{3}\pi \times 16^3$$

$$8n = 4096 \text{ எனவே } n = 512$$

ஆகவே, சிறிய உலோகப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை 512 ஆகும்.

7.30 **களிமண் கொண்டு செய்யப்பட்ட 24 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு கூம்பை ஒரு குழந்தை அதே ஆரமுள்ள ஓர் உருளையாக மாற்றுகிறது எனில் உருளையின் உயரம் காண்க.**

தீர்வு :

h_1 மற்றும் h_2 என்பன முறையே கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரம் என்க.

r என்பது கூம்பின் ஆரம் என்க.

இங்கு கூம்பின் உயரம் h = 24 செ.மீ, கூம்பு மற்றும் உருளையின் ஆரம் r செ.மீ

இங்கு, உருளையின் கனஅளவு = கூம்பின் கனஅளவு

$$\pi r^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$$

$$h_2 = \frac{1}{3} \times h_1 \text{ -லிருந்து}$$

$$h_2 = \frac{1}{3} \times 24 = 8$$

எனவே, உருளையின் உயரம் = 8 செ.மீ ஆகும்.

7.31 **6 செ.மீ ஆரம் மற்றும் 15 செ.மீ உயரம் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவப் பாத்திரத்தில் முழுவதுமாக பனிக்கூழ் (Ice-cream) உள்ளது. அந்தப் பனிக்கூழானது, கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவத்தில் நிரப்பப்படுகிறது. கூம்பின் உயரம் 9 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 3 செ.மீ எனில், பாத்திரத்தில் உள்ள பனிக்கூழை நிரப்ப எத்தனைக் கூம்புகள் தேவை?**

தீர்வு :

h மற்றும் r என்பன முறையே உருளையின் உயரம் மற்றும் ஆரம் என்க.

இங்கு h = 15 செ.மீ, r = 6 செ.மீ

உருளையின் கனஅளவு $V = \pi r^2 h$ க.அ

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15$$

$r_1 = 3$ செ.மீ மற்றும் $h_1 = 9$ செ.மீ என்பன கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் ஆகும்.

$r_1 = 3$ செ.மீ என்பது அரைக்கோளத்தின் ஆரம் ஆகும்.

பனிக்கூழ்க் கூம்பின் கன அளவு = கூம்பின் கனஅளவு + அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \frac{2}{3}\pi r_1^3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 9 + \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= \frac{22}{7} \times 9\,(3 + 2)$$

ஒரு பனிக்கூழ்க் கூம்பின் கன அளவு

$= \frac{22}{7} \times 45$

எனவே, தேவையான கூம்புகளின் எண்ணிக்கை

$= \frac{\text{உருளையின் கனஅளவு}}{\text{ஒரு பனிக்கூழ்க் கூம்பின் கனஅளவு}}$

$= \frac{\frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 15}{\frac{22}{7} \times 45} = 12$

ஆகவே, தேவையான கூம்புகளின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

பயிற்சி 7.4

1. 12 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் அலுமினியக் கோளம் உருக்கப்பட்டு 8 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :

கோளத்தின் ஆரம்= 12 செ.மீ

கோளத்தின் கன அளவு

$= \frac{4}{3} \pi r^3$ கன அலகுகள்

$= \frac{4}{3} \pi (12)^3$

$= 2304\ \pi$ செ.மீ ^{3}

உருளையின் ஆரம் = 8 செ.மீ

உயரம் = h செ.மீ

உருளையின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \pi (8)^2 h = 64\pi$ h செ.மீ^{3}

கொடுக்கப்பட்டது: கோளம் உருக்கப்பட்டு உருளையாக மாற்றப்படுகிறது.

∴ உருளையின் கன அளவு = கோளத்தின் கன அளவு

$64\ \pi\ h = 2304\ \pi$

$h = \frac{2304\ \pi}{64\ \pi} = 36$

∴ உருளையின் உயரம் = 36 செ.மீ

2. 14 செ.மீ விட்டமுள்ள குழாயிலிருந்து 15 கி.மீ/மணி என்ற வேகத்தில் 50 மீ நீளம் மற்றும் 44 மீ அகலம் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவத் தொட்டியினுள் தண்ணீர் பாய்கிறது. எவ்வளவு நேரத்தில் தண்ணீரின் மட்டம் 21 செ.மீ க்கு உயரும்?

தீர்வு :

உருளை வடிவக் குழாயின் விட்டம் = 14 செ.மீ

ஆரம் = 7 செ.மீ

குழாயின் நீளம் = தண்ணீரின் வேகம்

= 15 கி.மீ = 15000 மீ

தண்ணீர்த் தொட்டியின் நீளம் = 50 மீ

தண்ணீர்த் தொட்டியின் அகலம் = 44 மீ

தண்ணீர்த் தொட்டியின் உயரம் = தண்ணீரின் மட்டம்

= 21 செ.மீ

= 0.21 மீ

தண்ணீர்த் தொட்டியின் கொள்ளளவு

= $l \times b \times h$ கன அலகுகள்

= $50 \times 44 \times 0.21 = 462$ மீ^{3}

உருளை வடிவக் குழாயின் கன அளவு = தண்ணீர்த் தொட்டியின் கொள்ளளவு

$\pi r^2 h = 462$

$\frac{22}{7} \times 0.07 \times 0.07 \times h = 462$

$\therefore h = \frac{462 \times 7}{22 \times 0.07 \times 0.07}$

$= \frac{3234}{0.1078} = 30000$

தேவைப்படும் காலம் $= \frac{30000}{15000} = 2$ மணிநேரம்

3. முழுமையாக நீரால் நிரம்பியுள்ள ஒரு கூம்பு வடிவக் குடுவையின் ஆரம் r அலகுகள் மற்றும் உயரம் h அலகுகள் ஆகும். நீரானது xr அலகுகள் ஆரமுள்ள மற்றொரு உருளை வடிவக் குடுவைக்கு மாற்றப்பட்டால் நீரின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :

கூம்பு வடிவக் குடுவையின் ஆரம் = r' அலகுகள்

கூம்பு வடிவக் குடுவையின் உயரம் = 'h' அலகுகள்

கூம்பு வடிவக் குடுவையின் கொள்ளளவு = தண்ணீரின் கன அளவு

$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

கூம்பு வடிவக் குடுவையில் தண்ணீர் ஊற்றப்படுவதால்,

உருளையின் கனஅளவு = தண்ணீரின் கன அளவு

$\pi (xr)^2\ H = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

[xr – உருளையின் ஆரம், H – உயரம்]

$$x^2r^2H = \frac{r^2}{3}h$$

உருளைவடிவக் குடுவையில் நீரின் உயரம்

$$H = \frac{h}{3x^2}$$

4. விட்டம் 14 செ.மீ, உயரம் 8 செ.மீ உடைய ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பு, ஓர் உள்ளீடற்ற கோளமாக உருமாற்றப்படுகிறது. கோளத்தின் வெளிவிட்டம் 10 செ.மீ எனில், உள்விட்டத்தைக் காண்க

தீர்வு :

கூம்பின் விட்டம் = 14 செ.மீ

கூம்பின் ஆரம் = 7 செ.மீ

கூம்பின் உயரம் = 8 செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 7 \times 7 \times 8$$

$$= \frac{392\,\pi}{3} \text{ செ.மீ}^3$$

கோளத்தின் வெளி விட்டம் = 10 செ.மீ

கோளத்தின் வெளி ஆரம் 'R' = 5 செ.மீ

உள் ஆரம் = 'r' செ.மீ^{3}

கொ.ப.: கூம்பு உருக்கப்பட்டு உள்ளீடற்ற கோளமாக மாற்றப்படுகிறது.

அதாவது, உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கன அளவு = கூம்பின் கன அளவு

$$\frac{4}{3}\pi(5^3 - r^3) = \frac{392\,\pi}{3}$$

$$5^3 - r^3 = \frac{392}{4} = 98$$

$$r^3 = 125 - 98 = 27$$

ஆரம் r = 3 செ.மீ

∴ உள் விட்டம் = 2r = 6 செ.மீ

5. சீனு வீட்டின் மேல்நிலை நீர்த்தொட்டி உருளை வடிவில் உள்ளது. அதன் ஆரம் 60 செ.மீ மற்றும் உயரம் 105 செ.மீ. 2 மீ × 1.5 மீ × 1 மீ பரிமாணங்களை உடைய ஒரு கனச்செவ்வகக் கீழ்நிலை நீர் தொட்டியிலிருந்து நீர் உந்தப்பட்டு மேலேயுள்ள உருளை வடிவத் தொட்டி முழுமையாக நிரப்பப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் கீழ்த் தொட்டியில் நீர் முழுமையாக இருப்பதாகக் கருதுக. மேல் தொட்டிக்கு நீர் ஏற்றிய பிறகு மீதமுள்ள நீரின் கனஅளவைக் காண்க.

தீர்வு :

கன செவ்வகத் தொட்டி

நீளம் = 2 மீ = 200 செ.மீ

அகலம் = 1.5 மீ = 150 செ.மீ

உயரம் = 1 மீ = 100 செ.மீ

கன செவ்வகத் தொட்டியின் கொள்ளளவு

$= l \times b \times h$

$= 200 \times 150 \times 100$

$= 30,00,000$ செ.மீ^{3}

மேல்நிலை உருளை வடிவத் தொட்டி

ஆரம் = 60 செ.மீ

உயரம் = 105 செ.மீ

கன அளவு = $\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \times 105$$

$= 11,88,000$ செ.மீ^{3}

∴ கீழ் நிலைத் தொட்டியில் மீதமுள்ள நீரின் கன அளவு = கன செவ்வகத் தொட்டியின் கன அளவு – உருளை வடிவத் தொட்டியின் கன அளவு

$= 30,00,000 - 11,88,000$

$= 18,12,000$ செ.மீ^{3}

6. ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோள ஓட்டின் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற விட்டங்கள் முறையே 6 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ ஆகும். அது உருக்கப்பட்டு 14 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு திண்ம உருளையாக்கப்பட்டால், அவ்வுருளையின் உயரம் காண்க.

தீர்வு :

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம்

உட்புற விட்டம் = 6 செ.மீ

உட்புற ஆரம் 'r' = 3 செ.மீ

வெளிப்புற விட்டம் = 10 செ.மீ

வெளிப்புற ஆரம் 'R' = 5 செ.மீ

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கன அளவு (அல்லது) பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{2}{3}\pi(5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(125 - 27) = \frac{196\,\pi}{3} \text{ செ.மீ}^3$$

உருளை

விட்டம் = 14 செ.மீ

ஆரம் = 7 செ.மீ

உயரம் = h

உருளையின் கன அளவு
$= \pi r^2 h$ கன அலகுகள்
$= \pi(7)^2\ h$
$= 49\ \pi h$

கொடுக்கப்பட்டது: உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம் உருக்கப்பட்டு உருளையாக மாற்றப்படுகிறது.
∴ உருளையின் கன அளவு = உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கன அளவு

$$49\ \pi h = \frac{196\ \pi}{3}$$

$$h = \frac{196}{3 \times 49} = \frac{4}{3} = 1.33$$

∴ உருளையின் உயரம் = 1.33 செ.மீ

7. 6 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளம் உருக்கப்பட்டுச் சீரான தடிமனுள்ள ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் வெளி ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் உயரம் 32 செ.மீ எனில், உருளையின் தடிமனைக் காண்க.

தீர்வு :

திண்மக் கோளம்

ஆரம் = 6 செ.மீ

கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்

$= \frac{4}{3}\pi(6)^3$

$= \frac{4}{3}\pi(216) = 288\ \pi$ செ.மீ^{3}

உள்ளீடற்ற உருளை

உட்புற ஆரம் = r'
வெளிப்புற ஆரம் = 'R' = 5 செ.மீ
உயரம் h = 32செ.மீ

உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு
$= \pi h\ (R^2 - r^2)$ கன அலகுகள்
$= \pi\ (32)\ (25 - r^2)$ செ.மீ^{3}

கொடுக்கப்பட்டது: திண்மக் கோளத்தை உருக்கி உள்ளீடற்ற உருளையாக மாற்றப்படுகிறது.
∴ உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு = கோளத்தின் கன அளவு

$$32\pi\ (25 - r^2) = 288\ \pi$$

$$25 - r^2 = \frac{288}{32} = 9$$

$$r^2 = 25 - 9 = 16$$

உட்புற ஆரம் r = 4 செ.மீ
∴ தடிமன் = வெளிப்புற ஆரம் – உட்புற ஆரம்
= R – r = 5 – 4 = 1 செ.மீ

8. ஓர் அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் விளிம்பு வரையில் பழச்சாறு நிரம்பியுள்ளது. உயரத்தைவிட 50% அதிக ஆரம் கொண்ட உருளை வடிவப் பாத்திரத்திற்குப் பழச்சாறு மாற்றப்படுகிறது. அரைக்கோளம் மற்றும் உருளை ஆகியவற்றின் விட்டங்கள் சமமானால் கிண்ணத்திலிருந்து எவ்வளவு சதவீதப் பழச்சாறு உருளை வடிவ பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும்?

தீர்வு : அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் ஆரம் r என்க.
∴ அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்

உருளை வடிவப் பாத்திரத்தின் உயரம் h என்க

கொ.ப: $r = h + h\frac{50}{100} \Rightarrow r = h\left(1 + \frac{50}{100}\right)$

$$h = \frac{2}{3}r$$

இப்போது, உருளை வடிவப் பாத்திரத்தின் கொள்ளளவு

$$= \pi r^2\left(\frac{2r}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

எனவே, உருளை வடிவப் பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும் பழச்சாற்றின் அளவு (அதாவது) சதவீதம்,

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} \times 100\% = 100\ \%$$

பயிற்சி 7.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்:

1. 15 செ.மீ உயரமும் 16 செ.மீ விட்டமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பு

(1) 60π ச.செ.மீ (2) 68π ச.செ.மீ
(3) 120π ச.செ.மீ (4) 136π ச.செ.மீ

[விடை (4)]

தீர்வு :

அடிப்பக்க விட்டம் = 16 செ.மீ
உயரம் = 15 செ.மீ
அடிப்பக்க ஆரம் = 8 செ.மீ
கூம்பின் வளைபரப்பு = πrl கன அலகுகள்

$= \pi(8)\sqrt{15^2 + 8^2}$

$= \pi(8)\sqrt{289}$

$= 8\pi\ (17) = 136\ \pi$ செ.மீ^{2}

2. r அலகுகள் ஆரம் உடைய இரு சம அரைக் கோளங்களின் அடிப்பகுதிகள் இணைக்கப்படும்போது உருவாகும் திண்மத்தின் புறப்பரப்பு

(1) $4\pi r^2$ ச.அ (2) $6\pi r^2$ ச.அ
(3) $3\pi r^2$ ச.அ (4) $8\pi r^2$ ச.அ

[விடை (1)]

தீர்வு :
'r' என்ற சம ஆரத்தைக் கொண்ட இரு அரைக் கோளங்கள் ஒன்றாக இணைக்கப்படும்போது உருவாகும் திண்மம் ஒரு கோளமாகும்.
∴ திண்மத்தின் புறப்பரப்பு = $4\pi r^2$ சதுர அலகுகள்

3. ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் சாயுயரம் 13 செ.மீ உடைய நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரம்

(1) 12 செ.மீ (2) 10 செ.மீ
(3) 13 செ.மீ (4) 5 செ.மீ [விடை (1)]

தீர்வு :
கொ.ப: r = 5 செ.மீ, l = 13 செ.மீ

∴ உயரம் $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$

$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ செ.மீ

4. ஓர் உருளையின் உயரத்தை மாற்றாமல் அதன் ஆரத்தைப் பாதியாகக் கொண்டு புதிய உருளை உருவாக்கப்படுகிறது. புதிய மற்றும் முந்தைய உருளைகளின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(1) 1 : 2 (2) 1 : 4
(3) 1 : 6 (4) 1 : 8 [விடை (2)]

தீர்வு :
உருளையின் ஆரம் = r
உருளையின் உயரம் = h
முந்தைய உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$ க.அ
ஆரம் பாதியாக்கப்பட்டால், ஆரம் = $\frac{r}{2}$
புதிய உருளையின் கன அளவு

$= \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 h = \frac{\pi r^2 h}{4}$

இப்போது, விகிதம்

$= \frac{\text{புதிய உருளையின் கன அளவு}}{\text{முந்தைய உருளையின் கன அளவு}}$

$= \frac{\frac{\pi r^2 h}{4}}{\pi r^2 h} = \frac{1}{4}$

விகிதம் = 1 : 4

5. ஓர் உருளையின் ஆரம் அதன் உயரத்தில் மூன்றில் ஒரு பங்கு எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(1) $\frac{9\pi h^2}{8}$ ச.அ (2) $24\pi h^2$ ச.அ
(3) $\frac{8\pi h^2}{9}$ ச.அ (4) $\frac{56\pi h^2}{9}$ ச.அ

[விடை (3)]

தீர்வு : உயரம் = h, ஆரம் = $\frac{1}{3}h$
உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2\pi \frac{h}{3}\left(h + \frac{h}{3}\right)$

$= 2\pi \frac{h}{3}\left(\frac{4h}{3}\right)$

$= \frac{8\pi h^2}{9}$ சதுர அலகுகள்

6. ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளிப்புற மற்றும் உட்புற ஆரங்களின் கூடுதல் 14 செ.மீ மற்றும் அதன் தடிமன் 4 செ.மீ ஆகும். உருளையின் உயரம் 20 செ.மீ எனில், அதனை உருவாக்கப் பயன்பட்ட பொருளின் கன அளவு

(1) 5600π க.செ.மீ (2) 1120π க.செ.மீ
(3) 56π க.செ.மீ (4) 3600π க.செ.மீ

[விடை (2)]

தீர்வு :
உட்புற ஆரம் = r, வெளிப்புற ஆரம் = R
கொ.ப. கூடுதல் = R + r = 14, தடிமன் R − r = 4,
உயரம் h = 20 செ.மீ
பயன்பட்ட பொருளின் கன அளவு

$= \pi(R^2 - r^2)h$ கன அலகுகள்

$= \pi(R + r)(R - r)h$

$= \pi(14)(4)\,20$

$= 1120\pi$ செ.மீ^{3}

7. ஒரு கூம்பின் அடிப்புற ஆரம் மும்மடங்காகவும் உயரம் இரு மடங்காகவும் மாறினால் கன அளவு எத்தனை மடங்காக மாறும்?

(1) 6 மடங்கு (2) 18 மடங்கு
(3) 12 மடங்கு (4) மாற்றமில்லை

[விடை (2)]

தீர்வு :
ஆரம் மும்மடங்கானால், புதிய ஆரம் 3r.
உயரம் இரு மடங்கானால், புதிய உயரம் 2h.
கூம்பின் கன அளவு

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \frac{1}{3}\pi(3r)^2\ (2h)$

$= \frac{\pi}{3}(9r^2)\ (2h)$

$= 18\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

= 18 (கூம்பின் கன அளவு)

= 18 மடங்கு

8. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்பரப்பு அதன் ஆரத்தினுடைய வர்க்கத்தின் _____மடங்காகும்.

(1) π (2) 4π

(3) 3π (4) 2π [விடை (3)]

தீர்வு :

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப்பரப்பு

$= 3\pi r^2$

$= 3\pi$ (ஆரத்தின் வர்க்கம்)

$= 3\pi$ மடங்கு

9. x செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளம் அதே ஆரமுள்ள ஒரு கூம்பாக மாற்றப்படுகிறது எனில், கூம்பின் உயரம்

(1) $3x$ செ.மீ (2) x செ.மீ

(3) $4x$ செ.மீ (4) $2x$ செ.மீ [விடை (3)]

தீர்வு :

கோளத்தின் ஆரம்= 'x' செ.மீ

கோளத்தின் கன அளவு

$= \frac{4}{3}\pi x^3$ செ.மீ^{3}

கூம்பின் ஆரம் = 'x' செ.மீ

உயரம் = h

கூம்பின் கன அளவு

$= \frac{1}{3}\pi x^2 h$

கூம்பின் கன அளவு = கோளத்தின் கன அளவு

[$\because$ கோளம் உருக்கப்பட்டு கூம்பாக மாற்றப்படுகிறது]

$\frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{4}{3}\pi x^3$

$\Rightarrow$ $h = 4x$ செ.மீ

10. 16 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக்கண்ட ஆரங்கள் 8 செ.மீ மற்றும் 20 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு

(1) 3328π செ.மீ^{3} (2) 3228π செ.மீ^{3}

(3) 3240π செ.மீ^{3} (4) 3340π செ.மீ^{3}

[விடை (1)]

தீர்வு :

இடைக்கண்டத்தின் உயரம் h = 16 செ.மீ

ஆரங்கள் 8 செ.மீ மற்றும் 20 செ.மீ

அதாவது, r = 8 செ.மீ, R = 20 செ.மீ

இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு

$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ கன அலகுகள்

$= \frac{\pi(16)}{3}(400 + 160 + 64)$

$= \frac{16\pi}{3}(624) = 3328\ \pi$ செ.மீ^{3}

11. கீழ்க்காணும் எந்த இரு உருவங்களை இணைத்தால் ஓர் இறகுபந்தின் வடிவம் கிடைக்கும்?

(1) உருளை மற்றும் கோளம்

(2) அரைக்கோளம் மற்றும் கூம்பு

(3) கோளம் மற்றும் கூம்பு

(4) கூம்பின் இடைக்கண்டம் மற்றும் அரைக்கோளம்

[விடை (4)]

12. r_1 அலகுகள் ஆரமுள்ள ஒரு கோளப்பந்து உருக்கப்பட்டு r_2 அலகுகள் ஆரமுடைய 8 சமகோள பந்துகளாக ஆக்கப்படுகிறது எனில் $r_1 : r_2$

(1) 2 : 1 (2) 1 : 2

(3) 4 : 1 (4) 1 : 4 [விடை (1)]

தீர்வு :

r_1 ஆரத்தைக் கொண்ட கோளப் பந்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r_1^3$

r_2 ஆரத்தைக் கொண்ட 8 சம கோளப் பந்துகளின் கன அளவு

$= 8\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)$

இப்போது, $\frac{\text{கோளத்தின் கன அளவு}}{\text{புதிய 8 கோளங்களின் கன அளவு}}$

$= \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{8\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)} = \frac{r_1^3}{8r_2^3} = 2 : 1$

13. 1 செ.மீ ஆரமும் 5 செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு மர உருளையிலிருந்து அதிகபட்சக் கன அளவுகொண்ட கோளம் வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது எனில், அதன் கன அளவு (க.செ.மீ-ல்)

(1) $\frac{4}{3}\pi$ (2) $\frac{10}{3}\pi$

(3) 5π (4) $\frac{20}{3}\pi$

[விடை (1)]

தீர்வு :

மர உருளையின் ஆரம் = 1 செ.மீ
மர உருளையின் உயரம் = 5 செ.மீ

உருளையிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படும் அதிகபட்ச கன அளவு கொண்ட கோளத்தின் விட்டம் = 2 செ.மீ

$\therefore$ ஆரம் = 1 செ.மீ

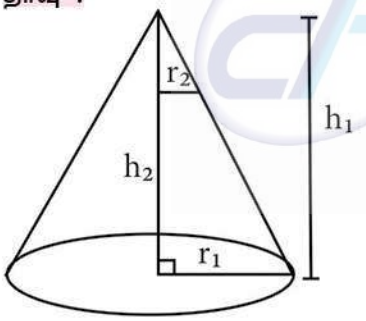
கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$ செ.மீ^{3}

14. இடைக்கண்டத்தை ஒரு பகுதியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பின் உயரம் மற்றும் ஆரம் முறையே h_1 அலகுகள் மற்றும் r_1 அலகுகள் ஆகும். இடைக்கண்டத்தின் உயரம் மற்றும் சிறிய பக்க ஆரம் முறையே h_2 அலகுகள் மற்றும் r_2 அலகுகள் மற்றும் $h_2 : h_1 = 1 : 2$ எனில் $r_2 : r_1$ -ன் மதிப்பு

(1) 1 : 3 (2) 1 : 2
(3) 2 : 1 (4) 3 : 1 [விடை (2)]

தீர்வு :



கொடுக்கப்பட்டது: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$

$r_2 : r_1 = 1 : 2$

15. சமமான விட்டம் மற்றும் உயரம் உடைய ஓர் உருளை, ஒரு கூம்பு மற்றும் ஒரு கோளத்தின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(1) 1 : 2 : 3 (2) 2 : 1 : 3
(3) 1 : 3 : 2 (4) 3 : 1 : 2 [விடை (4)]

தீர்வு :

உருளையின் விட்டம் = கூம்பின் விட்டம் = கோளத்தின் விட்டம்
உருளையின் உயரம் = கூம்பின் உயரம் = கோளத்தின் உயரம்

உருளையின் கனஅளவு $= V_1 = \pi r^2 h$

கூம்பின் கன அளவு $= V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

கோளத்தின் கன அளவு $= V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

கோளத்தின் ஆரம் = 'R', விட்டம் = 2R
உருளையின் உயரம் = கூம்பின் உயரம் = 2R

கன அளவுகளின் விகிதம் $\Rightarrow V_1 : V_2 : V_3$

$= \pi R^2 (2R) : \frac{1}{3}\pi R^2 (2R) : \frac{4}{3}\pi R^3$

$= 1 : \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 3 : 1 : 2$

அலகுப் பயிற்சி - 7

1. 7 செ.மீ நீளமுள்ள ஓர் உருளை வடிவ மை குடுவையின் விட்டம் 5 மி.மீ ஆகும். மை முழுமையாகவுள்ள உருளையைக் கொண்டு சராசரியாக 330 வார்த்தைகள் எழுதலாம். ஒரு லிட்டரில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு மை ஒரு பாட்டிலில் உள்ளது எனில், அதனைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வார்த்தைகள் எழுதலாம்?

தீர்வு :

உருளை வடிவ மை குடுவையின் உயரம் h = 7 செ.மீ

விட்டம் = 5 மி.மீ

ஆரம் $r = \frac{5}{2} = 2.5$ மி.மீ $= 0.25$ செ.மீ

உருளை வடிவ மை குடுவையின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 0.25 \times 0.25 \times 7$

$= 1.375$ செ.மீ^{3}

கொ.ப.: 330 வார்த்தைகள் எழுத 1.375 செ.மீ^{3} மை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$\therefore$ ஒரு லிட்டரில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு மையைப் பயன்படுத்தி எழுதப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

[$\because$ 1000 செ.மீ^{3} = 1 லி; $\frac{1}{5} \times 1000$ செ.மீ^{3}; 200 செ.மீ^{3}]

$= \frac{330}{1.375} \times 200 = 48000$ வார்த்தைகள்

2. ஆரம் 1.75 மீ உள்ள ஓர் அரைக்கோள வடிவத் தொட்டி முற்றிலும் நீரால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. ஒரு குழாயின் மூலம் விநாடிக்கு 7 லிட்டர் வீதம் தொட்டியிலிருந்து நீர் வெளியேற்றப்படுமானால் தொட்டியை எவ்வளவு நேரத்தில் முழுவதுமாகக் காலி செய்யலாம்?

தீர்வு :

அரைக்கோள வடிவத் தொட்டியின் ஆரம் 'r' = 1.75 மீ

அரைக்கோளத் தொட்டியின் கொள்ளளவு

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (1.75)^3$

$= 11.225$ மீ^{3}

$= 11225$ லிட்டர்

கொடுக்கப்பட்டது: உருளை வடிவக் குழாய் மூலம் விநாடிக்கு 7 லிட்டர் வீதம் தொட்டியிலிருந்து நீர் வெளியேற்றப்படுகிறது.

∴ தொட்டியைக் காலி செய்யத் தேவைப்படும் நேரம்

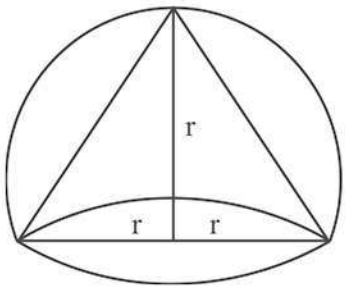
$= \frac{\text{கன அளவு}}{\text{வீதம்}}$

$= \frac{11225}{7} = 1604$ விநாடிகள் (தோராயமாக)

$= 27$ நிமிடங்கள் (தோராயமாக)

3. r அலகுகள் ஆரம் கொண்ட ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்திலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படும் கூம்பின் மீப்பெரு கனஅளவு என்ன?

தீர்வு :



அரைக்கோளத்தின் ஆரம் = r அலகுகள்

கூம்பின் ஆரம் = அரைக்கோளத்தின் ஆரம்

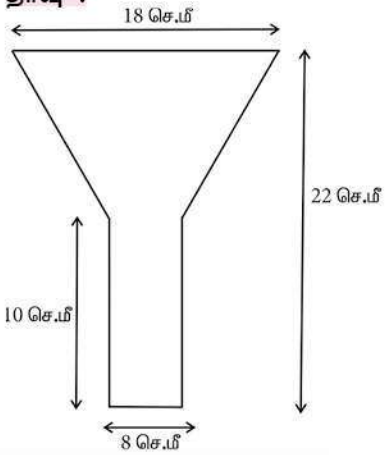
கூம்பின் உயரம் = அரைக்கோளத்தின் ஆரம்

∴ கூம்பின் மீப்பெரு கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன. அலகுகள்

$= \frac{1}{3}\pi\left(r^2\right)r = \frac{1}{3}\pi r^3$ கன. அலகுகள்

4. ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டம் 10 செ.மீ நீளமுள்ள ஓர் உருளையுடன் இணைக்கப்பட்ட எண்ணெய்ப் புனலின் மொத்த உயரம் 22 செ.மீ ஆகும். உருளையின் விட்டம் 8 செ.மீ மற்றும் புனலின் மேற்புற விட்டம் 18 செ.மீ எனில், புனலை உருவாக்கத் தேவையான தகர அட்டையின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :



தேவைப்படும் தகர அட்டையின் பரப்பளவு = உருளையின் வளைபரப்பு + இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு

உருளை:

ஆரம் = 4 செ.மீ

உயரம் = 10 செ.மீ

வளைபரப்பு $= 2\pi rh$ ச.அலகுகள்

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 10 = \frac{1760}{7}$ சதுர.அலகுகள்

கூம்பின் இடைக்கண்டம்:

r_1 = மேற்புற ஆரம் = 9 செ.மீ

r_2 = அடிப்புற ஆரம் = 4 செ.மீ

உயரம் = 22 – 10 = 12 செ.மீ

சாயுயரம் $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$= \sqrt{12^2 + (9-4)^2}$

$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ செ.மீ

வளைபரப்பு $= \pi(r_1 + r_2)l$ சதுர.அலகுகள்

$= \frac{22}{7}(9 + 4)(13)$

$= \frac{3718}{7}$ சதுர.அலகுகள்

∴ தகர அட்டையின் பரப்பளவு $= \frac{1760}{7} + \frac{3718}{7}$

$= \frac{5478}{7} = 782.57$ செ.மீ^{2}

5. உயரம் 10 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 4.5 செ.மீ உடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளையை உருவாக்க 1.5 செ.மீ விட்டமும், 2 மி.மீ தடிமன் கொண்ட எத்தனை வட்ட வில்லைகள் தேவை?

தீர்வு :

வில்லை என்பது உருளை வடிவில் உள்ளது.

வில்லையின் விட்டம்= 1.5 செ.மீ

$$\text{வில்லையின் ஆரம்} = \frac{1.5}{2}$$

$$\text{தடிமன்} = \text{உயரம்} = 2 \text{ மி.மீ} = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ செ.மீ}$$

வில்லை (உருளையின்) கன அளவு

$$= \pi r^2 h$$

$$= \pi \left(\frac{1.5}{2}\right)^2 (0.2)$$

$$= 0.1125\ \pi \text{ செ.மீ}^3$$

உருளையின் விட்டம் = 4.5 செ.மீ

$$\text{ஆரம்} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ செ.மீ}$$

உயரம் = 10 செ.மீ

கன அளவு $= \pi r^2 h$ சதுர அலகுகள்

$$= \pi (2.25)^2 (10)$$

$$= 50.625\ \pi$$

∴ வில்லைகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{உருளையின் கன அளவு}}{\text{வில்லையின் கன அளவு}}$$

$$= \frac{50.625\ \pi}{0.1125\ \pi} = 450 \text{ வில்லைகள்}$$

6. ஓர் உள்ளீடற்ற உலோக உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் 4.3 செ.மீ, உட்புற ஆரம் 1.1 செ.மீ மற்றும் நீளம் 4 செ.மீ. உலோக உருளையை உருக்கி 12 செ.மீ நீளமுள்ள வேறொரு திண்ம உருளை உருவாக்கப்பட்டால் புதிய உருளையின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

உள்ளீடற்ற உலோக உருளை

வெளிப்புற ஆரம் R =4.3 செ.மீ

உட்புற ஆரம் r =1.1 செ.மீ

நீளம் = உயரம் = h = 4 செ.மீ

கன அளவு $= \pi(R^2 - r^2)h$ கன.அலகுகள்

$$= \pi\left((4.3)^2 - (1.1)^2\right)(4)$$

$$= \pi\ (18.49 - 1.21)\ 4$$

$$= 69.12\ \pi \text{ செ.மீ}^3$$

திண்ம உருளை

உயரம் h = 12 செ.மீ

ஆரம் r = ?

கன அளவு $= \pi r^2 h$ சதுர.அலகுகள்

$$= \pi r^2\ (12)$$

கொடுக்கப்பட்ட உள்ளீடற்ற உருளை உருக்கப்பட்டு, திண்ம உருளையாக மாற்றப்படுகிறது.

∴ உருளையின் கன அளவு = உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு

$$\pi r^2 (12) = 69.12\ \pi$$

$$r^2 = \frac{69.12}{12} = 5.76$$

$$r = 2.4 \text{ செ.மீ}$$

உருளையின் விட்டம் = 2r = 4.8 செ.மீ

7. ஓர் இடைக்கண்டத்தின் இரு முனைகளின் சுற்றளவுகள் 18 மீ, 16 மீ மற்றும் அதன் சாயுயரம் 4 மீ ஆகும். ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 100 வீதம் இடைக்கண்டத்தின் வளைப்பரப்பில் வர்ணம் பூச ஆகும் மொத்தச் செலவு என்ன?

தீர்வு :

சாயுயரம் l = 4 மீ

பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு

$$= 2\pi R = 18 \text{ மீ}$$

$$R = \frac{9}{\pi} = \frac{63}{22} \text{ மீ}$$

சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு

$$= 2\pi r = 16 \text{ மீ}$$

$$r = \frac{8}{\pi} = \frac{56}{22} \text{ மீ}$$

கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு

$= \pi l\ (R + r)$ சதுர அலகுகள்

$$= \frac{22}{7} \times 4 \times \left(\frac{63}{22} + \frac{56}{22}\right)$$

$$= \frac{4}{7}\ (119) = 68 \text{ மீ}^2$$

ஒரு சதுர மீட்டருக்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு = ₹. 100

∴ 68 சதுர மீட்டருக்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு = 68 × 100

= ₹. 6800

8. ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோளக் கிண்ணத்தை உருவாக்கப் பயன்பட்ட பொருளின் கனஅளவு $\frac{436\pi}{3}$ க.செ.மீ ஆகும். கிண்ணத்தின் வெளிவிட்டம் 14 செ.மீ எனில் அதன் தடிமனைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வெளிப்புற விட்டம்
$= 2R = 14$ செ.மீ

$\therefore$ வெளிப்புற ஆரம்
$R = 7$ செ.மீ

கொடுக்கப்பட்ட கன அளவு

$$= \frac{436\pi}{3} \text{ செ.மீ}^3$$

$$\frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3) = \frac{436\pi}{3}$$

$$R^3 - r^3 = 218$$

$$(7)^3 - r^3 = 218$$

$\therefore r^3 = 343 - 218 = 125 = 5$ செ.மீ

$\therefore$ தடிமன் $= R - r = 7 - 5 = 2$ செ.மீ

9. ஒரு கூம்பின் கன அளவு $1005\frac{5}{7}$ க.செ.மீ மற்றும் கீழ் வட்டப்பரப்பு $201\frac{1}{7}$ ச.செ.மீ எனில், அதன் சாயுயரம் காண்க.

தீர்வு :

கூம்பின் கன அளவு $= 1005\frac{5}{7}$ க.செ.மீ

அதாவது, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 1005\frac{5}{7}$ ... (1)

அடிப்பக்க பரப்பு = வட்டத்தின் பரப்பு

$= 201\frac{1}{7}$ சதுர அலகுகள்

அதாவது, $\pi r^2 = 201\frac{1}{7} \Rightarrow r^2 = 64$

(1) –ல் பிரதியிட, $r = 8$ செ.மீ

$$\frac{1}{3}\left(201\frac{1}{7}\right) h = 1005\frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1408}{7}\right) h = \frac{7040}{7}$$

$$h = \frac{7040}{7} \times \frac{7}{1408} \times 3 = 15 \text{ செ.மீ}$$

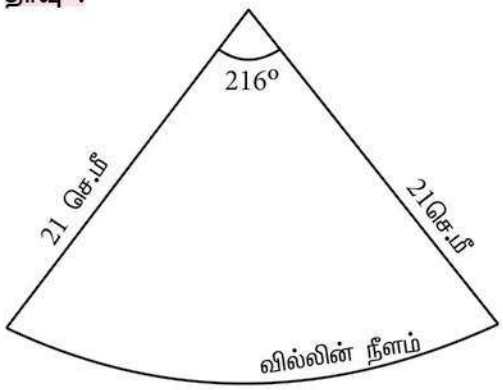
$\therefore$ கூம்பின் சாயுயரம் $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64}$

$= \sqrt{289} = 17$ செ.மீ

10. ஒரு வட்டக்கோண வடிவில் உள்ள உலோகத் தகட்டின் ஆரம் 21 செ.மீ மற்றும் மையக்கோணம் 216° ஆகும். வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரங்களை இணைத்து உருவாக்கப்படும் கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :



வட்டக் கோணப் பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r_1$$

$$= \frac{216^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 21$$

$$= \frac{3}{5}(2\pi)(21) = \frac{126\pi}{5} \text{ செ.மீ}$$

வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரங்களை இணைத்து கூம்பு உருவாக்கப்படுவதால்.

கூம்பின் அடிப்பகுதியின் சுற்றளவு = வட்டக்கோணப்பகுதியின் வில்லின் நீளம்

$$\therefore 2\pi r = \frac{126\pi}{5}$$

கூம்பின் அடிப்பக்க ஆரம், $r = \frac{63}{5}$ செ.மீ

வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரம் = கூம்பின் சாயுயரம்

$21 = l$

கூம்பின் உயரம், $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$$= \sqrt{(21)^2 - \left(\frac{63}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{441 - 158.76}$$

$= \sqrt{282.24} = 16.8$ செ.மீ

$\therefore$ கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ச.அலகுகள்

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12.6 \times 12.6 \times 16.8$$

$$= \frac{58677.696}{21}$$

$= 2794.176 = 2794.18$ செ.மீ^{3}

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்

புறப்பரப்பு

1. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பானது, மூலைவிட்டம் $2\sqrt{2}$ செ.மீ உள்ள ஒரு சதுரமாக மாற்றப்படுகிறது எனில், உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பைக் காண்க. (சதுர செ.மீ-ல்)

(1) 3π (2) $\frac{1}{\pi}$

(3) π (4) 6π **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

மூலைவிட்டம் $\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$

சதுரத்தின் பக்கம் 'a' $= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ செ.மீ

சதுரத்தின் பக்கம் = அடிப்பக்க சுற்றளவு = 2 செ.மீ

அதாவது, $2\pi r = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{\pi}$

$\therefore$ உருளையின் அடிப்பகுதியின் பரப்பு $= \pi r^2$

$= \pi\left(\frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi}$

2. 24 மீட்டர் உயரமும், 7 மீட்டர் ஆரமும் கொண்ட ஒரு கூம்பு வடிவக் கூடாரத்தை அமைப்பதற்கு, 2.5 மீட்டர் அகலம் கொண்ட எத்தனை மீட்டர் துணி தேவைப்படுகிறது?

(1) 210 மீ (2) 220 மீ

(3) 230 மீ (4) 240 மீ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

சாயுயரம் $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 7^2}$

$= \sqrt{625} = 25$ மீ

தேவைப்படும் துணியின் பரப்பளவு

= கூம்பின் வளைபரப்பு

$= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550$ மீ^{2}

$\therefore$ துணியின் நீளம் $= \frac{550}{2.5} = 220$ மீ

3. ஒரு அரைக்கோளத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(1) 942.86 செ.மீ^{2} (2) 900 செ.மீ^{2}

(3) 300 செ.மீ^{2} (4) 592.86 செ.மீ^{2} **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10$

$= \frac{6600}{7}$

$= 942.86$ செ.மீ^{2}

4. ஆரம் 11.3 செ.மீ கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் வளைபரப்பு 355 செ.மீ^{2} எனில், அதன் சாயுயரம்.

(1) 8 செ.மீ (2) 9 செ.மீ

(3) 10 செ.மீ (4) 11 செ.மீ **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

$r = 11.3$, வளைபரப்பு $= 355$

$\pi rl = 355$

$\frac{22}{5} \times 11.3 \times l = 355$

$l = \frac{355 \times 7}{22 \times 11.3} = 10$ செ.மீ

(தோராயமாக)

5. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் உயரம் 15 செ.மீ மற்றும் அடிப்பக்க விட்டம் 16 செ.மீ எனில், அதன் வளைபரப்பு

(1) 146π (2) 116π

(3) 126π (4) 136π **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

$h = 15$, $r = \frac{16}{2} = 8$

$l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$

வளைபரப்பு $= \pi rl$

$= \pi \times 8 \times 17$

$= 136\pi$ செ.மீ^{2}

6. ஒரு உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம் 80 செ.மீ மற்றும் உயரம் 20 செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்புக்கும், வளைபரப்புக்கும் உள்ள விகிதம்

(1) 1 : 5 (2) 2 : 3
(3) 5 : 1 (4) 3 : 2 **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

வளைபரப்பு $= 2\pi rh$,

மொத்த புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h+r)$

விகிதம் $= \frac{\text{மொத்தப் புறப்பரப்பு}}{\text{வளைபரப்பு}}$

$= \frac{2\pi r(h+r)}{2\pi rh}$

$= \frac{h+r}{h}$

$= \frac{20+80}{20}$

$= \frac{100}{20} = \frac{5}{1}$

7. விட்டம் 'r' அலகைக் கொண்ட கோளத்தின் புறப்பரப்பு (சதுர அலகில்)

(1) $2\pi r^2$ (2) πr^2
(3) $\frac{\pi r^2}{2}$ (4) $\frac{\pi r^2}{4}$ **[விடை:(2)]**

தீர்வு :

விட்டம் = r, ஆரம் $= \frac{r}{2}$

புறப்பரப்பு $= 4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$

$= 4\pi\left(\frac{r^2}{4}\right) = \pi r^2$

8. ஆரம் $\frac{r}{2}$ மற்றும் உயரம் $2l$ ஐக் கொண்ட கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு (சதுர அலகில்)

(1) $2\pi r(l+r)$ (2) $\pi r\left(l+\frac{r}{4}\right)$
(3) $\pi r(l+r)$ (4) $2\pi rl$ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi R(L+R)$

$= \pi\left(\frac{r}{2}\right)\left(2l+\frac{r}{2}\right)$

$= \pi r\left(l+\frac{r}{4}\right)$

9. ஒரு கூம்பின் இடைக் கண்டத்தின் சாயுயரம் 4 செ.மீ மற்றும் அதன் இரண்டு வட்டப் பகுதிகளின் சுற்றளவுகள் முறையே 18 செ.மீ மற்றும் 6 செ.மீ எனில், அதன் வளைபரப்பு (சதுர செ.மீ -ல்)

(1) 12 (2) 24
(3) 48 (4) 54 **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

சுற்றளவு $2\pi R = 18 \Rightarrow \pi R = 9$

$2\pi r = 6 \Rightarrow \pi r = 3$

இடைக்கண்டத்தின் வளைப்பரப்பு

$= \pi l(R+r)$

$= l(\pi R + \pi r)$

$= 4(9+3)$

$= 48$ செ.மீ^{2}

10. சம ஆரம் 'r' ஐக் கொண்ட இரண்டு திண்ம அரைக் கோளங்களின் அடிப்பக்கங்களை ஒன்றாக இணைக்கும் பொழுது உருவாகும் புதிய திண்மத்தின் வளைபரப்பு (சதுர அலகில்)

(1) $4\pi r^2$ (2) $6\pi r^2$
(3) $3\pi r^2$ (4) $8\pi r^2$ **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

இரு அரைக்கோளங்களை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் புதிய திண்மம் கோளமாகும்.

கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4\pi r^2$

கன அளவு

11. x மற்றும் y என்பன சம உயரங்களைக் கொண்ட இரு உருளைகள் என்க. உருளை 'x' ன் அடிப்பக்க விட்டம் உருளை 'y' ன் அடிப்பக்க விட்டத்தில் பாதியாகும். மேலும் 'x' ன் உயரம் இரு மடங்கு ஆக்கப்பட்டால், x ன் கன அளவு

(1) y ன் கன அளவிற்குச் சமம்
(2) y ன் கன அளவின் இரு மடங்கு
(3) y ன் கன அளவில் பாதி
(4) y ன் கன அளவை விட அதிகம் **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

x, y என்ற இரு உருளைகளின் உயரங்களை 'h' எனவும், ஆரங்கள் முறையே 'r', '2r' எனவும் கொள்க.

x -ன் கன அளவு $= \pi r^2 h$ மற்றும்

y ன் கன அளவு $= \pi(2r)^2 h = 4\pi r^2 h$

x ன் கன அளவு $= \pi r^2(2h)$

$= 2\pi r^2 h$

$= \frac{1}{2}$ (y -ன் கன அளவு)

12. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் அடிப்பக்கப் பரப்பு 78.5 செ.மீ² மற்றும் 12 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு

(1) 341 செ.மீ³ (2) 314 செ.மீ³
(3) 301 செ.மீ³ (4) 304 செ.மீ³ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

அடிப்பக்கப் பரப்பு = 78.5

அதாவது, πr^2 = 78.5

மற்றும் h = 12

கன அளவு = $\frac{1}{3}(\pi r^2)h$

= $\frac{1}{3}(78.5)(12)$

= 314 செ.மீ³

13. ஒரு உருளை வடிவத் தூணின் வளைபரப்பு 264 மீ² மற்றும் அதன் கன அளவு 924 மீ³ எனில், அதன் விட்டம்

(1) 12 மீ (2) 13 மீ
(3) 14 மீ (4) 15 மீ **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

வளைபரப்பு = $2\pi rh$ = 264 ... (1)

கன அளவு = $\pi^2 rh$ = 924 ... (2)

$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{924}{264} \Rightarrow r = 7$

∴ விட்டம் = 2(7) = 14 மீ

14. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு 38808 செ.மீ³, எனில் அதன் புறப்பரப்பு

(1) 5544 செ.மீ² (2) 4455 செ.மீ²
(3) 4545 செ.மீ² (4) 5454 செ.மீ² **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

கன அளவு = $\frac{4}{3}\pi r^3$ = 38808

r^3 = 9261 = $(21)^3$

r = 21

∴ புறப்பரப்பு = $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

= 5544 செ.மீ²

15. இரண்டு உருளைகளின் கன அளவுகளின் விகிதம் a : b மற்றும் அவற்றின் உயரங்களின் விகிதம் c : d எனில் அவற்றின் விட்டங்களின் விகிதம்

(1) $\frac{ad}{bc}$ (2) $\frac{ad^2}{bc^2}$

(3) $\sqrt{\frac{ad}{bc}}$ (4) $\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}}$ **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

r_1, r_2 என்பன முறையே இரு உருளைகளின் ஆரங்கள் எனவும் ck, dk என்பன இரு உருளைகளின் உயரங்கள் எனவும் கொள்க.

∴ கன அளவுகளின் விகிதம் = $\frac{\pi r_1^2 ck}{\pi r_2^2 dk} = \frac{a}{b}$ (கொ.ப)

$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$

16. ஆரம் 6 செ.மீ கொண்ட ஒரு அரைக்கோளக் கொள்கலனில் 325 மி.லி. பால் உள்ளது எனில் கொள்கலனை முழுமையாக நிரப்புவதற்குத் தேவைப்படும் மீதிப் பாலின் கன அளவு

(1) 124.75 மி.லி (2) 127.45 மி.லி
(3) 217.45 மி.லி (4) 117.45 மி.லி **[விடை:(2)]**

தீர்வு :

கொள்கலனின் கன அளவு = $\frac{2}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்

= $\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^3$ செ.மீ³

= 452.45 மி.லி

∴ கொள்கலனை நிரப்புவதற்கு தேவைப்படும் பாலின் அளவு = 452.45 – 325

= 127.45 மி.லி

17. ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் வெளி மற்றும் உள் விட்டங்கள் முறையே 10 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு (செ.மீ³)

(1) 121.87 (2) 121.78
(3) 128.71 (4) 127.81 **[விடை:(4)]**

தீர்வு :

வெளிப்புற ஆரம் R = $\frac{10}{2}$ = 5 செ.மீ

உட்புற ஆரம் r = $\frac{8}{2}$ = 4 செ.மீ

கன அளவு = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$

= $\frac{2}{3} \times \frac{22}{7}(5^3 - 4^3)$

= $\frac{2}{3} \times \frac{22}{7}(61)$

= 127.81 செ.மீ³

18. ஒரு கோளத்தின் கன அளவு மற்றும் புறப்பரப்பு ஆகியவை எண்ணளவில் சமம் எனில், அதன் ஆரம்

(1) 2 அலகுகள் (2) 3 அலகுகள்
(3) 4 அலகுகள் (4) 5 அலகுகள் **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

கன அளவு = புறப்பரப்பு

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$$

$$r = 3$$

19. ஒரு கூம்பின் ஆரம் பாதியாகக் குறைக்கப்பட்டால், அதன் புதிய கன அளவு

(1) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$ (2) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 h$

(3) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{9}\right)^2 h$ (4) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r^2}{4}\right)\left(\frac{h}{2}\right)$ **[விடை: (2)]**

இணைந்த திண்மங்கள்

20. ஆரம் 'r' செ.மீ மற்றும் உயரம் 'h' செ.மீ (h > 2r) கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளை, கோளத்தை அகத்தே கொண்டுள்ளது எனில், கோளத்தின் விட்டம்

(1) r செ.மீ (2) 2r செ.மீ
(3) h செ.மீ (4) 2h செ.மீ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

கோளத்தின் விட்டம் = உருளையின் அடிப்பக்க விட்டம்

$$= 2r$$

21. சம ஆரம் 8 செ.மீ மற்றும் சம உயரம் 15 செ.மீ கொண்ட இரு கூம்புகளின் அடிப்பக்கங்கள் இணைக்கப்படுகிறது எனில், உருவாகும் புதிய திண்மத்தின் புறப்பரப்பு

(1) 854 செ.மீ^{2} (2) 860 செ.மீ^{2}
(3) 864 செ.மீ^{2} (4) 870 செ.மீ^{2} **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

சாயுயரம் $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$= \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$$

புறப்பரப்பு $= 2(\pi r l)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8 \times 17 = 854.08 \text{ செ.மீ}^2$$

22. ஒரு உருளை, கோளத்தைக் கொண்டுள்ளது எனில் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்.

(1) 1 : 2 (2) 3 : 2
(3) 4 : 3 (4) 5 : 6 **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

'h' என்பது உருளையின் உயரம் என்க.

கோளத்தின் ஆரம் $= \frac{h}{2}$ = உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம்.

இப்போது, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3} = \frac{\pi\frac{h^3}{4}}{4\pi\frac{h^3}{24}} = 3:2$

23. ஒரு கோளம் மற்றும் கன சதுரத்தின் புறப்பரப்புகள் சமம் எனில், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(1) $\sqrt{6} : \sqrt{\pi}$ (2) $\sqrt{3} : \sqrt{\pi}$
(3) $\pi : \sqrt{2}$ (4) எதுவுமில்லை **[விடை: (1)]**

தீர்வு :

கோளத்தின் புறப்பரப்பு = கன சதுரத்தின் புறப்பரப்பு

$$4\pi r^2 = 6a^2$$

$$r^2 = \frac{6a^2}{4\pi} = \frac{3a^2}{2\pi}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}$$

கன அளவுகளின் விகிதம்

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)^3}{a^3}$$

$$= \frac{4\pi 3\sqrt{3}}{3.2\sqrt{2}\pi\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}$$

24. 'R' அலகு ஆரத்தைக் கொண்ட கோளத்தின் கன அளவும், R' அலகு ஆரத்தைக் கொண்ட கூம்பின் கன அளவும் சமம் எனில், கூம்பின் உயரம் என்பது

(1) R (2) 2R
(3) 3R (4) 4R **[விடை: (4)]**

திண்மங்களை வேறு திண்மங்களாக மாற்றுதல்

25. ஆரம் 2.1 செ.மீ மற்றும் உயரம் 8.4 செ.மீ கொண்ட கூம்பு உருக்கப்பட்டு கோளமாக மாற்றப்படுகிறது எனில், கோளத்தின் ஆரம்.

(1) 4.2 செ.மீ (2) 2.1 செ.மீ
(3) 2.4 செ.மீ (4) 1.6 செ.மீ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2.1)^2(8.4)$

கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r_1^3$

கொ.ப: $\frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{1}{3}\pi(2.1)^2(8.4)$

$r_1^3 = (2.1)^3$

$r_1 = 2.1$ செ.மீ

26. அடிப்பக்க விட்டம் 14 செ.மீ கொண்ட இரும்புப்பந்து ஒன்று ஒரு தண்ணீருள்ள பாத்திரத்தில் இடப்படுகிறது. தண்ணீரின் மட்டம் $9\frac{1}{3}$ செ.மீ உயர்கிறது எனில், இடப்பட்ட பந்தின் ஆரம் என்ன?

(1) 3.5 செ.மீ (2) 7 செ.மீ
(3) 9 செ.மீ (4) 12 செ.மீ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

கோளப்பந்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$

இப்போது, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi(7)^2\left(\frac{28}{3}\right)$

$r^3 = 7^3$

$\Rightarrow r = 7$

27. ஆரங்கள் முறையே 1 செ.மீ, 6 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ கொண்ட மூன்று தங்கக் கோளத் திண்மங்கள் உருக்கப்பட்டு ஒரே கோளமாக மாற்றப்படுகிறது எனில், கோளத்தின் ஆரம் என்ன?

(1) 7 செ.மீ (2) 8 செ.மீ
(3) 9 செ.மீ (4) 10 செ.மீ **[விடை: (3)]**

தீர்வு :

புதிய கோளத்தின் ஆரம் $= \left[(1^3 + 6^3 + 8^3)\right]^{\frac{1}{3}}$

$= (729)^{\frac{1}{3}} = 9$

28. 18 செ.மீ விட்டம் கொண்ட ஒரு தாமிரக் கோளம் 4 மி.மீ விட்டமுள்ள கம்பியாக மாற்றப்படுகிறது எனில், கம்பியின் நீளம்

(1) 143 மீ (2) 243 மீ
(3) 343 மீ (4) 443 மீ **[விடை: (2)]**

தீர்வு :

கோளத்தின் கன அளவு = மின் கம்பி(உருளையின்) கன அளவு

$\frac{4}{3}\pi(9\times9\times9) = \pi\times0.2\times0.2\times h$

$\therefore h = \frac{972\times5\times5}{100} = 243$ மீ

29. ஆரம் 9 செ.மீ உள்ள ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தில் திரவம் உள்ளது. இத்திரவமானது, 3 செ.மீ விட்டமும், 4 செ.மீ உயரமுள்ள சிறு சிறு உருளை வடிவக் குப்பிகளில் நிரப்பப்படுகிறது எனில், கிண்ணத்தில் உள்ள திரவம் காலியாவதற்கு எத்தனை குப்பிகள் தேவை?

(1) 24 (2) 34
(3) 44 (4) 54 **[விடை: (4)]**

தீர்வு :

கிண்ணத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi(9)^3 = 486\pi$

குப்பியின் கன அளவு $= \pi\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times4 = 9\pi$

$\therefore$ குப்பிகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{486\pi}{9\pi} = 54$

II. இரு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. உயரம் 14 செ.மீ கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு 88 செ.மீ ^{2} எனில் அதன் அடிப்பக்க விட்டத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

உருளையின் ஆரம் r = r செ.மீ

உயரம் 'h' = 14 செ.மீ

வளைபரப்பு = $2\pi rh$ ச.அ

$\therefore 2\pi rh = 88$

$2\times\frac{22}{7}\times r\times14 = 88$

$r = 1$ செ.மீ

அடிப்புற விட்டம் $= 2\times1 = 2$ செ.மீ.

2. தண்ணீரை சூடாக்கக் கூடிய ஒரு சாதனத்தில், 28 மீ நீளமும் 5 செ.மீ விட்டமும் கொண்ட ஒரு உருளை வடிவக் குழாய் உள்ளது. சூடாக்கப்படும் புறப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

சூடாகும் மொத்த மேற்பரப்பு (கதிர்வீச்சு) = உருளை வடிவக் குழாயின் வளைப்பரப்பு

$= 2\pi rh$

உயரம் h = 28 மீ

ஆரம் r = $\frac{5}{2}$ செ.மீ

= 2.5 செ.மீ = 0.025 மீ

∴ சூடாகும் மொத்தப்பரப்பு = $2\pi rh$

= $2 \times \frac{22}{7} \times 0.025 \times 28$

= 4.4 மீ^{2}

3. ஒரு கூம்பின் சாயுயரம் 21 மீ மற்றும் அடிப்புற விட்டம் 24 மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

விட்டம் = 24 மீ

ஆரம் r = $\frac{24}{2}$ = 12 மீ

சாயுயரம் l = 21 மீ

மொத்தப் புறப்பரப்பு = $\pi r(l + r)$ சதுர அலகுகள்

= $\frac{22}{7} \times 12 \times (21 + 12)$

= 1244.57 மீ^{2} (தோராயமாக)

4. ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு 154 செ.மீ^{2} எனில், அதன் ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

மொத்தப் புறப்பரப்பு = $4\pi r^2$

$4\pi r^2$ = 154

$4 \times \frac{22}{7} \times r^2$ = 154

$r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22}$ = 12.25

r = $\sqrt{12.25}$ = 3.5

ஆரம் = 3.5 செ.மீ

5. இரும்பினால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு உள்ளீடற்ற அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் தடிமன் 0.25 செ.மீ மற்றும் அதன் உட்புற ஆரம் 5 செ.மீ எனில், அதன் வெளிப்புற வளைபரப்பைக் காண்க .

தீர்வு:

உட்புற ஆரம் r = 5 செ.மீ

தடிமன் = 0.25 செ.மீ

வெளிப்புற ஆரம் R = 5 + 0.25 = 5.25 செ.மீ

∴ வெளிப்புற வளைபரப்பு = $2\pi R^2$ சதுர அலகுகள்

= $2 \times \frac{22}{7} \times (5.25)^2$

= 173.25 செ.மீ^{2}

6. ஒரு வாளியின் வட்டப் பகுதிகளின் ஆரங்கள் 15 செ.மீ, 5 செ.மீ மற்றும் உயரம் 24 செ.மீ எனில், அதன் வளைபரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப: R = 15 செ.மீ, r = 5 செ.மீ, h = 24 செ.மீ

$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

= $\sqrt{(24)^2 + (15 - 5)^2}$

= $\sqrt{676}$ = 26 செ.மீ

வளைபரப்பு = $\pi l(R + r)$

= $\frac{22}{7} \times 26 \times (15 + 5)$

= $\frac{11440}{7}$ = 1634.28 செ.மீ^{2}

7. ஒரு உருளை வடிவப் பாத்திரத்தின் அடிப்பக்க சுற்றளவு 132 செ.மீ மற்றும் உயரம் 25 செ.மீ எனில் அப்பாத்திரத்தில் எத்தனை லிட்டர் நீரை வைக்க முடியும்?

தீர்வு :

ஆரம் = r, உயரம் = h

சுற்றளவு $2\pi r$ = 132

$\Rightarrow$ r = 21 செ.மீ

கன அளவு = $\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

= $\frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 25$

= 34650 செ.மீ^{3}

தண்ணீரின் அளவு = $\frac{34650}{1000}$ லிட்டர்

[$\because$ 1000 செ.மீ^{3} = 1 லிட்டர்]

= 34.65 லிட்டர்

8. ஒரு கூம்பின் உயரம் 15 செ.மீ மற்றும் கன அளவு 1570 செ.மீ^{3} எனில், அதன் அடிப்பக்க ஆரம் காண்க.

தீர்வு :

h = 15 செ.மீ, ஆரம் = r

கன அளவு $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ = 1570

$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 15$ = 1570

r = $\sqrt{100}$

அடிப்பக்க ஆரம் r = $\sqrt{100}$ = 10 செ.மீ

9. ஒரு கோளப் பந்தின் விட்டம் 0.21 செ.மீ எனில், அதனால் வெளியேற்றப்படும் தண்ணீரின் அளவு யாது?

தீர்வு :

விட்டம் = 0.21 செ.மீ

ஆரம் = $\frac{0.21}{2}$ = 0.105 செ.மீ

வெளியேற்றப்படும் தண்ணீரின் அளவு = பந்தின் கன அளவு

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(0.105)^3$

$= 0.004851$ செ.மீ^{3}

10. கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் உள்ள ஒரு டம்ளரின் உயரம் 14 செ.மீ. அதன் இரு வட்டப் பகுதிகளின் விட்டங்கள் முறையே 4 செ.மீ மற்றும் 2 செ.மீ எனில், அந்த டம்ளரின் கொள்ளளவு காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப: R = 2 செ.மீ, r = 1 செ.மீ

டம்ளரின் கொள்ளளவு = இடைக்கண்டத்தின் சுற்றளவு

$= \frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$ கன அலகுகள்

$= \frac{22}{7}\times\frac{14}{3}((2)^2\times(2\times1)+(1)^2)$

$= \frac{44}{3}(4+2+1)$

$= \frac{308}{3}$

$= 102.67$ செ.மீ^{3}

11. ஒரு கூம்பின் ஆரம் 20 செ.மீ மற்றும் கன அளவு 8800 செ.மீ^{3} எனில், அதன் உயரம் காண்க.

தீர்வு :

உயரம் = h செ.மீ என்க

ஆரம் = 20 செ.மீ

கன அளவு = 8800செ.மீ^{3}

கன அளவு = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 8800$

$\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times20\times20\times h = 8800$

$h = \frac{8800\times3\times7}{22\times20\times20}$

உயரம் = 21 செ.மீ

12. ஒரு சமமாக்கும் உருளையின் விட்டம் 84 செ.மீ மற்றும் நீளம் 120 செ.மீ. ஒரு விளையாட்டு மைதானத்தை முழுமையாக சமப்படுத்துவதற்கு, உருளையானது 500 சுற்றுகள் எடுத்துக் கொண்டால், விளையாட்டு மைதானத்தின் பரப்பளவை சதுர மீட்டரில் காண்க.

தீர்வு :

சமமாக்கும் உருளையின் விட்டம் = 84 செ.மீ

ஆரம் = $\frac{84}{2}$ = 42 செ.மீ = 0.42 மீ

உயரம் = h = 120 செ.மீ = 1.2 மீ

ஒரு சுழற்சியில் சமமாக்கும் உருளையால் அடைபடும் பரப்பு = உருளையின் வளைபரப்பு

$= 2\pi rh$

$= 2\times\frac{22}{7}\times0.42\times1.2$

$= 3.168$ மீ^{2}

∴ 500 சுழற்சிகளில் அடைபடும் பரப்பு

= விளையாட்டு மைதானத்தின் பரப்பு

= 500×3.168 = 1584 சதுர மீ

13. ஒரு கூம்பு வடிவக் கல்லறையின் சாயுயரம் மற்றும் அடிப்புற விட்டம் முறையே 25 மீ, 14 மீ. 100 சதுர மீட்டருக்கு ₹. 210 என்ற முறையில் கல்லறையின் வளைபரப்புக்கு வெள்ளையடிக்க ஆகும் செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

விட்டம் = 14 மீ; ஆரம் = 7 மீ;

சாயுயரம் l = 25 மீ

வளைபரப்பு = $\pi rl = \frac{22}{7}\times7\times25$

= 550 மீ^{2}

கொ.ப.: 100 சதுர மீட்டருக்கு வெள்ளையடிக்க ஆகும் செலவு = ₹ 210

∴ கூம்பு வடிவக் கல்லறைக்கு வெள்ளையடிக்க ஆகும் செலவு = $550\times\frac{210}{100}$ = ₹ 1155

14. நிலவின் விட்டம் என்பது தோராயமாக பூமியின் விட்டத்தில் நான்கில் ஒரு பங்கு எனில், அவற்றின் புறப்பரப்புகளின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு :

பூமியின் விட்டம் 'R' என்க.

பூமியின் ஆரம் = $\frac{R}{2}$

நிலவின் விட்டம் $= \frac{1}{4}R$

நிலவின் ஆரம் $= \frac{R}{8}$

∴ நிலவு மற்றும் பூமி ஆகியவற்றின் புறப்பரப்புகளின் விகிதம்

$$= \frac{4\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2}{4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

∴ விகிதம் $= \frac{1}{16} = 1:16$

15. ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் வட்டப் பகுதிகளின் ஆரங்கள் முறையே 33 செ.மீ, 27 செ.மீ மற்றும் அதன் சாயுயரம் 10 செ.மீ எனில் அதன் மொத்தப் புறப் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப : R = 33 செ.மீ, r = 27 செ.மீ மற்றும் l = 10 செ.மீ

∴ இடைக்கண்டத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு

$= \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$

$= \frac{22}{7}((33)^2 + (27)^2 + 10(33 + 27))$

$= \frac{22}{7}(1089 + 729 + 600)$

$= \frac{53196}{7} = 7599.43$ செ.மீ^{2}

16. ஒரு திண்ம உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம் மற்றும் உயரத்தின் கூடுதல் 37 மீ. அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு 1628 மீ^{2} எனில், திண்ம உருளையின் அடிப்பக்க சுற்றளவையும், கன அளவையும் காண்க.

தீர்வு :

ஆரம் = r, உயரம் = h

மொத்தப்புறப்பரப்பு = 1628

$2\pi r(h + r) = 1628$

$2\pi r(37) = 1628$

$\Rightarrow$ r = 7 மீ

மற்றும் 7 + h = 37

$\Rightarrow$ h = 37 – 7 = 30 மீ

சுற்றளவு $= 2\pi r$

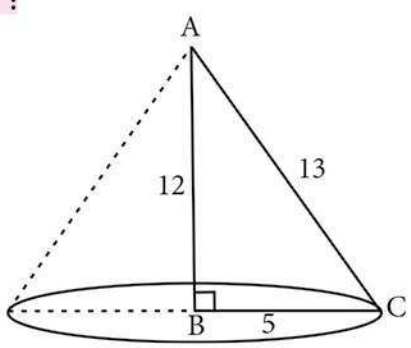
$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$ மீ

கன அளவு $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 30 = 4620$ மீ^{3}

17. ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABC ன் பக்கங்கள் 5 செ.மீ, 12 செ.மீ மற்றும் 13 செ.மீ . முக்கோணம் 12 செ.மீ நீளமுள்ள பக்கத்தைப் பற்றிச் சுழலும்போது உருவாகும் திண்மத்தின் கன அளவு காண்க.

தீர்வு :



முக்கோணம் ABC, AB = 12 செ.மீ என்ற பக்கத்தைப் பற்றிச் சுழல்கிறது.

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \frac{1}{3}\pi(5)^2(12)$

$= 100 \times \frac{22}{7}$

$= 314$ செ.மீ^{3} (தோராயமாக)

18. ஓர் உலோகப் பந்தின் விட்டம் 4.2 செ.மீ. உலோகத்தின் அடர்த்தி 1 கன செ.மீ க்கு 8.9 கிராம் எனில், அப்பந்தின் நிறையைக் காண்க.

தீர்வு :

விட்டம் = 4.2 செ.மீ;

ஆரம் = 2.1 செ.மீ

கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3$

$= 38.808$ செ.மீ^{3}

பந்தின் நிறை = கன அளவு × அடர்த்தி

$= 38.808 \times 8.9 = 345.3912$ கி

19. கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் வடிவிலுள்ள ஒரு வாளியின் உயரம் 24 செ.மீ மற்றும் மேல்புற, கீழ்ப்புற விட்டங்கள் முறையே 30 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ எனில், அந்த வாளியின் கொள்ளளவு காண்க.

தீர்வு :

கொ.ப: R $= \frac{30}{2} = 15$ செ.மீ, r $= \frac{10}{2} = 5$ செ.மீ

மற்றும் h = 24 செ.மீ

கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2)$ கன அலகுகள்

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 24 \times (15^2 + 15 \times 5 + 5^2)$

$= \frac{22}{7} \times 8 \times (225 + 75 + 25)$

$= \frac{57200}{7} = 8171.42$ செ.மீ^{3}

20. இரும்புத் தகடால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு அரைக்கோளத் தொட்டியின் தடிமன் 1 செ.மீ. அதன் உட்புற ஆரம் 1 மீ எனில், தொட்டி உருவாக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட இரும்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

உட்புற ஆரம் = 'r' மீ = 1 மீ

வெளிப்புற ஆரம் = 'R' மீ = 1 + 0.01 = 1.01 மீ

பயன்படுத்தப்பட்ட இரும்பின் கன அளவு

= வெளிப்புற கன அளவு – உட்புற கன அளவு

$= \frac{2}{3}\pi\,(R^3 - r^3)$ கன அலகுகள்

$= \frac{2}{3}\pi\,((1.01)^3 - 1^3)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.030301$

$= 0.06348$ மீ^{3} (தோராயமாக)

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. இரண்டு கூம்புகள் உள்ளன. ஒன்றின் வளைபரப்பு மற்றொன்றின் வளைபரப்பைப் போல் இரு மடங்கு மற்றும் இரண்டாவது கூம்பின் சாயுயரம் முதல் கூம்பின் சாயுயரத்தைப் போல் இரு மடங்கு எனில் அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் கூம்பின் ஆரம் r_1 சாயுயரம் l_1 எனவும், 2 –வது கூம்பின் ஆரம் r_2 சாயுயரம் l_2 எனவும், கொள்க.

முதல் கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi r_1 l_1$

2 –வது கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi r_2 l_2$

கொ.ப: $\pi r_1 l_1 = 2\pi r_2 l_2$

$\Rightarrow r_1 l_1 = 2r_2 l_2$

மற்றும் $r_1 l_1 = 2r_2 (2l_1)$

$r_1 l_1 = 4r_2 l_1$

$r_1 = 4r_2$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{1}$

எனவே, அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதம் 4 : 1

2. ஒரு கோளத்தின் விட்டம் 25% குறைக்கப்பட்டால், அதன் வளைபரப்பு எத்தனை சதவீதம் குறைக்கப்படும்?

தீர்வு :

விட்டம் 'x' அலகுகள் என்க.

ஆரம் $= \frac{x}{2}$ அலகுகள்

$\therefore$ கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4\pi r^2$ சதுர அலகுகள்

$= 4\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$= 4\pi\left(\frac{x^2}{4}\right) = \pi x^2$

விட்டம் 25% குறைக்கப்படுகிறது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

புதிய விட்டம் = x – x ன் 25%

$= x\left(1 - \frac{25}{100}\right) = \frac{3}{4}x$

புதிய ஆரம் $= \frac{3x}{8}$

புதிய கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= 4\pi\left(\frac{3x}{8}\right)^2 = \frac{9\pi x^2}{16}$

வளைபரப்பின் குறைவு $= \pi x^2 - \frac{9\pi x^2}{16} = \frac{7\pi x^2}{16}$

எனவே, குறைவின் சதவீதம்

$= \frac{\frac{7\pi x^2}{16}}{\pi x^2} \times 100\%$

$= 43.75\%$

3. ஒரு திண்ம உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 462 சதுர செ.மீ. இதன் வளைபரப்பு, மொத்தப் புறப்பரப்பின் மூன்றின் ஒரு பங்கு எனில், உருளையின் கன அளவு காண்க.

தீர்வு :

ஆரம் = r, உயரம் = h

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r\,(h + r)$ சதுர அலகுகள்

கொ.ப: $2\pi r\,(h + r) = 462$

$r\,(h + r) = \frac{462 \times 7}{2 \times 22} = \frac{147}{2}$ ... (1)

வளைபரப்பு $= 2\pi rh$ சதுர அலகுகள்

கொ.ப: $2\pi rh = \frac{1}{3}(2\pi r\,(h + r))$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{h+r}{3} \quad \Rightarrow \quad r = 2h \qquad \ldots (2)$$

(2) ஐ (1) –ல் பிரதியிட

$$2h\,(h + 2h) = \frac{147}{2}$$

$$6h^2 = \frac{147}{2}$$

$$h^2 = \frac{49}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad r = 2h = 2\left(\frac{7}{2}\right) = 7 \text{ செ.மீ}$$

$$\therefore \text{ கன அளவு } = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (7)^2 \left(\frac{7}{2}\right)$$

$$= 539 \text{ செ.மீ}^3$$

4. 24 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு கூம்பின் வளைபரப்பு 550 செ.மீ^{2} எனில், அதன் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

ஆரம் = r,

சாயுயரம் = l

மற்றும் $l^2 = r^2 + h^2$

$= r^2 + 24^2 = r^2 + 576$

வளைபரப்பு = $\pi r l$

$= \frac{22}{7} \times r \times \sqrt{r^2 + 576}$ செ.மீ^{2}

$$\frac{22}{7} \times r \times \sqrt{r^2 + 576} = 550$$

$$r\sqrt{r^2 + 576} = 175$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$r^2\,(r^2 + 576) = (175)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^4 + 576\,r^2 - (175)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r^2 - 49)\,(r^2 + 625) = 0$$

$r^2 + 625 \neq 0, \quad \therefore \quad r^2 - 49 = 0$

$$r^2 = 49$$

$$r = 7 \text{ செ.மீ.}$$

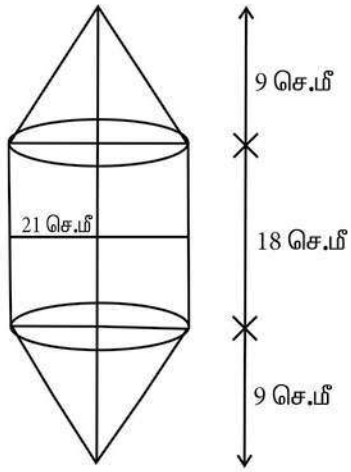
$$\therefore \text{ கன அளவு } = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ கன அலகுகள்}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$$

$$= 1232 \text{ செ.மீ}^{32}$$

5. ஒரு பெட்ரோல் தொட்டி உருளையின் இருபுறங்களிலும் கூம்புப் பகுதிகளை இணைத்ததுபோல் உள்ளது. உருளையின் அடிப்புற விட்டம் 21 செ.மீ மற்றும் நீளம் 18 செ.மீ மற்றும் கூம்புப் பகுதியின் அச்சின் நீளம் 9 செ.மீ எனில் அத்தொட்டியின் கொள்ளளவைக் காண்க.

தீர்வு :



உருளைப் பகுதியின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2 \times 18$

$= 6237$ செ.மீ^{3}

இரண்டு கூம்புப் பகுதிகளின் கன அளவு

$= 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2 \times 9$ செ.மீ^{3}

$= \frac{174636}{84}$

$= 2079$ செ.மீ^{3}

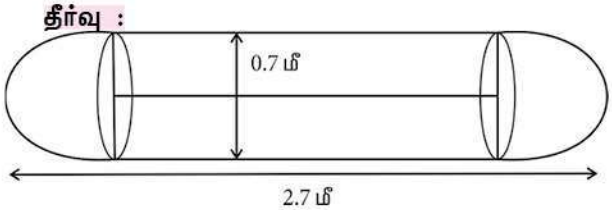
∴ தொட்டியின் கொள்ளளவு = உருளையின் கன அளவு + 2 கூம்புகளின் கன அளவு

$= 6237 + 2079$

$= 8316$ செ.மீ^{3}

6. உருளையின் இருபுறமும் அரைக்கோளங்கள் இணைத்தது போல் உள்ள திண்மத்தின் மொத்த நீளம் 2.7 மீ மற்றும் அரைக்கோளப் பகுதிகளின் விட்டம் 0.7 மீ எனில், திண்மத்தின் கன அளவு காண்க.

தீர்வு :



அரைக்கோளப் பகுதிகளின் ஆரம்

$= \frac{1}{2} \times 0.7$

$= \frac{0.7}{2}$ மீ $= \frac{7}{20}$ மீ

திண்மத்தின் மொத்த நீளம் = 2.7 மீ

இரு அரைக் கோளங்களின் கன அளவு

$= 2\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)$ கன அலகுகள்

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{20}\right)^3$

$= 0.1797$ மீ^{3}

உருளையின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{20}\right)^2 \times 2$

$= 0.77$ மீ^{3}

∴ திண்மத்திற்கான கன அளவு

$= 0.1797 + 0.77$

$= 0.95$ மீ^{3} (தோராயமாக)

7. உட்புற விட்டம் 36 செ.மீ உள்ள ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தில் திரவம் உள்ளது. இந்த திரவம், 3 செ.மீ ஆரம் மற்றும் 6 செ.மீ உயரமுள்ள உருளை வடிவக் குப்பிகளில் நிரப்பப்படுகிறது. கிண்ணத்தில் உள்ள மொத்த திரவத்தையும் காலியாக்க எத்தனைக் குப்பிகள் தேவைப்படுகிறது?

தீர்வு :

அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் ஆரம்

$= \frac{36}{2} = 18$ செ.மீ

அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் கன அளவு

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ கன அலகுகள்

$= \frac{2}{3}\pi (18)^3$ செ.மீ^{3}

உருளை வடிவக் குப்பியின் உயரம் = 6 செ.மீ

உருளை வடிவக் குப்பியின் ஆரம் = 3 செ.மீ

உருளை வடிவக் குப்பியின் கன அளவு

$= \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \pi (3)^2 (6)$

∴ தேவைப்படும் குப்பிகளின் எண்ணிக்கை = $\frac{\text{அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் கன அளவு}}{\text{குப்பியின் கன அளவு}}$

∴ தேவைப்படும் குப்பிகளின் எண்ணிக்கை

$= \frac{\frac{2}{3}\pi (18)^3}{\pi (3)^2 (6)} = 72$

8. தலைகீழாகத் திருப்பப்பட்ட கூம்பின் வடிவத்தில் ஒரு பாத்திரம் உள்ளது. இதன் உயரம் 8 செ.மீ மற்றும் 5 செ.மீ. பாத்திரத்தின் விளிம்பு வரை தண்ணீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. 0.5 செ.மீ ஆரமுள்ள காரீயக் குண்டுகள் பாத்திரத்தில் இடப்படும்பொழுது நான்கில் ஒரு பங்கு தண்ணீர் வெளியேற்றப்படுகிறது. பாத்திரத்தில் இடப்பட்ட காரீயக் குண்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

கூம்பின் ஆரம் r = 5 செ.மீ, உயரம் h = 8 செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ கன அலகுகள்

$= \frac{1}{3}\pi (5)^2 (8) = \frac{200\pi}{3}$ செ.மீ^{3}

கொ.ப: கூம்பின் அதன் விளிம்பு வரை தண்ணீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. மேலும், காரீயக் குண்டுகளை இடும் பொழுது, நான்கில் ஒரு பங்கு தண்ணீர் வெளியேறுகிறது.

வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு

$\frac{1}{4} \times \frac{200}{3} = \frac{50\pi}{3}$ செ.மீ^{3}

காரீயக் குண்டின் கன அளவு

$= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{\pi}{6}$ செ.மீ^{3}

∴பாத்திரத்தில் இடப்பட்ட காரீயக் குண்டுகளின் எண்ணிக்கை

$= \frac{50\pi/3}{\pi/6} = 100$

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. ஒரு தொழிற்சாலை தினமும் 1,20,000 பென்சில்களைத் தயாரிக்கிறது. பென்சில்கள் உருளை வடிவத்திலுள்ளன. மேலும் ஒவ்வொன்றின் நீளம் 25 செ.மீ மற்றும் சுற்றளவு 1.5 செ.மீ. ஒரு சதுர டெசி மீட்டருக்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு ₹ 0.05 எனில், ஒரு நாளில் உற்பத்தியாகும் மொத்தப் பென்சில்களின் வளைபரப்புகளுக்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவைக் காண்க.

தீர்வு :

அடிப்புற ஆரம் 'r' செ.மீ என்க.

சுற்றளவு $= 2\pi r$

$2\pi r = 1.5$ செ.மீ

$r = \frac{1.5}{2\pi} = \frac{10.5}{44}$ செ.மீ

பென்சிலின் வளைபரப்பு

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{44} \times 25$

100 சதுர செ.மீ க்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு $= ₹. 0.05$

[$\because$ 1 சதுர டெசி.மீ = 100 சதுர செ.மீ]

வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு

$= \frac{0.05}{100} \times 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{44} \times 25$

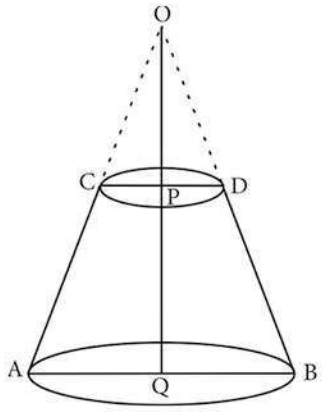
$= ₹ \frac{3}{160}$

எனவே, 1,20,000 பென்சில்களுக்கு வர்ணம் பூச ஆகும் செலவு

$= \frac{3}{160} \times 120000 = ₹ 2250$

2. ஒரு கூம்பின் உயரம் 30 செ.மீ. அதன் அடிப்பகுதிக்கு இணையாக, கூம்பின் மேல்புறத்திலிருந்து ஒரு சிறிய கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. சிறிய கூம்பின் கன அளவு, கொடுக்கப்பட்ட கூம்பின் கன அளவில் $\frac{1}{27}$ மடங்கு எனில், எந்த உயரத்தில் சிறிய கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்பட்டது என்பதைக் காண்க.

தீர்வு :



முந்தைய கூம்பு OAB –ன் கன அளவு

$= \frac{1}{3} \pi R^2 H$

$= \frac{1}{3} \pi (R^2)(30) = 10\pi R^2$ செ.மீ^{3}

சிறிய கூம்பு OCD –ன் கன அளவு

$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ கன அலகுகள்

கொ.ப: கூம்பு OCD –ன் கன அளவு

$= \frac{1}{27}$ (கூம்பு OAB –ன் கன அளவு)

$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}(10\pi R^2)$

$h = \frac{10\pi R^2}{27}\left(\frac{3}{\pi r^2}\right)$

$= \frac{10}{9}\left(\frac{R}{r}\right)^2$ ... (1)

OQB மற்றும் OPD என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து,

நமக்குக் கிடைப்பது

$\frac{QB}{PD} = \frac{OQ}{OP} = \frac{30}{h}$

$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{30}{h}$ ... (2)

(2) ஐ (1) –ல் பிரதியிட

$h = \frac{10}{9}\left(\frac{30}{h}\right)^2$

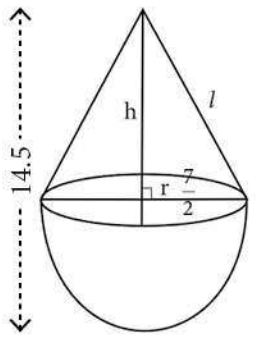
$h^3 = 1000$

$h = 10$ செ.மீ

எனவே, அடிப்பக்கத்திலிருந்து (30 – 10 = 20) 20 செ.மீ உயரத்தில் சிறிய கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்பட்டது.

3. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மேல்புறத்தில் கூம்பு உள்ளது போன்ற வடிவத்தில் ஒரு பொம்மை உள்ளது. அரைக்கோளத்தின் விட்டம் 7 செ.மீ மற்றும் பொம்மையின் மொத்த உயரம் 14.5 செ.மீ எனில், பொம்மையின் கன அளவு மற்றும் மொத்தப்புறப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :



அரைக்கோளத்தின் ஆரம் 'r' $= \frac{7}{2} = 3.5$ செ.மீ

கூம்பின் அடிப்புற ஆரம் = 3.5 செ.மீ

பொம்மையின் மொத்த உயரம் = 14.5 செ.மீ
கூம்புப் பகுதியின் உயரம் = 14.5 – 3.5 = 11 செ.மீ

$$\text{கூம்பின் சாயுயரம் } l = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$= \sqrt{11^2 + 3.5^2}$$
$$= \sqrt{121 + 12.25}$$
$$= \sqrt{133.25}$$
$$= 11.54 \text{ செ.மீ}$$

பொம்மையின் கன அளவு = கூம்பின் கன அளவு + அரைக்கோளத்தின் கன அளவு

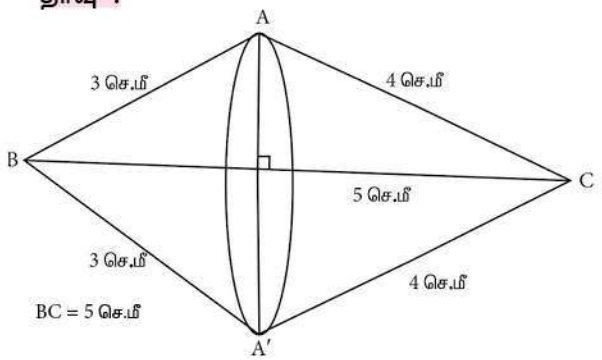
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{\pi r^2}{3}(h + 2r)$$
$$= \frac{22}{3 \times 7} \times 12.25 \times 18$$
$$= 231 \text{ செ.மீ}^3$$

பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = கூம்பின் வளைபரப்பு + அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

$$= \pi rl + 2\pi r^2 = \pi r(l + 2r)$$
$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \ (11.54 + 2 \times 3.5)$$
$$= 22 \times 0.5 \times 18.54 = 203.94 \text{ செ.மீ}$$

4. 3 செ.மீ மற்றும் 4 செ.மீ பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணம் அதன் கர்ணத்தைப் பற்றிச் சுழல்கிறது எனில் உருவாகும் இரட்டைக் கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு :



செங்கோண முக்கோணம் ABC என்பது, A –ல் செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ளது. மேலும் அதன் பக்கங்கள் AB, AC என்பன முறையே 3 செ.மீ மற்றும் 4 செ.மீ.

பக்கம் BC –ன் நீளம் (கர்ணம்)

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5 \text{ செ.மீ}$$

முக்கோணம். ABC, கர்ணம் BC ஐப் பற்றிச் சுழல்வதால் இரட்டைக் கூம்பு உருவாகிறது.

திண்மம் BAA' மற்றும் CAA' என்ற இரண்டு கூம்புகளைக் கொண்டுள்ளது.

AO மற்றும் $A'O$ என்பது பொதுவான ஆரம்.

கூம்பு CAA' –ன் உயரம் CO மற்றும் சாயுயரம் 4 செ.மீ

கூம்பு BAA' –ன் உயரம் BO மற்றும் சாயுயரம் 3 செ.மீ.

இப்போது, ΔAOB மற்றும் ΔCAB என்பன வடிவொத்தவை.

$\therefore$ ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமத்திலிருக்கும்.

அதாவது, $\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BO}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{AO}{4} = \frac{3}{5}$$
$$\Rightarrow AO = \frac{12}{5} \text{ செ.மீ}$$

இதேபோல், $\frac{BO}{3} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow BO = \frac{9}{5} \text{ செ.மீ}$$
$$CO = BC - BO$$
$$= 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} \text{ செ.மீ}$$

$r = \frac{12}{5}$ செ.மீ , $h_1 = BO = \frac{9}{5}$ செ.மீ ,

$h_2 = CO = \frac{16}{5}$ செ.மீ

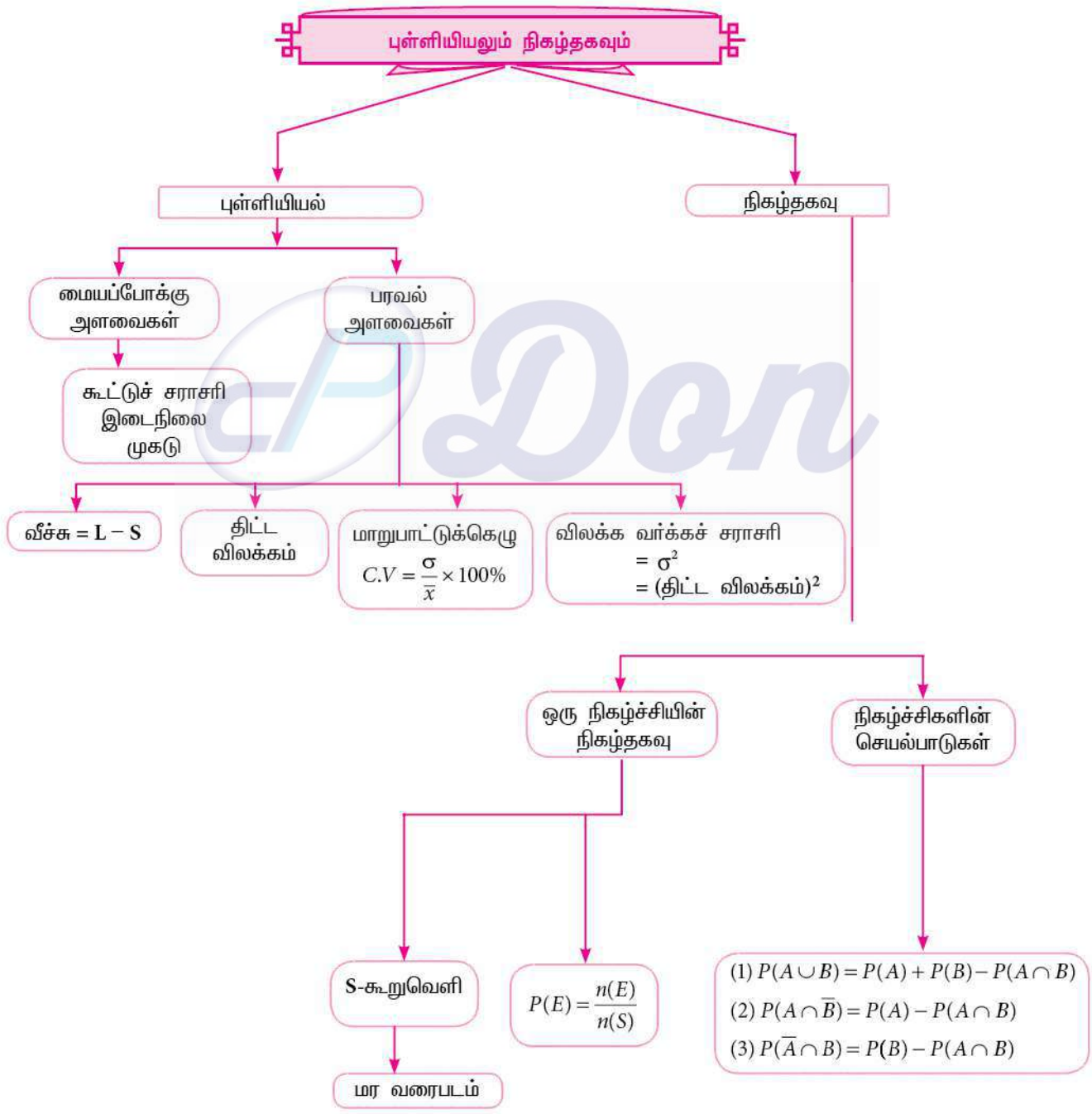
$\therefore$ இரட்டைக் கூம்பின் கன அளவு

$$= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \times BO\right) + \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \times CO\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (BO + CO)$$
$$= \frac{22}{7 \times 3}\left(\frac{12}{5}\right)^2 \left(\frac{9}{5} + \frac{16}{5}\right)$$
$$= \frac{22}{7 \times 3} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times 5$$
$$= 30.17 \text{ செ.மீ}^3$$

அலகு 8

புள்ளியியலும் நிகழ்தகவும்

மன வரைபடம்



பரவல் அளவைகள்

நினைவில் கொள்க

பிரசந்த சந்திர மகலெனோபிஸ் நிகழ்த்திய சாதனைகளுக்காக "இந்தியப் புள்ளியியலின் தந்தை" எனப் போற்றப்படுகிறார்.

- இவருடைய அளப்பரிய பணிகளுக்காக, இந்திய அரசின் மிக உயரிய விருதுகளில் ஒன்றான பத்மவிபூஷன் விருது 1968 ஆம் ஆண்டு இந்திய அரசால் வழங்கப்பட்டது.
- இவரது பிறந்த நாளான ஜூன் மாதம் 29–ஆம் தேதியை ஒவ்வோர் ஆண்டும் தேசியப் புள்ளியியல் தினமாகக் கொண்டாடும்படி இந்திய அரசாங்கம் அறிவித்துள்ளது.
- புள்ளியியல் என்பது அறிவியல் முறைகளைப் பயன்படுத்தித் தரவுகளைச் சேகரித்தல், ஒருங்கமைத்தல், தொகுத்தல், வழங்குதல், பகுப்பாய்வு செய்தல், அர்த்தமுள்ள முடிவுகளை ஏற்படுத்துதல் ஆகியவைகளை உள்ளடக்கியது ஆகும்.

மையப்போக்கு அளவைகளை நினைவுகூறுதல்

- மையப்போக்கு அளவைகள் என்பது முழுப் புள்ளி விவரங்களையும் குறிக்கத்தக்கதான ஒரு தனி மதிப்பீட்டு எண்ணாகும்.
- வழக்கமாக மையப்போக்கு அளவைகள் அனைத்தும் புள்ளி விரவரத்தின் மைய அளவிற்கு நெருக்கமாக இருக்கும்.
- கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கான பல்வேறு வகையான மையப்போக்கு அளவைகளில் பொதுவானவை,
  - (i) கூட்டுச் சராசரி
  - (ii) இடைநிலை அளவு
  - (iii) முகடு

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = \frac{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மதிப்பு}}{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$

கூட்டுச் சராசரி காணும் முறைகள்

- தொகுக்கப்படாத தரவு
  - நேரடி முறை
    - $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
- தொகுக்கப்பட்ட தரவு
  - நேரடி முறை
    - $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$
  - ஊகச் சராசரி முறை
    - $\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$
    - இங்கு $d_i = x_i - A$
  - படி விலக்க முறை
    - $\bar{x} = A + C \times \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$
    - இங்கு $d_i = \frac{x_i - A}{C}$

- ஒரு கோட்பாட்டைத் தகுந்த எண்ணளவில் குறிப்பிடுவதைத் தரவு என்கிறோம்.
- தரவின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் தரவுப்புள்ளி என்கிறோம்.
- ஓர் கணக்கெடுப்பில் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் அளவுகள் மாறிகள் எனப்படுகின்றன. மாறிகள் பொதுவாக x_i, i = 1, 2, 3,...,n எனக் குறிக்கப்படுகின்றன.
- ஒரு தரவில், ஒரு மாறி எவ்வளவு முறை வருகிறதோ, அந்த எண்ணிக்கையை நாம் மாறியின் நிகழ்வெண் என்கிறோம். பொதுவாக நிகழ்வெண் என்பது f_i, i=1,2,3,... n எனக் குறிக்கப்படுகின்றது.
- பரவல் அளவையானது மதிப்புகள் பரவியுள்ளதைப் பற்றி அறிய உதவும்.
- ஒரு தரவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுப் புள்ளிகள் இந்தத் தரவில் எவ்வாறு பரவியுள்ளன என்ற கருத்தைத் தெரிவிக்கும்.
- பரவல்களின் பல்வேறு அளவைகள்
  - ☆ வீச்சு
  - ☆ திட்ட விலக்கம்
  - ☆ சராசரி விலக்கம்
  - ☆ விலக்க வர்க்கச் சராசரி
  - ☆ கால்மான விலக்கம்
  - ☆ மாறுபாட்டுக் கெழு

வீச்சு (Range)

- தரவில் கொடுக்கப்பட்ட மிகப் பெரிய மதிப்பிற்கும் மிகச் சிறிய மதிப்பிற்கும் உள்ள வேறுபாடு வீச்சு எனப்படும்.

$$\text{வீச்சு } R = L - S$$

- வீச்சின் குணகம் (அ) கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$

இங்கு L – தரவுப் புள்ளிகளின் மிகப் பெரிய மதிப்பு
S – தரவுப் புள்ளிகளின் மிகச் சிறிய மதிப்பு

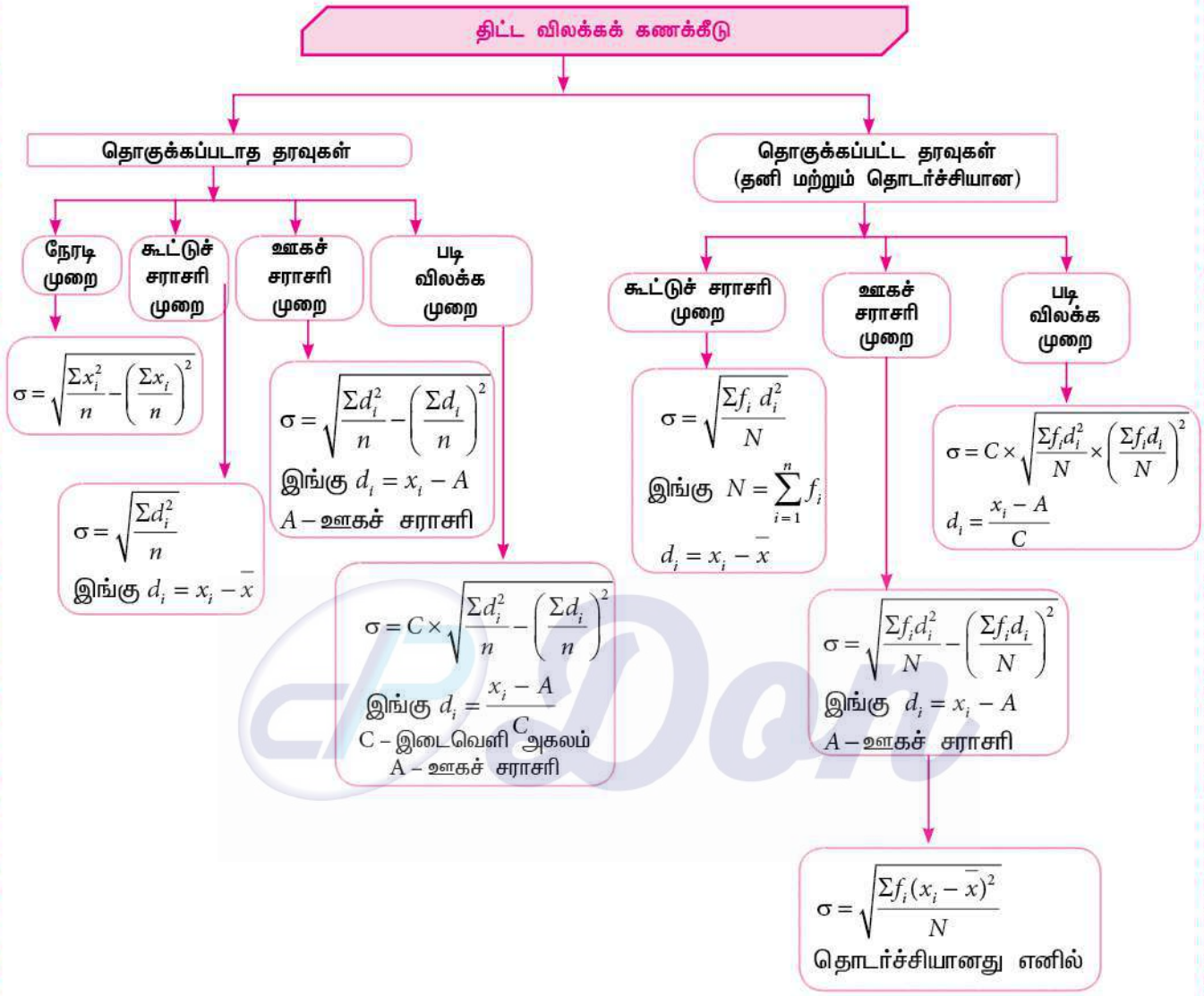
- முதல் இடைவெளியின் நிகழ்வெண் ஆனது பூச்சியம் எனில், அடுத்த இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணைப் பயன்படுத்தி வீச்சு கணக்கிட வேண்டும்.
- எல்லா x_i, i = 1, 2, 3,..., n மதிப்புகளுக்கும் $(x_i - \bar{x})^2 \geq 0$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.
- சராசரியிலிருந்து உள்ள விலகல் $x_i - \bar{x}$ சிறியது எனில், சராசரி விலக்கங்களின் வர்க்கம் மிகச்சிறியது ஆகும்.

விலக்க வர்க்கச் சராசரி (Variance)

- தரவுத் தொகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளிக்கும், அதன் கூட்டு சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை வர்க்கப்படுத்தி, அந்த வர்க்கங்களுக்கு சராசரி காண்பது விலக்க வர்க்கச் சராசரி ஆகும். இதை σ^2 என்று குறிக்கலாம்.
- விலக்க வர்க்கச் சராசரி = விலக்கத்தின் வர்க்கத்தின் சராசரி
- விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation)

- விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் மிகை வர்க்கமூலம் திட்டவிலக்கம் எனப்படும்.
- திட்ட விலக்கமானது, எவ்வாறு ஒவ்வொரு மதிப்பும் கூட்டு சராசரியிலிருந்து பரவி அல்லது விலகி உள்ளது என்பதைத் தெளிவுப்படுத்துகிறது.
- திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$
- கார்ல் பியர்சன், முதன்முதலில் "திட்டவிலக்கம்" என்ற வார்த்தையைப் பயன்படுத்தியவராவார்.
- சராசரி பிழை என்ற வார்த்தையை முதன்முதலில் பயன்படுத்தியவர் ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் கவுஸ் ஆவார்.
- கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்குத் திட்டவிலக்கம் மற்றும் சராசரி ஒரே அலகில் அமையும்.



- தரவுப் புள்ளிகள் நேரடியாகக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் திட்ட விலக்கம் காண $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.
- சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், நாம் திட்ட விலக்கம் காண $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.
- சராசரியின் மதிப்பு முழுக்களாக இல்லாதபோது, ஊகச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி திட்ட விலக்கம் காண்பது சிறந்தது.
- கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியையும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியால் பெருக்கினால் (அல்லது வகுத்தால்) கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் பழைய திட்டவிலக்கத்தை அந்த மாறிலியால் பெருக்க (அல்லது வகுக்கக்) கிடைக்கும் மதிப்புக்கு சமம்.

எடுத்துக்காட்டு

8.1 கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க: 25, 67, 48, 53, 18, 39, 44.

தீர்வு :

மிகப் பெரிய மதிப்பு, L = 67;
மிகச் சிறிய மதிப்பு, S = 18
வீச்சு R = L – S = 67 – 18 = 49

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$\text{வீச்சுக் கெழு} = \frac{67-18}{67+18} = \frac{49}{85} = 0.576$$

8.2 கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் வீச்சு காண்க.

வயது (வருடங்களில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
16-18	0
18-20	4
20-22	6
22-24	8
24-26	2
26-28	2

தீர்வு :

மிகப் பெரிய மதிப்பு L = 28
மிகச் சிறிய மதிப்பு S = 18
வீச்சு R = L – S = 28 – 18
= 10 வருடங்கள்

8.3 ஒரு தரவின் வீச்சு 13.67 மற்றும் மிகப் பெரிய மதிப்பு 70.08 எனில் மிகச் சிறிய மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

வீச்சு, R = 13.67
மிகப் பெரிய மதிப்பு, L = 70.08
வீச்சு, R = L – S
13.67 = 70.08 – S
S = 70.08 – 13.67 = 56.41
எனவே, மிகச் சிறிய மதிப்பு 56.41.

8.4 ஒரு வாரத்தின் ஒவ்வொரு நாளிலும் விற்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு 13, 8, 4, 9, 7, 12, 10. இந்தத் தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

x_i	x_i^2
13	169
8	64
4	16
9	81
7	49
12	144
10	100
$\Sigma x_i = 63$	$\Sigma x_i^2 = 623$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{623}{7} - \left(\frac{63}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{89 - 81} = \sqrt{8}$$

எனவே, $\sigma = 2.83$

8.5 ஒரு குறிப்பிட்ட பருவத்தில் 6 நாட்களில் பெய்யும் மழையின் அளவானது 17.8 செ.மீ, 19.2 செ.மீ, 16.3 செ.மீ, 12.5 செ.மீ, 12.8 செ.மீ, 11.4 செ.மீ எனில், இந்த தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தரவின் ஏறுவரிசையில் எழுதக்கிடைப்பது 11.4, 12.5, 12.8, 16.3, 17.8, 19.2 ஆகும். தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை n = 6

$$\text{சராசரி} = \frac{11.4+12.5+12.8+16.3+17.8+19.2}{6}$$

$$= \frac{90}{6} = 15$$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x} = x - 15$	d_i^2
11.4	– 3.6	12.96
12.5	– 2.5	6.25
12.8	– 2.2	4.84
16.3	1.3	1.69
17.8	2.8	7.84
19.2	4.2	17.64
		$\Sigma d_i^2 = 51.22$

$$\text{திட்ட விலக்கம்} \ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{51.22}{6}} = \sqrt{8.53}$$

ஆகவே, $\sigma = 2.9$

8.6 ஒரு வகுப்புத் தேர்வில், 10 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் 25, 29, 30, 33, 35, 37, 38,40, 44, 48 ஆகும். மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

மதிப்பெண்களின் சராசரி = 35.9. இந்த மதிப்பானது தரவுகளின் நடுமதிப்பாக அமையும். அதானல் நாம் ஊகச் சராசரி A = 35, என எடுத்துக் கொள்கிறோம், மேலும், n = 10.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 35$	d_i^2
25	– 10	100
29	– 6	36
30	– 5	25
33	– 2	4
35	0	0
37	2	4
38	3	9
40	5	25
44	9	81
48	13	169
	$\Sigma d_i = 9$	$\Sigma d_i^2 = 453$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{453}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{45.3 - 0.81}$$

$$= \sqrt{44.49}$$

ஆகவே $\sigma \simeq 6.67$

8.7 ஒரு பள்ளி சுற்றுலாவில் குழந்தைகள் தின்பண்டங்கள் வாங்குவதற்காக செலவு செய்த தொகையானது முறையே 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 ஆகும். படி விலக்க முறையை பயன்படுத்தி அவர்கள் செய்த செலவிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எல்லா தரவுப் புள்ளிகளும் 5 ஆல் வகுபடும் எண்கள். அதனால் நாம் ஊகச் சராசரி முறையைப் பின்பற்றலாம். A = 20, n = 8.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 20$	$d_i = \frac{x_i - A}{c}$ $c = 5$	d_i^2
5	– 15	– 3	9
10	– 10	– 2	4
15	– 5	– 1	1
20	0	0	0
25	5	1	1
30	10	2	4
35	15	3	9
40	20	4	16
		$\Sigma d_i = 4$	$\Sigma d_i^2 = 44$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{44}{8} - \left(\frac{4}{8}\right)^2} \times 5 = \sqrt{\frac{11}{2} - \frac{1}{4}} \times 5$$

$$= \sqrt{5.5 - 0.25} \times 5 = 2.29 \times 5$$

$\sigma \simeq 11.45$

8.8. கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க. 7, 4, 8, 10, 11. இதன் எல்லா மதிப்புகளுடனும் 3–யை கூட்டும்போது கிடைக்கும் புதிய தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளின் ஏறு வரிசை 4, 7, 8, 10, 11 மற்றும் அவற்றின் எண்ணிக்கை n = 5

x_i	x_i^2
4	16
7	49
8	64
10	100
11	121
$\Sigma x_i = 40$	$\Sigma x_i^2 = 350$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{350}{5} - \left(\frac{40}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

அனைத்து தரவுப் புள்ளிகளையும் 3 ஆல் கூட்டும் போது, நமக்கு கிடைக்கும் புதிய தரவுப் புள்ளிகள் 7, 10, 11, 13, 14 ஆகும்.

x_i	x_i^2
7	9
10	100
11	121
13	169
14	196
$\Sigma x_i = 55$	$\Sigma x_i^2 = 635$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{635}{5} - \left(\frac{55}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

இதிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளுடன் ஏதேனும் மாறிலியைக் கூட்டினால், திட்ட விலக்கம் மாறாது எனப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

8.9 கொடுக்கப்பட்ட தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க 2, 3, 5, 7, 8. ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியையும் 4–ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய தரவின் மதிப்பிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டவை, n = 5

x_i	x_i^2
2	4
3	9
5	25
7	49
8	64
$\Sigma x_i = 25$	$\Sigma x_i^2 = 151$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{151}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{30.2 - 25}$$

$$= \sqrt{5.2} \simeq 2.28$$

அனைத்து தரவுப் புள்ளிகளையும் 4–ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் புதிய தரவுப் புள்ளிகள் 8, 12, 20, 28, 32 ஆகும்.

x_i	x_i^2
8	64
12	144
20	400
28	784
32	1024
$\Sigma x_i = 100$	$\Sigma x_i^2 = 2416$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2416}{5} - \left(\frac{100}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{483.2 - 400} = \sqrt{83.2}$$

$$\sigma = \sqrt{16 \times 5.2} = 4\sqrt{5.2} \simeq 9.12$$

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியையும் 4–ஆல் பெருக்கும் போது கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் 4 மடங்காக அதிகரிக்கிறது.

8.10 முதல் n இயல் எண்களின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\text{சராசரி } \bar{x} = \frac{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மதிப்பு}}{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \times n}$$

$$\text{சராசரி } \bar{x} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி } \sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \Sigma x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \\ (\Sigma x_i)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 \end{array}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n} - \left[\frac{n(n+1)}{2 \times n}\right]^2$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}$$

$$= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12}$$

$$\text{விலக்க வர்க்கச் சராசரி } \sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

8.11 ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் 48 மாணவர்கள் தொலைக்காட்சி பார்ப்பதற்காகச் செலவிட்ட நேரம் கேட்டறியப்பட்டது. அந்தத் தகவலின் அடிப்படையில், கீழ்க்காணும் தரவின் திட்டவிலக்கம் காண்க.

x	6	7	8	9	10	11	12
f	3	6	9	13	8	5	4

தீர்வு :

x_i	f_i	$x_i f_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	d_i^2	$f_i d_i^2$
6	3	18	– 3	9	27
7	6	42	– 2	4	24
8	9	72	– 1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	N = 48	$\Sigma x_i f_i = 432$	$\Sigma d_i = 0$		$\Sigma f_i d_i^2 = 124$

சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{N} = \frac{432}{48} = 9$ (இங்கு $N = \Sigma f_i$)

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58}$$

$$\sigma \simeq 1.6$$

8.12 வகுப்புத் தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவர்களின் மதிப்பெண்ணிற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

x	4	6	8	10	12
f	7	3	5	9	5

தீர்வு :

ஊகச் சராசரி, A = 8 என்க.

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
4	7	– 4	– 28	112
6	3	– 2	– 6	12
8	5	0	0	0
10	9	2	18	36
12	5	4	20	80
	N = 29		$\Sigma f_i d_i = 4$	$\Sigma f_i d_i^2 = 240$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$ [இங்கு $N = \Sigma f_i$]

$$= \sqrt{\frac{240}{29} - \left(\frac{4}{29}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{240 \times 29 - 16}{29 \times 29}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6944}{29 \times 29}} \; ; \; \sigma \simeq 2.87$$

8.13 ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள், குறிப்பிட்ட பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	8
10–20	12
20–30	17
30–40	14
40–50	9
50–60	7
60–70	4

இத்தரவிற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

ஊகச் சராசரி A = 35, C = 10

மதிப் பெண்கள்	மைய மதிப்பு (x_i)	f_i	$d_i = x_i - A$	$d_i = \frac{x_i - A}{C}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	8	– 30	– 3	– 24	72
10-20	15	12	– 20	– 2	– 24	48
20-30	25	17	– 10	– 1	– 17	17
30-40	35	14	0	0	0	0
40-50	45	9	10	1	9	9
50-60	55	7	20	2	14	28
60-70	65	4	30	3	12	36
		N = 71			$\Sigma f_i d_i = -30$	$\Sigma f_i d_i^2 = 210$

திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \left(-\frac{30}{71}\right)^2}$$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}}$$

$$\sigma = 10 \times \sqrt{2.779} \; ; \; \sigma \simeq 16.67$$

8.14 15தரவுப்புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 10, 5 என கண்டறியப்பட்டுள்ளது. அதை சரிபார்க்கும்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தரவுப் புள்ளி 8 என தவறுதலாக குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சரியான தரவுப்புள்ளி 23 என இருந்தால் சரியான தரவின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

$n = 15,\ \bar{x} = 10,\ \sigma = 5;\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$;

$\Sigma x = 15 \times 10 = 150$

தவறான மதிப்பு = 8

சரியான மதிப்பு = 23

திருத்தப்பட்ட கூடுதல் = $150 - 8 + 23 = 165$

திருத்தப்பட்ட சராசரி $\bar{x} = \frac{165}{15} = 11$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$

தவறான திட்ட விலக்கம் $\sigma = 5 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{15} - (10)^2}$

$25 = \frac{\Sigma x^2}{15} - 100$ எனவே $\frac{\Sigma x^2}{15} = 125$

Σx^2 –ன் தவறான மதிப்பு $= 1875$

Σx^2 –ன் திருத்தப்பட்ட மதிப்பு $= 1875 - 8^2 + 23^2 = 2340$

திருத்தப்பட்ட திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{2340}{15} - (11)^2}$

$\sigma = \sqrt{156 - 121} = \sqrt{35} \simeq 5.9$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. எல்லா தரவுப் புள்ளிகளையும் கூட்டி, தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையினால் வகுத்தால் கிடைப்பது _____.

விடை: கூட்டுச் சராசரி

2. 10 தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் 265 எனில், அவற்றின் சராசரியானது _____.

விடை: 26.5

3. குறிப்பிட்ட தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மற்றும் சராசரி ஆகியவை முறையே 407 மற்றும் 11 எனில், தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையானது _____.

விடை: 37

4. முதல் பத்து பகா எண்களின் வீச்சு _____ ஆகும்.

விடை: 27

வீச்சு = L – S = 29 – 2 = 27

5. விலக்க வர்க்கச் சராசரி 0.49 எனில் திட்ட விலக்கமானது _____.

விடை: 0.7

சிந்தனைக் களம்

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்குச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவை ஒரே மதிப்பைக் கொண்டிருக்குமா?

விடை: சமச்சீர் பரவலுக்கு சராசரி மற்றும் இடைநிலை ஒரே மதிப்பாக இருக்கும். பரவல் ஒரே முகடைப் பெற்றிருப்பின் அது கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலைக்கு சமமாக இருக்கும்.அதாவது ஒரே முகடு கொண்ட சமச்சீர் பரவலுக்கு கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஒரே மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

2. கூட்டுச்சராசரிக்கும் சராசரிக்கும் இடையேயான வித்தியாசம் என்ன?

விடை: கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு, போன்ற மையநிலைப் போக்கு அளவைகள் சராசரி அளவைகள் எனப்படும். ஆனால் கூட்டுச்சராசரி என்பது கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதலை தரவுப் புள்ளி எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும்.

3. n தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரியானது $\bar{x}$, மேலும் முதல் உறுப்புடன் ஒன்றையும், இரண்டாம் உறுப்புடன் இரண்டையும் கூட்டி என இவ்வாறு தொடர்ந்து கூட்டிக் கொண்டே போனால் புதிய சராசரி என்னவாக இருக்கும்?

விடை: n தரவுப்புள்ளிகளின் சராசரி $\bar{x}$.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்பன n தரவுப்புள்ளிகள் என்க.

எனவே, $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \bar{x}$.

முதல் உறுப்புடன் 1, இரண்டாம் உறுப்புடன் 2 எனக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய தரவுப்புள்ளிகள் $x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3, \ldots x_n + n$.

கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + x_3 + 3 + \ldots + x_n + n}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} + \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n}$$

$$= \bar{x} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

$$= \bar{x} + \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n}$$

$$= \bar{x} + \frac{(n+1)}{2}$$

4. விலக்க வர்க்கச் சராசரி ஒரு குறை எண்ணாக இருக்க முடியுமா?

விடை: விலக்க வர்க்கச் சராசரி குறை எண்ணாக இருக்க இயலாது. ஏனெனில், விலக்க வர்க்கச் சராசரி = விலக்கத்தின் வர்க்கத்தின் சராசரி. ஒரு எண்ணின் வர்க்கம் எப்போதும் மிகை எண்ணாகும்.

5. திட்டவிலக்கம், விலக்க வர்க்கச் சராசரியை விடப் பெரிதாக இருக்க முடியுமா?

விடை: விலக்க வர்க்கச் சராசரி என்பது திட்டவிலக்கத்தின் வர்க்கம்.

எனவே திட்டவிலக்கம் < 1 எனில் விலக்க வர்க்கச் சராசரி திட்ட விலக்கத்தை விட அதிகமாக இருக்கும். இல்லையெனில் திட்ட விலக்கமே பெரிய மதிப்பாக இருக்கும்.

(எ.கா) திட்டவிலக்கம் $= 0.01$ எனில் விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= \sqrt{0.01} = 0.1$

6. n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் (i) $\Sigma(x_i - \bar{x})$ (ii) $(\Sigma x_i) - \bar{x}$ ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண முடியுமா?

விடை:

(i) $\Sigma(x_i - \bar{x}) = \Sigma d_i$, சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் கூடுதல்

(ii) $\Sigma x_i - \bar{x} = \Sigma x_i - \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{(n-1)}{n}\Sigma x_i \quad \left[\because \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}\right]$

எனக் காண இயலும்.

7. (i) ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கமானது 2.8 அனைத்துத் தரவுப் புள்ளிகளுடன் 5 -ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய திட்ட விலக்கமானது _____.

விடை: 2.8

(ii) p, q, r ஆகியவற்றின் திட்ட விலக்கமானது S எனில், p – 3, q – 3, r – 3 -யின் திட்ட விலக்கமானது _____ ஆகும்.

விடை: S

பயிற்சி 8.1

1. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவைக் காண்க.

(i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68

(ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8

தீர்வு :

(i) 63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68

மிகப் பெரிய மதிப்பு $L = 125$

மிகச் சிறிய மதிப்பு $S = 63$

வீச்சு $R = L - S = 125 - 63 = 62$

வீச்சுக் கெழு $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{125-63}{125+63}$

$= \frac{62}{188} = 0.329 = 0.33$

$\therefore$ வீச்சு $= 62$; வீச்சுக்கெழு $= 0.33$

(ii) 43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8

மிகப் பெரிய மதிப்பு $L = 61.4$

மிகச் சிறிய மதிப்பு $S = 13.6$

வீச்சு $= L - S$

$= 61.4 - 13.6 = 47.8$

வீச்சுக்கெழு $= \frac{61.4-13.6}{61.4+13.6}$

$= \frac{47.8}{75} = 0.637 = 0.64$

$\therefore$ வீச்சு $= 47.8$; வீச்சுக்கெழு $= 0.64$

2. ஒரு தரவின் வீச்சு மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்பு ஆகியன முறையே 36.8 மற்றும் 13.4 எனில், மிகப்பெரிய மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

வீச்சு $= 36.8$

மிகச் சிறிய மதிப்பு $= 13.4$

வீச்சு $R = L - S$

$36.8 = L - 13.4$

$36.8 + 13.4 = L$

$L = 50.2$

$\therefore$ மிகப் பெரிய மதிப்பு $L = 50.2$

3. கொடுக்கப்பட்ட தரவின் வீச்சைக் காண்க.

வருமானம்	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	30	21	6

தீர்வு :

இங்கு மிகப் பெரிய மதிப்பு $L = 650$

மிகச் சிறிய மதிப்பு $S = 400$

$\therefore$ வீச்சு $R = L - S$

$R = 650 - 400 = 250$

$\therefore$ வீச்சு $R = 250$

4. ஓர் ஆசிரியர் மாணவர்களை, அவர்களின் செய்முறைப் பதிவேட்டின் 60 பக்கங்களை நிறைவு செய்து வருமாறு கூறினார். எட்டு மாணவர்கள் முறையே 32, 35, 37, 30, 33, 36, 35, 37 பக்கங்கள் மட்டுமே நிறைவு செய்திருந்தனர். மாணவர்கள் நிறைவு செய்யாதப் பக்கங்களின் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

நிறைவு செய்ய வேண்டிய மொத்த பக்கங்கள் = 60

மாணவர்கள் நிறைவு செய்த பக்கங்கள்

32, 35, 37, 30, 33, 36, 35, 37

மாணவர்கள் நிறைவு செய்ய வேண்டிய பக்கங்கள் x_i என்க.

நிறைவு செய்த பக்கங்கள்	நிறைவு செய்ய வேண்டிய பக்கங்கள்(x_i) x_i = 60 – நிறைவு செய்த பக்கங்கள்	x_i^2
32	28	784
35	25	625
37	23	529
30	30	900
33	27	729
36	24	576
35	25	625
37	23	529
	$\Sigma x_i = 205$	$\Sigma x_i^2 = 5297$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{5297}{8} - \left(\frac{205}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{662.125 - (25.625)^2} = \sqrt{662.125 - 656.641}$

$= \sqrt{5.484} = 2.34 \quad \therefore \sigma \simeq 2.34$

5. 9 ஊழியர்களின் ஊதியம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஊதியங்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க. ₹ 310, ₹ 290, ₹ 320, ₹ 280, ₹ 300, ₹ 290, ₹ 320, ₹ 310, ₹ 280.

தீர்வு :

ஊதியங்களை ஏறுவரிசையில் எழுத

₹ 280, ₹ 280, ₹ 290, ₹ 290, ₹ 300, ₹ 310, ₹ 310, ₹ 320, ₹ 320

கூட்டுச் சராசரி

$= \frac{280 + 280 + 290 + 290 + 300 + 310 + 310 + 320 + 320}{9}$

$\bar{x} = \frac{2700}{9} = 300$

x_i	$d_i = x_i - \bar{x} = x_i - 300$	d_i^2
280	– 20	400
280	– 20	400
290	– 10	100
290	– 10	100
300	0	0
310	10	100
310	10	100
320	20	400
320	20	400
		$\Sigma d_i^2 = 2000$

திட்ட விலக்கம்

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$

$\sigma = \sqrt{\frac{2000}{9}}$

$\sigma = \sqrt{222.222...} = 14.907 = 14.91$

மேலும் $\sigma = \sqrt{222.222}$ எனில்

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = 222.22$

$\therefore$ விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 222.22 மற்றும் திட்ட விலக்கம் = 14.91

6. ஒரு சுவர் கடிகாரம் 1 மணிக்கு 1 முறையும், 2 மணிக்கு 2 முறையும், 3 மணிக்கு 3 முறையும் ஒலி எழுப்புகிறது எனில், ஒரு நாளில் அக்கடிகாரம் எவ்வளவு முறை ஒலி எழுப்பும்? மேலும் கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கைகளின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

சுவர் கடிகாரம் 1 மணிக்கு 1 முறை, 2, மணிக்கு 2 முறை, 3 மணிக்கு 3 முறை, ... என ஒலி எழுப்புகிறது. ஆனால் அது அதிகபட்சமாக 12 முறை அடிக்கும். எனவே ஒரு நாளில் கடிகாரம் அடிக்கும் முறை

$= 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12)$

$= 78 \times 2 = 156$ முறை

$\therefore$ ஒரு நாளில் கடிகாரம் 156 முறை அடிக்கும்.

முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

∴ ஒலி எண்ணிக்கையின் திட்ட விலக்கம்

$$= 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{12^2-1}{12}} = 2\sqrt{\frac{144-1}{12}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{143}{12}} = 2\sqrt{11.92}$$

$$= 2 \times 3.45 = 6.9$$

∴ கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கைகளின் திட்ட விலக்கம் = 6.9

7. முதல் 21 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

முதல் n இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

∴ முதல் 21 இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{21^2-1}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{441-1}{12}} = \sqrt{\frac{440}{12}}$$

$$= \sqrt{36.6666} = 6.05$$

முதல் 21 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் = 6.05

8. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கம் 4.5 ஆகும். அதில் இருக்கும் தரவுப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் 5 -ஐ கழிக்க கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு : ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கம் 4.5.

ஒரு தரவின் ஒவ்வொரு தரவுப்புள்ளிகளுடனும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கழிப்பதால் கிடைக்கும். புதிய தரவுகளின் திட்ட விலக்கம் மாறுபடுவதில்லை.

எனவே தரவுப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் 5 ஐக் கழிப்பதால் கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்டவிலக்கம் மாறுபடுவதில்லை.

∴ புதிய திட்டவிலக்கம் = 4.5

9. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் 3.6 ஆகும். அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் 3 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு :

தரவின் திட்ட விலக்கம் = 3.6.

கொடுக்கப்பட்ட தரவுப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும் 3 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்டவிலக்கம் பழைய திட்ட விலக்கத்தை 3 ஆல் வகுப்பதற்கு சமம்.

எனவே புதிய திட்டவிலக்கம் = $\frac{3.6}{3} = 1.2$

புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி = $\sigma^2 = (1.2)^2$

∴ புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 1.44 மற்றும் புதிய திட்டவிலக்கம் = 1.2

10. ஒரு வாரத்தில் ஐந்து மாவட்டங்களில் வெவ்வேறு இடங்களில் பெய்த மழையின் அளவானது பதிவு செய்யப்பட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மழையளவு (மி.மீ)	45	50	55	60	65	70
இடங்களின் எண்ணிக்கை	5	13	4	9	5	4

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மழையளவின் தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு : ஊகச் சராசரி A = 55 என்க.

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 55$	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
45	5	– 10	– 50	100	500
50	13	– 5	– 65	25	325
55	4	0	0	0	0
60	9	5	45	25	225
65	5	10	50	100	500
70	4	15	60	225	900
	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i d_i = 40$		$\Sigma f_i d_i^2 = 2450$

$\Sigma f_i = N = 40$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{2450}{40} - \left(\frac{40}{40}\right)^2} = \sqrt{61.25 - 1^2}$$

$$= \sqrt{61.25 - 1} = \sqrt{60.25}$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 7.76$

11. வைரஸ் காய்ச்சலைப் பற்றிய கருத்துக் கணிப்பில், பாதிக்கப்பட்ட மக்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வயது (வருடங்களில்)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
பாதிக்கப்பட்ட மக்களின் எண்ணிக்கை	3	5	16	18	12	7	4

இத்தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

ஊகச் சராசரி $A = 20$, $C = 5$ என்க.

வயது	மைய மதிப்பு x_i	f_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 20$	$d_i = \frac{x_i - A}{C}$ $d_i = \frac{x_i - A}{5}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	3	– 15	– 3	– 9	27
10-20	15	5	– 5	– 1	– 5	5
20-30	25	16	5	1	16	16
30-40	35	18	15	3	54	162
40-50	45	12	25	5	60	300
50-60	55	7	35	7	49	343
60-70	65	4	45	9	36	324
		$\Sigma f_i = N = 65$			$\Sigma f_i d_i = 201$	$\Sigma f_i d_i^2 = 1177$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$\sigma = 5 \times \sqrt{\frac{1177}{65} - \left(\frac{201}{65}\right)^2}$$

$$\sigma = 5 \times \sqrt{\frac{1177}{65} - \frac{40401}{4225}}$$

$$\sigma = 5 \times \sqrt{\frac{76505 - 40401}{4225}}$$

$$\sigma = 5 \times \sqrt{8.54}$$

$$\sigma = 5 \times 2.92 = 14.6$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 14.6$

12. ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட தட்டுகளின் விட்ட அளவுகள் (செ.மீ) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதன் திட்ட விலக்கம் காண்க.

விட்டங்கள் (செ.மீ)	21-24	25-28	29-32	33-36	37-40	41-44
தட்டுகளின் எண்ணிக்கை	15	18	20	16	8	7

தீர்வு : ஊகச் சராசரி $A = 34.5$ என்க

விட்டங்கள் (செ.மீ)	மைய மதிப்பு x_i	f_i	$d_i = \frac{x_i - A}{2}$ $d_i = \frac{x_i - 34.5}{2}$	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
20.5–24.5	22.5	15	– 6	– 90	36	540
24.5–28.5	26.5	18	– 4	– 72	16	288
28.5–32.5	30.5	20	– 2	– 40	4	80
32.5–36.5	34.5	16	0	0	0	0
36.5–40.5	38.5	8	2	16	4	32
40.5–44.5	42.5	7	4	28	16	112
		$\Sigma f_i = N = 84$		$\Sigma f_i d_i = – 158$		$\Sigma f_i d_i^2 = 1052$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$

$$\sigma = 2 \times \sqrt{\frac{1052}{84} - \left(\frac{-158}{84}\right)^2}$$

$$\sigma = 2 \times \sqrt{\frac{22092}{1764} - \frac{6241}{1764}}$$

$$\sigma = 2 \times \sqrt{\frac{15851}{1764}} = 2 \times \sqrt{8.98}$$

$$\sigma = 2 \times 2.99 \simeq 5.99$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $\sigma \simeq 5.99 \simeq 6$

13. 50 மாணவர்கள் 100 மீட்டர் தூரத்தை கடக்க எடுத்துக் கொண்ட கால அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

எடுத்துக் கொண்ட நேரம் (வினாடியில்)	8.5 - 9.5	9.5 - 10.5	10.5 - 11.5	11.5 - 12.5	12.5 - 13.5
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	17	10	9

தீர்வு :

ஊகச் சராசரி $A = 11$; மைய மதிப்புகள் x_i என்க.

எடுத்துக் கொண்ட நேரம் (வினாடி)	x_i	f_i	$d_i = x_i - 11$	d^2	fd	fd^2
8.5–9.5	9	6	– 2	4	– 12	24
9.5–10.5	10	8	– 1	1	– 8	8
10.5–11.5	11	17	0	0	0	0
11.5–12.5	12	10	1	1	10	10
12.5–13.5	13	9	2	4	18	36
		$\Sigma f_i = N = 50$			$\Sigma f_i d_i = 8$	$\Sigma f_i d_i^2 = 78$

$$\text{திட்ட விலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{78}{50} - \left(\frac{8}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{78}{50} - \frac{64}{2500}}$$

$$= \sqrt{\frac{3900-64}{2500}} = \sqrt{\frac{3836}{2500}}$$

$$= \sqrt{1.5344} \simeq 1.238 \simeq 1.24$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $\sigma \simeq 1.24$

14. 100 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில், அவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கமானது முறையே 60 மற்றும் 15 ஆகும். பின்னர் 45 மற்றும் 72 என்ற இரு மதிப்பெண்களுக்குப் பதிலாக முறையே 40 மற்றும் 27 என்று தவறாகப் பதிவு செய்யப்பட்டது தெரிய வந்தது. அவற்றைச் சரி செய்தால் கிடைக்கப்பெறும் புதிய தரவின் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் காண்க.

தீர்வு :

மதிப்பெண்களின் சராசரி $\bar{x} = 60$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 15$

தவறான பதிவுகள் = 40 மற்றும் 27

சரியான பதிவுகள் = 45 மற்றும் 72

$$\text{பழைய சராசரி} = \frac{\Sigma x_i}{n} = 60$$

$$\frac{\text{பழைய } \Sigma x_i}{100} = 60$$

$$\text{பழைய } \Sigma x_i = 60 \times 100 = 6000$$

$\therefore$ சரியான Σx_i = 6000 – தவறான பதிவுகள்+ சரியான பதிவுகள்

$$= 6000 - (40 + 27) + (45 + 72)$$

$$= 6000 - 67 + 117$$

$\therefore$ சரியான $\Sigma x_i = 6050$

$$\text{சரியான சராசரி} = \text{சரியான } \frac{\text{பழைய } \Sigma x_i}{n} = \frac{6050}{100}$$

சரியான சராசரி = 60.5

பழைய திட்டவிலக்கம் $\sigma = 15$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$15 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - (60)^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$225 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - 3600$$

$$225 + 3600 = \frac{\Sigma x_i^2}{100}$$

$$\frac{\text{பழைய } \Sigma x_i}{100} = 3825$$

$$\text{பழைய } \Sigma x_i^2 = 3825 \times 100$$

$$\text{பழைய } \Sigma x_i^2 = 382500$$

சரியான Σx_i^2 = 382500 – (தவறான பதிவுகள்)^2 + (சரியான பதிவுகள்)^2

$$= 382500 - 40^2 - 27^2 + 45^2 + 72^2$$

$$= 382500 - 1600 - 729 + 2025 + 5184$$

$$= 382500 - 2329 + 2025 + 5184$$

$$= 389709 - 2329$$

சரியான $\Sigma x_i^2 = 387380$

$$\text{சரியான } \sigma = \sqrt{\frac{387380}{100} - (60.5)^2}$$

$$= \sqrt{3873.80 - 3660.25}$$

$$= \sqrt{213.55}$$

$$\sigma = 14.61$$

$\therefore$ சரியான $\sigma = 14.61$; சரியான சராசரி = 60.5

15. ஏழு தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி முறையே 8 ,16 ஆகும். அதில் ஐந்து தரவுப் புள்ளிகள் 2 , 4, 10, 12 மற்றும் 14 எனில் மீதம் உள்ள இரு தரவுப் புள்ளிகளைக் கண்டறிக.

தீர்வு :

தரவுப்புள்ளிகளின் சராசரி = 8

விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 16.

a மற்றும் b என்பன மீதமுள்ள தரவுப் புள்ளிகள் என்க.

$$\frac{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மதிப்பு}}{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}} = \text{சராசரி } \bar{x}$$

$$\frac{2+4+10+12+14+a+b}{7} = 8$$

$$42 + a + b = 56$$

$$a + b = 56 - 42 = 14 \quad \ldots(1)$$

$$b = 14 - a$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2}{7}$$

$$= \frac{(2-8)^2 + (4-8)^2 + (10-8)^2 + (12-8)^2 + (14-8)^2 + (a-8)^2 + (b-8)^2}{7}$$

$$16 = \frac{36 + 16 + 4 + 16 + 36 + (a-8)^2 + (b-8)^2}{7}$$

$$108 + (a-8)^2 + (b-8)^2 = 112$$

$$(a-8)^2 + (b-8)^2 = 4 \quad \ldots(2)$$

$b = 14 - a$ என (2) இல் பிரதியிட,

$$(a-8)^2 + (b-8)^2 = 4$$

$$(a-8)^2 + ((14-a)-8)^2 = 4$$

$$(a-8)^2 + (6-a)^2 = 4$$

$$a^2 + 64 - 16a + 36 + a^2 - 12a - 4 = 0$$

$$2a^2 - 28a + 96 = 0$$

2 ஆல் வகுக்க

$$a^2 - 14a + 48 = 0$$

$$(a-6)(a-8) = 0$$

$a = 6$ அல்லது $a = 8$

$a = 6 \Rightarrow b = 14 - a = 14 - 6 = 8$

$a = 6$ மற்றும் $b = 8$

∴ மீதமுள்ள இரு எண்கள் 6 மற்றும் 8

மாறுபாட்டுக் கெழு

நினைவில் கொள்க

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தரவுகளின் ஒத்த மாற்றங்களை ஒப்பிட திட்டவிலக்கத்திற்கு தொடர்புடைய அளவான, மாறுபாட்டுக் கெழு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

- இதை சதவீதத்தில் குறிப்பிடலாம்.
- மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$
- எந்தத் தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழு குறைவாக உள்ளதோ அது அதிகச் சீர்மைத் தன்மை உடையது அல்லது அதிக நிலைத் தன்மை உடையது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

8.15 தரவின் சராசரியானது 25.6 மற்றும் அதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவானது 18.75 எனில், அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$\bar{x} = 25.6$, மாறுபாட்டுக்கெழு C.V. = 18.75

மாறுபாட்டுக்கெழு $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$18.75 = \frac{\sigma}{25.6} \times 100;$$

இதிலிருந்து, $\sigma = 4.8$

8.16 பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு பள்ளியின் பத்தாம் வகுப்பு மாணவர்களின் உயரம் மற்றும் எடைகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி ஆகிய மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	உயரம்	எடை
சராசரி	155 செ.மீ	46.50 கி.கி
விலக்க வர்க்கச் சராசரி	72.25 செ.மீ^{2}	28.09 கி.கி^{2}

இவற்றில் எது மற்றொன்றை விட அதிக வேறுபாடுடையது?

தீர்வு :

இரண்டு தரவுகளை ஒப்பிட, முதலில் இரண்டிற்கும் மாறுபாட்டு கெழு காண வேண்டும்.

சராசரி $\bar{x}_1 = 155$ செ.மீ

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma_1^2 = 72.25$ செ.மீ^{2}

எனவே திட்டவிலக்கம் $\sigma_1 = 8.5$

மாறுபாட்டுக்கெழு $C.V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$

$C.V_1 = \frac{8.5}{155} \times 100\% = 5.48\%$ (உயரங்களுக்கானது)

சராசரி $\bar{x}_2 = 46.50$ கி.கி

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma_2^2 = 28.09$ கி.கி^{2}

திட்ட விலக்கம் $\sigma_2 = 5.3$ கி.கி

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V_2 = \frac{\sigma_2}{x_2} \times 100\%$

$C.V_2 = \frac{5.3}{46.50} \times 100\% = 11.40\%$ (எடைகளுக்கானது)

$C.V_1 = 5.48\%$ மற்றும் $C.V_2 = 11.40\%$

$C.V_2 > C.V_1$ என்பதால், மாணவர்களின் எடையானது உயரத்தை விட அதிக மாறுபாட்டுடன் உள்ளது.

8.17 ஒரு குடும்பத்தில் குறிப்பிட்ட வாரத்தில் உட்கொள்ளப்பட்ட கொய்யா மற்றும் ஆரஞ்சு பழங்களின் எண்ணிக்கைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கொய்யாப் பழங்களின் எண்ணிக்கை	3	5	6	4	3	5	4
ஆரஞ்சு பழங்களின் எண்ணிக்கை	1	3	7	9	2	6	2

இங்கு, எந்த பழம் சீராக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது?

தீர்வு : முதலில் கொய்யா மற்றும் ஆரஞ்சு பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைத் தனித்தனியாக காணவேண்டும்.

கொய்யாப் பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு:

இங்கு n = 7

x_i	x_i^2
3	9
5	25
6	36
4	16
3	9
5	25
4	16
$\Sigma x_i = 30$	$\Sigma x_i^2 = 136$

சராசரி $\bar{x}_1 = \frac{30}{7} = 4.29$

திட்டவிலக்கம் $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{136}{7} - \left(\frac{30}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{19.43 - 18.40} = 1.01$

கொய்யாப் பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு

$C.V_1 = \frac{\sigma_1}{x_1} \times 100\% = \frac{1.01}{4.29} \times 100\% = 23.54\%$

ஆரஞ்சுப் பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு:

இங்கு n = 7

x_i	x_i^2
1	1
3	9
7	49
9	81
2	4
6	36
2	4
$\Sigma x_i = 30$	$\Sigma x_i^2 = 184$

சராசரி $\bar{x}_2 = \frac{30}{7} = 4.29$

திட்டவிலக்கம் $\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

$\sigma_2 = \sqrt{\frac{184}{7} - \left(\frac{30}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{26.29 - 18.40} = 2.81$

ஆரஞ்சு பழங்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு

$C.V_2 = \frac{\sigma_2}{x_2} \times 100\% = \frac{2.81}{4.29} \times 100\%$

$= 65.50\%$

$C.V_1 = 23.54\%$, $C.V_2 = 65.50\%$. இங்கு, $C.V_1 < C.V_2$ ஆக இருப்பதால், ஆரஞ்சை விட கொய்யப் பழங்கள் சீராக உட்கொள்ளப்படுகின்றன என்ற முடிவிற்கு வரலாம்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. மாறுபாட்டுக் கெழுவானது _____ சார்ந்த மாற்றத்தை கணக்கிட உதவும்.

விடை: திட்ட விலக்கம்

2. திட்டவிலக்கத்தை, சராசரியால் வகுத்தால் கிடைப்பது _____.

விடை: மாறுபாட்டுக் கெழு

3. மாறுபாட்டுக் கெழுவானது _____மற்றும் _____ ஆகியவற்றைச் சார்ந்து இருக்கும்.

விடை: சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம்

4. ஒரு தரவின், சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கமானது 8 மற்றும் 2 எனில், அதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவானது _____ ஆகும்.

விடை: 25%

5. இரண்டு தரவுகளை ஒப்பிடும்போது, எந்தக் தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழு _____ இருக்குமோ அது சீர்மைத் தன்மையற்றதாக இருக்கும்.

விடை: அதிகமாக

பயிற்சி 8.2

1. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் சராசரி ஆகியன முறையே 6.5 மற்றும் 12.5 எனில், மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 6.5$

சராசரி $\bar{x} = 12.5$

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{6.5}{12.5} \times 100\%$

$= \frac{65}{125} \times 100\%$

$= \frac{13}{25} \times 100\%$

$= 52\%$

$\therefore$ மாறுபாட்டுக் கெழு 52%

2. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக்கெழு ஆகியன முறையே 1.2 மற்றும் 25.6 எனில், அதன் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் = 1.2

மாறுபாட்டுக் கெழு = 25.6

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$25.6 = \frac{1.2}{\bar{x}} \times 100\%$

$\bar{x} = \frac{1.2}{25.6} \times 100 = 4.687$

$\therefore$ சராசரி $\bar{x} = 4.69$

3. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு முறையே 15 மற்றும் 48 எனில், அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

சராசரி $\bar{x} = 15$

மாறுபாட்டுக் கெழு (C.V) = 48

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$48 = \frac{\sigma}{15} \times 100\%$

$\frac{48 \times 15}{100} = \sigma$

$\sigma = \frac{36}{5} = 7.2$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $\sigma = 7.2$

4. n = 5, $\bar{x}$ = 6, Σx^2 = 765 எனில், மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

மாறுபாட்டுக்கெழு காண முதலில் திட்டவிலக்கம் (σ) காண வேண்டும்.

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$

$\frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{765}{5} = 153$

$\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = (\bar{x})^2 = 6^2 = 36$

$\therefore \quad \sigma = \sqrt{(153) - 36} = \sqrt{117}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 13}$

$\sigma = 3\sqrt{13}$

மாறுபாட்டுக் கெழு $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{3\sqrt{13}}{6} \times 100\% = \frac{\sqrt{13}}{2} \times 100\% = \frac{3.60555}{2} \times 100\%$

$= 1.80277 \times 100\% = 180.277\ \%$

$\therefore$ மாறுபாட்டுக் கெழு = 180.28 %

5. 24, 26, 33, 37, 29, 31 ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

தரவுகள் ஏறுவரிசையில் : 24, 26, 29, 31, 33, 37

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_i}{N}\right)^2}$

ஊகச் சராசரி A = 31 என்க.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 31$	d_i^2
24	– 7	49
26	– 5	25
29	– 2	4
31	0	0
33	2	4
37	6	36
	$\Sigma d_i = -6$	$\Sigma d_i^2 = 118$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{\frac{118}{6} - \left(\frac{-6}{6}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{19.67 - (-1)^2} = \sqrt{19.7 - 1}$$

$$\sigma = \sqrt{18.67} = 4.3$$

சராசரி $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}$

சராசரி $\bar{x} = \frac{24 + 26 + 29 + 31 + 33 + 37}{6}$

$$\bar{x} = \frac{180}{6} = 30$$

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$C.V = \frac{4.3}{30} \times 100\% = 0.1433 \times 100\%$$

$$= 14.33\%$$

தரப்பட்ட தரவுகளின் மாறுபாட்டுக் கெழு
$= 14.33\%$

6. 8 மாணவர்கள் ஒரு நாளில் வீட்டுப் பாடத்தை முடிப்பதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவுகள் (நிமிடங்களில்) பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 38, 40, 47, 44, 46, 43, 49, 53. இத்தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

தரப்பட்ட தரவுகள்: 38, 40, 43, 44, 46, 47, 49, 53.

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_i}{N}\right)^2}$

ஊகச் சராசரி $A = 44$ என்க.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 44$	d_i^2
38	– 6	36
40	– 4	16
43	– 1	1
44	0	0
46	2	4
47	3	9
49	5	25
53	9	81
	$\Sigma d_i = 8$	$\Sigma d_i^2 = 172$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_i}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{172}{8} - \left(\frac{8}{8}\right)^2} = \sqrt{21.5 - (1)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{21.5 - 1} = \sqrt{20.5} = 4.53$$

சராசரி $\bar{x} = \frac{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் கூடுதல் மதிப்பு}}{\text{தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை}}$

$$\bar{x} = \frac{38 + 40 + 43 + 44 + 46 + 47 + 49 + 53}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{360}{8} = 45$$

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{4.53}{45} \times 100\% = \frac{453}{45}$$

$\therefore$ மாறுபாட்டுக் கெழு $= 10.07\%$

7. சத்யா மற்றும் வித்யா இருவரும் 5 பாடங்களில் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்கள் முறையே 460 மற்றும் 480 ஆகும். மேலும் அதன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 4.6 மற்றும் 2.4 எனில், யாருடைய செயல்திறன் மிகுந்த நிலைத் தன்மை கொண்டது?

தீர்வு :

சத்யா

5 பாடங்களில் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்கள் $= 460$

$\therefore$ சத்யாவின் மதிப்பெண் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{460}{5} = 92$$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = 4.6$

$\therefore$ மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{4.6}{92} \times 100\% = \frac{460}{92}\%$$

$$= \frac{10}{2}\% = 5\%$$

சத்யா பெற்ற மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு = 5%

வித்யா

5 பாடங்களில் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்கள் = 480

∴ வித்யாவின் மதிப்பெண் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{480}{5} = 96$$

திட்ட விலக்கம் σ = 2.4

மாறுபாட்டுக் கெழு C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{2.4}{96} \times 100\% = \frac{240}{96}\%$$

$$= \frac{10}{4}\% = 2.5\%$$

∴ வித்யா பெற்ற மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டுக் கெழு = 2.5%

வித்யாவின் மாறுபாட்டுக் கெழு < சத்யாவின் மாறுபாட்டுக் கெழு

∴ வித்யாவின் செயல்திறன் மிகுந்த நிலைத் தன்மை கொண்டது.

8. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 40 மாணவர்கள், கணிதம், அறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியல் ஆகிய மூன்று பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பாடங்கள்	சராசரி	திட்டவிலக்கம்
கணிதம்	56	12
அறிவியல்	65	14
சமூக அறிவியல்	60	10

இந்த மூன்று பாடங்களில் எது அதிக நிலைத் தன்மை கொண்டது மற்றும் எது குறைந்த நிலைத்தன்மை கொண்டது?

தீர்வு :

கணிதம்:

சராசரி $\bar{x}$ = 56; திட்ட விலக்கம் σ = 12

மாறுபாட்டுக் கெழு C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{12}{56} \times 100\% = \frac{1200}{56}\% = 21.43\%$$

அறிவியல்:

சராசரி $\bar{x}$ = 65; திட்ட விலக்கம் σ = 14

மாறுபாட்டுக் கெழு C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{14}{65} \times 100\% = \frac{1400}{65}\%$$

$$= 21.538\% = 21.54\%$$

சமூக அறிவியல்:

சராசரி $\bar{x}$ = 60; திட்ட விலக்கம் σ = 10

மாறுபாட்டுக் கெழு C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{10}{60} \times 100\% = \frac{100}{6}\%$$

$$= 16.666\%$$

$$= 16.67\%$$

அறிவியல் அதிக மாறுபாட்டுக் கெழுவையும் சமூக அறிவியல் குறைந்த மாறுபாட்டுக் கெழுவையும் கொண்டுள்ளது.

∴ சமூக அறிவியல் அதிக நிலைத் தன்மை உடையது மற்றும் அறிவியல் குறைந்த நிலைத் தன்மை உடையது.

9. இரண்டு நகரங்கள் A மற்றும் B -யின் குளிர் காலத்தில் நிலவும் வெப்பநிலை அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நகரம் A-ன் வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸ்)	18	20	22	24	26
நகரம் B-ன் வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸ்)	11	14	15	17	18

எந்த நகரமானது வெப்பநிலை மாறுபாடுகளில் அதிகமான நிலைத்தன்மை கொண்டது?

தீர்வு :

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum d_i}{N}\right)^2}$

நகரம் A:

ஊகச் சராசரி A = 22 என்க.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 22$	d_i^2
18	– 4	16

20	– 2	4
22	0	0
24	2	4
26	4	16
	$\sum d_i = 0$	$\sum d_i^2 = 40$

$$\sigma = \sqrt{\frac{40}{5} - (0)^2} = \sqrt{8}$$

$$\sigma = 2.828 = 2.83$$

சராசரி $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{18+20+22+24+26}{5}$

$$= \frac{110}{5} = 22$$

மாறுபாட்டுக் கெழு C. V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{2.83}{22} \times 100\% = 12.86\%$$

நகரம் B:

ஊகச் சராசரி B = 15 என்க.

x_i	$d_i = x_i - B$ $d_i = x_i - 15$	d_i^2
11	– 4	16
14	– 1	1
15	0	0
17	2	4
18	3	9
	$\sum d_i = 0$	$\sum d_i^2 = 30$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{30}{5} - \left(\frac{0}{5}\right)^2}$

$$= \sqrt{6-0} = \sqrt{6} = 2.449$$

சாரசரி $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$

$$= \frac{11+14+15+17+18}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{75}{5} = 15$$

∴ மாறுபாட்டுக் கெழு C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{2.4495}{15} \times 100\%$$

$$= \frac{244.95}{15}\% = 16.33\%$$

நகரம் A இன் மாறுபாட்டுக் கெழு < நகரம் B இன் மாறுபாட்டுக் கெழு

∴ நகரம் A அதிக நிலைத் தன்மை கொண்டது.

நிகழ்தகவு

நினைவில் கொள்க

1. **சமவாய்ப்பு சோதனை:**
ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை என்பதில்
(i) மொத்த வாய்ப்புகள் அறியப்படும் (ii) குறிப்பிட்ட வாய்ப்புகள் அறியப்படாது
எடுத்துக்காட்டு: 1. ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல், 2. பகடையை உருட்டுதல், 3. 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டில் இருந்து ஒரு சீட்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

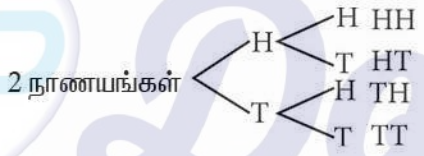
2. **கூறுவெளி:**
ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் கிடைக்கப்பெறும் அனைத்துச் சாத்தியமான விளைவுகளின் தொகுப்பு கூறுவெளி எனப்படுகிறது. இதைப் பொதுவாக S என்று குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: நாம் ஒரு பகடையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. **மர வரைபடம்:**
ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் அனைத்து சாத்தியமான விளைவுகளையும் மர வரைபடம் மூலம் எளிதாக வெளிப்படுத்தலாம். ஒரு மர வரைபடத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கிளையும் சாத்தியமான விளைவைப் பிரதிபலிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு:



∴ நாம் இரண்டு நாணயங்களைச் சுண்டும்போது மர வரைபடத்திலிருந்து கூறுவெளியை
$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ என எழுதலாம்.

4. **நிகழ்ச்சி:**
ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் கிடைக்கும் ஒவ்வொரு விளைவும் நிகழ்ச்சி என்கிறோம். எனவே, ஒரு நிகழ்ச்சி கூறுவெளியின் உட்கணமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு: இரண்டு நாணயங்களை சுண்டும்பொழுது, இரண்டும் தலைகளாக கிடைக்கப் பெறுவது ஒரு நிகழ்ச்சி.

5. **முயற்சி:**
ஒரு சோதனையை ஒரு முறை செய்வது முயற்சியாகும்.

6. **சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள்:**
இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கு சமவாய்ப்புகள் இருந்தால் அவற்றைச் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு நாணயத்தை சுண்டும்போது கிடைக்கும் தலை மற்றும் பூ ஆகியவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள்.

7. **உறுதியான நிகழ்ச்சிகள்:**
ஒரு சோதனையில் நிச்சயமாக நிகழும் நிகழ்ச்சியை உறுதியான நிகழ்ச்சி என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1 –லிருந்து 6 வரை உள்ள இயல் எண்களில் ஏதேனும் ஒரு எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி உறுதியான நிகழ்ச்சியாகும்.

8. **இயலா நிகழ்ச்சிகள்:**
ஒரு சோதனையில், ஒரு போதும் நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சிகள் இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு: இரண்டு நாணயங்களை சுண்டும்போது மூன்று தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சியாகும்.

9. **ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்:**
இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கு பொதுவான கூறு புள்ளிகள் இருக்காது. அந்த நிகழ்ச்சிகளை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம். A , B ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்றால் $A \cap B = \phi$.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஒற்றைப்படை எண்கள் மற்றும் இரட்டைப்படை எண்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்.

10. **நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள்:**
நிகழ்ச்சிகளின் சேர்ப்பு கணம் கூறுவெளியாக இருப்பின் அவற்றை நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு நாணயத்தை இருமுறை சுண்டும்போது இரண்டு தலைகள், ஒரே ஒரு தலை, தலை இல்லாமல் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள்.

11. **நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள்:**
A யின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியானது A –யில் இல்லாத மற்ற விளைவுகளைக் கொண்ட கூறு புள்ளிகள் ஆகும். இதை A' அல்லது A^C அல்லது $\bar{A}$ எனக் குறிக்கலாம்.

A மற்றும் A' ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் நிறைவு செய்யும் நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கும்.

12. **ஒரே ஒரு விளைவு நிகழ்ச்சி:**
E என்ற நிகழ்ச்சியில் ஒரேயொரு விளைவு மட்டும் இருந்தால் அதற்கு ஒரேயொரு விளைவு நிகழ்ச்சி என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்வு ஒரே ஒரு விளைவு நிகழ்ச்சி ஆகும்.

13. **ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு:**
ஒரு சம வாய்ப்பு சோதனையில், S என்பது கூறுவெளி மற்றும் $E \subseteq S$. இங்கு, E ஆனது ஒரு நிகழ்ச்சி. E என்ற நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவானது,

$$P(E) = \frac{E \text{ நிகழ்வதற்கு சாதகமான வாய்ப்புகள்}}{\text{மொத்த வாய்ப்புகள்}}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

சில முடிவுகள்:

(i) $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

(ii) $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$. உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது 1 ஆகும்.

(iii) $P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவானது 0 ஆகும்.

(iv) E ஆனது, S –ன் உட்கணமாகும். மேலும் ϕ ஆனது எல்லா கணங்களின் உட்கணமாகும்.

$0 \le P(E) \le 1$. ஆகையால், நிகழ்தகவு மதிப்பு எப்பொழுதும் 0 முதல் 1 வரை இருக்கும்.

(v) $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

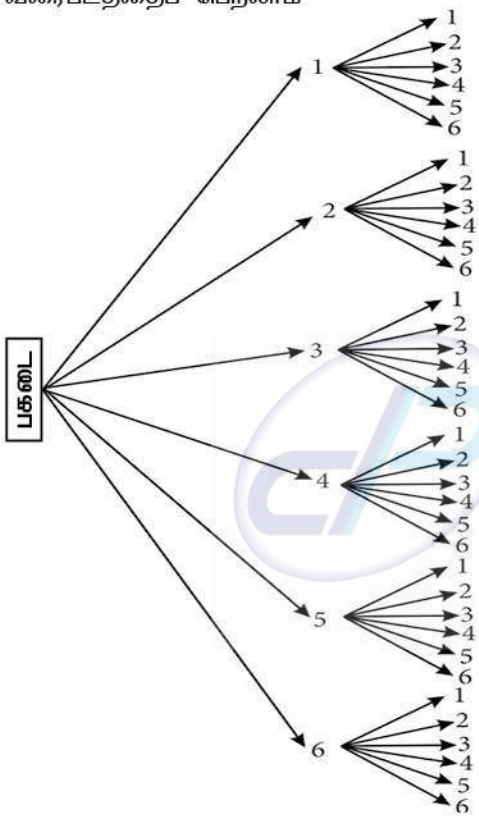
(vi) $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

எடுத்துக்காட்டு

8.18 மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளியை எழுதுக.

தீர்வு :

இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது, ஒவ்வொரு பகடையிலும் 6 முக மதிப்புகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என உள்ளதால் கீழ்க்காணும் மர வரைபடத்தைப் பெறலாம்



அதனால் கூறுவெளியை

S = {(1, 1) , (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1) , (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1) , (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1) , (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1) , (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1) , (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

என எழுதலாம்.

8.19 ஒரு பையில் 5 நீல நிறப்பந்துகளும் 4 பச்சை நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்படும் பந்தானது (i) நீலமாக (ii) நீலமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு : மொத்த வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(S) = 5 + 4 = 9$

(i) A என்பது நீல நிறப்பந்தை பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

A நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(A) = 5$

நீலநிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$

(ii) $\overline{A}$ ஆனது நீல நிறப்பந்து கிடைக்காமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி. எனவே,

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

8.20 இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. கிடைக்கப்பெறும் முக மதிப்புகளின் கூடுதல்

(i) 4 -க்குச் சமமாக

(ii) 10 -ஐ விடப் பெரியதாக

(iii) 13 -ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்பொழுது, கூறுவெளியானது

S = {(1, 1) , (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1) , (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1) , (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1) , (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1) , (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1) , (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

என இருக்கும். எனவே $n(S) = 36$

(i) A ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4 -ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$; $n(A) = 3$.

முகமதிப்புகளின் கூடுதல் 4 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(ii) B ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 10 -ஐ விட பெரிய எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$; $n(B) = 3$

கூடுதல் 10 ஐ விட பெரிதாக கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(iii) C ஆனது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 13 -ஐ விட குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. எனவே C = S.

ஆகவே, $n(C) = n(S) = 36$
ஆகையால், முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 13 -ஐ விடக் குறைவானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1$$

8.21 **இரண்டு நாணயங்கள் ஒன்றாகச் சுண்டப்படுகின்றன. இரண்டு நாணயங்களிலும் வெவ்வேறு முகங்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?**

தீர்வு :

இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டப்படும்பொழுது அதன் கூறுவெளியானது

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$; $n(S) = 4$

A ஆனது நாணயங்களில் வெவ்வேறு முகங்கள் கொண்ட நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{HT, TH\}$; $n(A) = 2$

நாணயங்களில் வெவ்வேறு முகங்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

8.22 **நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது (i) சிவப்பு நிறச் சீட்டு (ii) ஹார்ட் சீட்டு (iii) சிவப்பு நிற இராசா (iv) முக சீட்டு (v) எண் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.**

தீர்வு :

$n(S) = 52$

(i) A என்பது சிவப்புச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(A) = 26$

சிவப்பு சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) B என்பது ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(B) = 13$

ஹார்ட் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(iii) C என்பது சிவப்பு நிற இராசா சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(C) = 2$

எனவே, சிவப்பு நிற இராசா சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

(iv) D என்பது முகச்சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. முகச்சீட்டுகளாவன மந்திரி (J), அரசி (Q) மற்றும் இராசா (K).

$n(D) = 4 \times 3 = 12$

முகச்சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

(v) E என்பது எண் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. எண் சீட்டுகளாவன 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 மற்றும் 10.

$n(E) = 4 \times 9 = 36$

எண் சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

8.23 **ஒரு நெட்டாண்டில் (leap year) 53 சனிக்கிழமைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (குறிப்பு: $366 = 52 \times 7 + 2$)**

தீர்வு :

ஒரு நெட்டாண்டில் 366 நாட்கள் உள்ளன. எனவே 52 முழு வாரங்களும் மற்றும் 2 நாட்களும் உள்ளன. 52 வாரங்களில், 52 சனிக்கிழமைகள் கிடைத்து விடும். மீதமுள்ள இரண்டு நாட்களுக்கான வாய்ப்புகள் கீழ்க்காணும் கூறுவெளியில் கிடைக்கும்.

S = {ஞாயிறு-திங்கள், திங்கள்-செவ்வாய், செவ்வாய்-புதன், புதன்-வியாழன், வியாழன்- வெள்ளி, வெள்ளி-சனி, சனி-ஞாயிறு}

$n(S) = 7$

A என்பது 53 வது சனிக்கிழமை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே A = {வெள்ளி-சனி, சனி-ஞாயிறு}

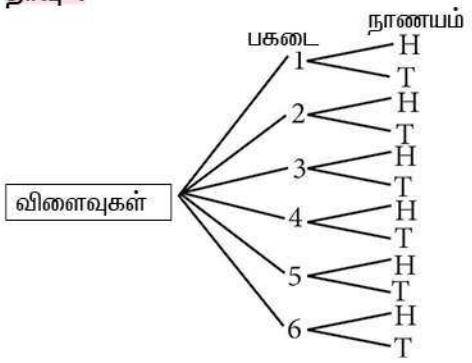
$n(A) = 2$

53 சனிக்கிழமைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$$

8.24 ஒரு பகடை உருட்டப்படும் அதே நேரத்தில் ஒரு நாணயமும் சுண்டப்படுகிறது. பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கும், நாணயத்தில் தலைக் கிடைப்பதற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :



கூறுவெளி

S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T};
n(S) = 12

A ஆனது ஒற்றைப் படை எண் மற்றும் தலைக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

A = {1H, 3H, 5H}; n(A) = 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

8.25 ஒரு பையில் 6 பச்சை நிறப்பந்துகளும், சில கருப்பு மற்றும் சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை, சிவப்பு பந்துகளைப் போல் இருமடங்காகும். பச்சை பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சிவப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்வைப் போல் மூன்று மடங்காகும். இவ்வாறெனில் (i) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை (ii) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

பச்சை பந்துகளின் எண்ணிக்கை n(G) = 6
சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை n(R) = x என்க.
எனவே, கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை n(B) = 2x
மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை n(S) = 6 + x + 2x
= 6 + 3x

கொடுக்கப்பட்டது, P(G) = 3 × P(R)

$$\frac{6}{6+3x} = 3 \times \frac{x}{6+3x}$$

3x = 6 லிருந்து x = 2

(i) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 2 × 2 = 4

(ii) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 6 + (3 × 2)
= 12

8.26 படத்தில் காட்டியுள்ளபடி அம்புக்குறி சுழற்றும் விளையாட்டில் 1, 2, 3, ... 12 என்ற எண்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் கிடைக்க வாய்ப்புள்ளது. அம்புக்குறியானது (i) 7 (ii) பகா எண் (iii) பகு எண் ஆகியவற்றில் நிற்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டறிக.

தீர்வு :



கூறுவெளி S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
n (S) = 12

(i) A ஆனது அம்புக்குறி எண் 7-ல் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க n(A) = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12}$$

(ii) B ஆனது அம்புக்குறி பகா எண்ணில் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.
B = {2, 3, 5, 7, 11}; n(B) = 5

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

(iii) C ஆனது அம்புக்குறி பகு எண்ணில் நிற்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.
C = {4, 6, 8, 9, 10, 12}; n(C) = 6

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவைக் கணிக்க முடியாமல் இருக்கும் ஒரு சோதனையை _____ என்போம்.
விடை: சமவாய்ப்புச் சோதனை

2. அனைத்துச் சாத்தியமானக் கூறுகளின் தொகுப்பையும் _____ என அழைக்கிறோம்.
விடை: கூறுவெளி

3. கொடுக்கப்பட்ட எண்களில் எவை நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது? (a) – 0.0001 (b) 0.5 (c) 1.001 (d) 1 (e) 20% (f) 0.253 (g) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (h) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

விடை: நிகழ்தகவு எப்போதும் 0 முதல் 1 வரை இருக்கும்.

$0 \le P(E) \le 1$

$\therefore$ (a) -0.0001 (< 0)

(c) 1.001 (> 1)

(g) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (< 0)

ஆகியவை நிகழ்தகவாக இருக்க இயலாது.

சிந்தனைக் களம்

1. சாதாரண ஆண்டில், 53 சனிக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

விடை: ஒரு சாதாரண ஆண்டில் 52 சனிக்கிழமைகள் இருக்கும். மீதம் 1 நாள் இருக்கும்.

இந்த ஒரு நாள் வாரத்தின் 7 நாட்களுள் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

எனவே கூறுவெளி S = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}

$n(S) = 7$

A என்பது சனிக்கிழமை வரும் நிகழ்வு என்க.

$\therefore n(A) = 1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$P(A) = \frac{1}{7}$

$\therefore$ ஒரு சாதாரண ஆண்டில் 53 சனிக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{7}$

2. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி எது?

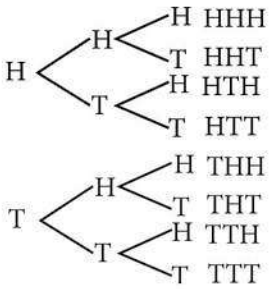
விடை: இயலா நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி கூறுவெளி S ஆகும்.

பயிற்சி 8.3

1. மூன்று நாணயங்கள் சுண்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளியை மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதுக.

தீர்வு :

மூன்று நாணயங்களை சுண்டும்போது கிடைக்கும் முடிவுகளாவன

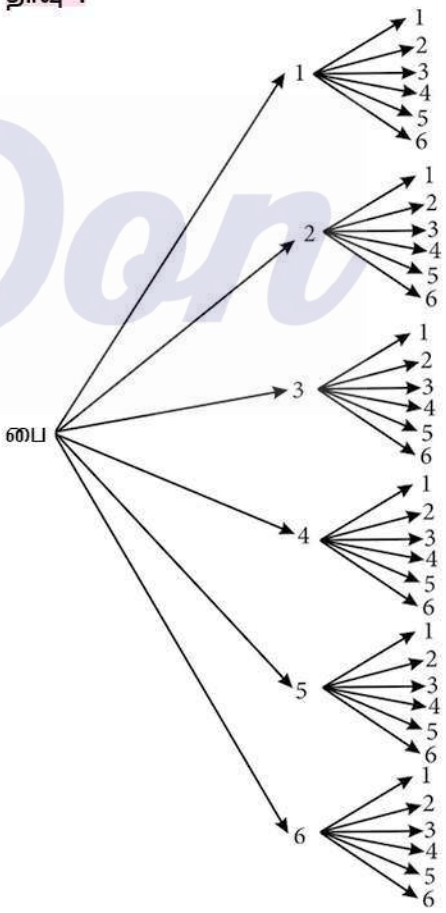


$\therefore$ கூறுவெளி = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$n(S) = 8$

2. ஒரு பையிலுள்ள 1 முதல் 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட பந்துகளிலிருந்து, இரண்டு பந்துகள் எடுப்பதற்கான கூறுவெளியை மர வரைபடம் மூலமாகக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு :



கூறுவெளி

S = {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)}

$\therefore n(S) = 36$

3. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி A என்க. இங்கு P(A) : $P(\bar{A})$ = 17 : 15 மற்றும் n(S) = 640 எனில், (i) $P(\bar{A})$ (ii) n(A) -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

P(A) : $P(\bar{A})$ = 17 : 15 எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) $\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{17}{15}$

$\frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{17}{15}$ $[\because P(\bar{A}) = 1 - P(A)]$

$15\,P(A) = 17[1 - P(A)]$

$15\,P(A) = 17 - 17\,P(A)$

$32\,P(A) = 17$; $P(A) = \frac{17}{32}$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{32-17}{32} = \frac{15}{32}$

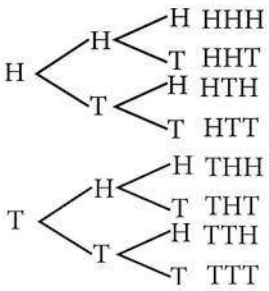
(ii) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{17}{32}$

$n(A) = 17$

4. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. இரண்டு அடுத்தடுத்த பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படும்போது கிடைக்கும் முடிவுகளாவன



கூறுவெளி S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

n(S) = 8

A என்பது இரு அடுத்தடுத்த பூக்கள் கிடைக்கும் நிகழ்வு என்க.

A = {HTT, TTH, TTT}

n(A) = 3

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

இரு அடுத்தடுத்த பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{3}{8}$

5. ஒரு பொது விழாவில், 1 முதல் 1000 வரை எண்களிட்ட அட்டைகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. விளையாடும் ஒவ்வொருவரும் ஒரு அட்டையைச் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கிறார்கள். எடுத்த அட்டை திரும்ப வைக்கப்படவில்லை. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அட்டையில் எண் 500 -ஐ விட அதிகமாக உள்ள வர்க்க எண் இருந்தால், அவர் வெற்றிக்கான பரிசைப் பெறுவார். (i) முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற (ii) முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு, இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெற ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

கூறுவெளி S = {1, 2, 3, 4,.... 1000}

n(S) = 1000

அட்டையில் 500 –ஐ விட அதிகமாக உள்ள வர்க்க எண்கள் இருக்கும் நிகழ்ச்சி 'A' என்க.

A = $\{23^2, 24^2, 25^2, 26^2, 27^2, 28^2, 29^2, 30^2, 31^2\}$

n(A) = 9

(i) முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற அவர் A யில் உள்ள ஒரு அட்டையை எடுக்க வேண்டும்.

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{1000}$

(ii) முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு இரண்டாமவர் வெற்றி பெறும் நிகழ்ச்சி 'B' என்க. **(i)** இல் முதலாமவர் எடுத்த அட்டை திரும்ப வைக்கப்படவில்லை. எனவே

n(B) = 8

n(S) = 1000 – 1 = 999

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{999}$

6. ஒரு பையில் 12 நீல நிறப்பந்துகளும், x சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. (i) அது சிவப்பு நிறப்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. (ii) 8 புதிய சிவப்பு நிறப்பந்துகள் அப்பையில் வைத்த பின்னர், ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவானது (i) -யில் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்கு எனில், x –ன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த பந்துகள் = நீல பந்துகள் + சிவப்பு பந்துகள்

n(S) = 12 + x

(i) எடுக்கும் பந்து சிவப்பு நிற பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு:

சிவப்பு பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

$\therefore \quad n(A) = x$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{x}{12+x}$$

(ii) 8 புதிய சிவப்பு பந்துகளை அப்பையில் வைத்த பின் பையிலுள்ள மொத்த சிவப்பு பந்துகள் = x + 8

பையிலுள்ள மொத்த பந்துகள் = 12 + x + 8

∴ சிவப்பு பந்தை எடுக்கும் நிகழ்தகவு

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{x+8}{12+x+8} = \frac{x+8}{x+20}$$

சிவப்பு நிற பந்தை எடுக்கும் நிகழ்தகவு **(i)** இல் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்கு எனில்,

$$\frac{x+8}{x+20} = 2 \times \left[\frac{x}{12+x}\right]$$

$$(x+8)(12+x) = 2x(x+20)$$

$$12x + 96 + x^2 + 8x = 2x^2 + 40x$$

$$2x^2 - x^2 + 40x - 12x - 8x - 96 = 0$$

$$x^2 + 20x - 96 = 0$$

$$(x-4)(x+24) = 0$$

x = 4 மற்றும் x = – 24 (இயலாதது)

∴ P(A) ல் x இன் மதிப்பை பிரதியிட,

$$P(A) = \frac{4}{12+4} = \frac{4}{16}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

x = 4

7. இரண்டு சீரான பகடைகள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றன.

(i) இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைக்க

(ii) முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க

(iii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க

(iv) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 1-ஆக இருக்க ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு : இரு சீரான பகடைகள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படும்போது கூறுவெளி

S = {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (6, 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (6, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)}

n(S) = 36

(i) இரு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

A = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)}

n(A) = 6

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன் பகா எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி B என்க.

B = {(1, 2) (1, 3) (1, 5) (2, 1) (3, 1) (5, 1)}

n(B) = 6

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(iii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி C என்க.

C = {(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (2, 1) (2, 3)
(2, 5) (3, 2) (3, 4) (4, 1) (4, 3) (5, 2)
(5, 6) (6, 1) (6, 5)}

n(C) = 15

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(iv) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 1 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி D என்க.

இது ஒரு இயலா நிகழ்ச்சி என்பதால்

n(D) = 0 மற்றும் P(D) = 0

8. மூன்று சீரான நாணயங்கள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.

(i) அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்க

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைக்க

(iii) அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்க

(iv) அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்க ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படும்போது கூறுவெளி

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

n(S) = 8

(i) அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

A = {HHH}

$n(A) = 1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

(ii) குறைந்தப்பட்சம் ஒரு பூ கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி B என்க.

B = {HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$n(B) = 7$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

(iii) அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி C என்க.

C = {HTT, THT, TTH, TTT}

$n(C) = 4$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iv) அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி D என்க.

D = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH}

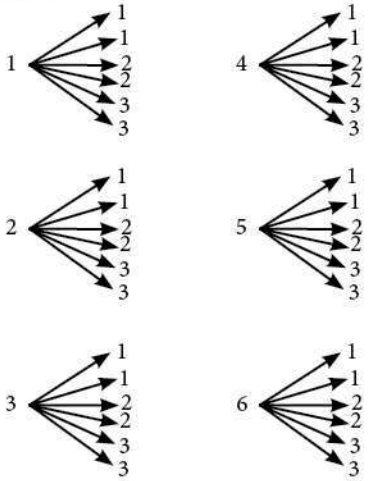
$n(D) = 7$

$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

9. இரண்டு பகடைகளில் ஒன்றில், 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்றும் மற்றொரு பகடையில் 1, 1, 2, 2, 3, 3 என்றும் முக மதிப்புகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. அவை இரண்டும் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 2 முதல் 9 வரை ஒவ்வொரு மதிப்பும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

தீர்வு :

1, 2, 3, 4, 5, 6 முக மதிப்பிட்ட ஒரு பகடையும் 1, 1, 2, 2, 3, 3 என்ற முகமதிப்பிட்ட இன்னொரு பகடையும் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முடிவுகளாவன



கூறுவெளி

S = {(1, 1) (2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1)
(1, 1) (2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1)
(1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2)
(1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2)
(1, 3) (2, 3) (3, 3) (4, 3) (5, 3) (6, 3)
(1, 3) (2, 3) (3, 3) (4, 3) (5, 3) (6, 3)}

$n(S) = 36$

A, B, C, D, E, F, G, H என்பன முறையே முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9 கிடைப்பதற்கான நிகழ்வு என்க.

(i) A = {(1, 1) (1, 1)}

$n(A) = 2$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{36}$

(ii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 3

B = {(2, 1) (2, 1) (1, 2) (1, 2)}

$n(B) = 4$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36}$

(iii) கூடுதல் 4

C = {(3, 1) (3, 1) (2, 2) (2, 2) (1, 3) (1, 3)}

$n(C) = 6$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36}$

(iv) கூடுதல் 5

D = {(4, 1) (4, 1) (3, 2) (3, 2) (2, 3) (2, 3)}

$n(D) = 6$

$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{36}$

(v) கூடுதல் 6

E = {(5, 1) (5, 1) (4, 2) (4, 2) (3, 3) (3, 3)}

$n(E) = 6$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36}$

(vi) கூடுதல் 7

F = {(6, 1) (6, 1) (5, 2) (5, 2) (4, 3) (4, 3)}

$n(F) = 6$

$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{6}{36}$

(vii) கூடுதல் 8

G = {(6, 2) (6, 2) (5, 3) (5, 2) (5, 3)}

$n(G) = 4$

$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{4}{36}$

(viii) கூடுதல் 9

$H = \{(6, 3) (6, 3)\}$

$n(H) = 2$

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{2}{36}$$

10. ஒரு பையில் 5 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும், 6 வெள்ளைப் நிறப் பந்துகளும், 7 பச்சை நிறப்பந்துகளும், 8 கருப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்தப் பந்து

(i) வெள்ளை

(ii) கருப்பு அல்லது சிவப்பு

(iii) வெள்ளையாக இல்லாமல்

(iv) வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

பையிலுள்ள மொத்த பந்துகள் = 5 சிவப்பு + 6 வெள்ளை + 7 பச்சை + 8 கருப்பு

$n(S) = 26$

(i) வெள்ளை பந்தாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$$

(ii) கருப்பு அல்லது சிவப்பு பந்து கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி B என்க.

$n(B) = 5 + 8 = 13$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

(iii) A என்பது வெள்ளை பந்தாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி. எனவே $\overline{A}$ என்பது வெள்ளை பந்தாக இல்லாமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{13}\right) = \frac{13-3}{13}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{13}$$

(iv) பந்து வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி 'C' என்க.

$C = 5$ சிவப்பு + 7 பச்சை

$n(C) = 12$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

11. ஒரு பெட்டியில் 20 குறைபாடில்லாத விளக்குகளும் ஒரு சில குறைபாடுடைய விளக்குகளும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு விளக்கானது குறைபாடுடையதாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{3}{8}$ எனில், குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

குறைபாடு இல்லாத விளக்குகளின் எண்ணிக்கை = 20.

குறைபாடு உள்ள விளக்குகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

மொத்த விளக்குகள் $n(S) = 20 + x$

'A' என்பது குறைபாடு உடைய விளக்காக இருக்கும் நிகழ்வு என்க.

$$P(A) = \frac{x}{20+x} = \frac{3}{8}$$

$$8x = 3(20 + x)$$

$$8x = 60 + 3x$$

$$8x - 3x = 60$$

$$5x = 60$$

$$x = \frac{60}{5}$$

$$x = 12$$

குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கை = 12

12. நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டில், டைமண்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராசா மற்றும் இராணி சீட்டுகளும், ஹார்ட் சீட்டுகளிலிருந்து இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டுகளும், ஸ்பேடு சீட்டுகளிலிருந்து மந்திரி மற்றும் இராசா சீட்டுகளும் நீக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள சீட்டுகளிலிருந்து, ஒரு சீட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. அந்த சீட்டானது (i) க்ளாவர் ஆக (ii) சிவப்பு இராணியாக (iii) கருப்பு இராசாவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

சீட்டுகளின் வகைகள்	ஸ்பேட் ♠	ஹார்ட் ♥	கிளாவர் ♣	டைமண்ட் ♦
ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகள்	A	A	A	A
	2	2	2	2
	3	3	3	3
	4	4	4	4
	5	5	5	5
	6	6	6	6
	7	7	7	7
	8	8	8	8
	9	9	9	9
	10	10	10	10
			J	J
	Q		Q	
		K	K	
ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகள்	13	13	13	13
சில சீட்டுகளை நீக்கிய பின் மீதம் உள்ள சீட்டுகள்	11	11	13	11

மீதம் உள்ள சீட்டுகள்

$= 11 + 11 + 13 + 11 = 46$

$n(S) = 46$

(i) கிளாவர் சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

$n(A) = 13$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{46}$$

(ii) சிவப்பு இராணியாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி B என்க.

$n(B) = 0$ (இராணி சீட்டு நீக்கப்பட்டது)

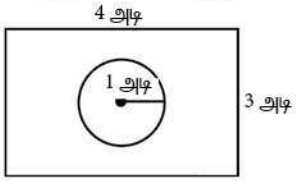
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = 0$$

(iii) கருப்பு இராசாவாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி C என்க.

$n(C) = 1$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{46}$$

13. மாணவர்கள் விளையாடும் ஒரு விளையாட்டில் அவர்களால் எறியப்படும் கல்லானது வட்டப்பரிதிக்குள் விழுந்தால் அதை வெற்றியாகவும், வட்டப்பரிதிக்கு வெளியே விழுந்தால் அதை தோல்வியாகவும் கருதப்படுகிறது. விளையாட்டில் வெற்றி கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



தீர்வு :

செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = (நீளம் × அகலம்) சதுர.அலகுகள்

$= 4 \times 3$ சதுர அடி

$n(S) = 12$ சதுர அடி

வட்டத்தின் பரப்பளவு = πr^2 சதுர அலகுகள்

$= \pi (1)^2$ சதுர அடி

$= \pi$ சதுர அடி

வெற்றி பெறும் நிகழ்ச்சி 'A' என்க. $n(A) = \pi$

விளையாட்டில் வெற்றி பெற நிகழ்தகவு

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{3.14}{12} = \frac{1.57}{6} = \frac{157}{600}$$

14. இரண்டு நுகர்வோர்கள், பிரியா மற்றும் அமுதன் ஒரு குறிப்பிட்ட அங்காடிக்கு, குறிப்பிட்ட வாரத்தில் (திங்கள் முதல் சனி வரை) செல்கிறார்கள். அவர்கள் அங்காடிக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒவ்வொரு நாளும் செல்கிறார்கள். இருவரும் அங்காடிக்கு,

(i) ஒரே நாளில் (ii) வெவ்வேறு நாட்களில்

(iii) அடுத்தடுத்த நாட்களில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

S = {(திங்கள், திங்கள்) (திங்கள், செவ்வாய்)
(திங்கள், புதன்) , (திங்கள், வியாழன்)
(திங்கள், வெள்ளி) (திங்கள், சனி)
(செவ்வாய், திங்கள்) (செவ்வாய், செவ்வாய்)
(செவ்வாய், புதன்) (செவ்வாய், வியாழன்)
(செவ்வாய், வெள்ளி) (செவ்வாய், சனி)
(புதன், திங்கள்) (புதன், செவ்வாய்) (புதன், புதன்)
(புதன், வியாழன்) (புதன், வெள்ளி) (புதன், சனி)
(வியாழன், திங்கள்) (வியாழன், செவ்வாய்)
(வியாழன், புதன்) (வியாழன், வியாழன்)
(வியாழன், வெள்ளி) (வியாழன், சனி)
(வெள்ளி, திங்கள்) (வெள்ளி, செவ்வாய்)

(வெள்ளி, புதன்) (வெள்ளி, வியாழன்)
(வெள்ளி, வெள்ளி) (வெள்ளி, சனி)
(சனி, திங்கள்) (சனி, செவ்வாய்) (சனி, புதன்)
(சனி, வியாழன்) (சனி, வெள்ளி) (சனி, சனி)}

$n(S) = 36$

(i) இருவரும் ஒரே நாளில் அங்காடி செல்லும் நிகழ்தகவு 'A' என்க

A = {(திங்கள், திங்கள்) (செவ்வாய், செவ்வாய்)
(புதன், புதன்) (வியாழன், வியாழன்)
(வெள்ளி, வெள்ளி) (சனி, சனி)}

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) இருவரும் வெவ்வேறு நாட்களில் அங்காடி செல்லும் நிகழ்ச்சி $\overline{A}$ என்க.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

இருவரும் வெவ்வேறு நாட்களில் அங்காடி செல்ல நிகழ்தகவு $= \frac{5}{6}$

(iii) இருவரும் அடுத்தடுத்த நாட்களில் செல்லும் நிகழ்ச்சி 'B' என்க.

B = {(திங்கள், செவ்வாய்)
(செவ்வாய், புதன்) (புதன், வியாழன்)
(வியாழன், வெள்ளி) (வெள்ளி, சனி)}

$n(B) = 5$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

15. ஒரு விளையாட்டிற்கான, நுழைவுக் கட்டணம் ₹ 150. அந்த விளையாட்டில் ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. தனா, ஒரு நுழைவுச் சீட்டு வாங்கினாள். அவ்விளையாட்டில் ஒன்று அல்லது இரண்டு தலைகள் விழுந்தால் அவள் செலுத்திய நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பக் கிடைத்து விடும். மூன்று தலைகள் கிடைத்தால் அவளது நுழைவுக் கட்டணம் இரண்டு மடங்காகக் கிடைக்கும். இல்லையென்றால் அவளுக்கு எந்தக் கட்டணமும் திரும்பக் கிடைக்காது. இவ்வாறெனில், (i) இரண்டு மடங்காக (ii) நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பப்பெற (iii) நுழைவுக் கட்டணத்தை இழப்பதற்கு, ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு நாணயம் 3 முறை சுண்டப்படும்போது கூறுவெளி

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$n(S) = 8$

(i) நுழைவுக் கட்டணம் இரண்டு மடங்காக கிடைக்கும் நிகழ்வு 'A' என்க. அதற்கு அவளுக்கு 3 தலைகள் கிடைக்க வேண்டும்.

$\therefore$ A = {HHH}

$n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

நுழைவுக்கட்டணம் இருமடங்காக கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{8}$

(ii) நுழைவுக்கட்டணம் திரும்பப் பெறும் நிகழ்வு 'B' என்க. அதற்கு அவளுக்கு 1 அல்லது 2 தலை கிடைக்க வேண்டும்.

$\therefore$ B = {HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH}

$n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

நுழைவுக்கட்டணம் திரும்பப் பெற நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

(iii) நுழைவுக்கட்டணம் இழக்கும் நிகழ்வு 'C' என்க.

C = {TTT}

$n(C) = 1$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

நுழைவுக்கட்டணம் இழக்கும் நிகழ்வு $= \frac{1}{8}$

நிகழ்வுகளின் செயல்பாடுகள்

நினைவில் கொள்க

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் S ஆனது கூறுவெளி என்க. $A \subseteq S$ மற்றும் $B \subseteq S$ ஆகியவை, கூறுவெளி S –ன் நிகழ்ச்சிகள் என்க.

- A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சேர்ந்து நடைபெற்றால் அந்த நிகழ்ச்சியானது $A \cap B$ என்ற நிகழ்ச்சியாகும்.
- A அல்லது B –ல் ஏதாவது ஒன்று நடைபெற்றால் அந்த நிகழ்ச்சியானது $A \cup B$ என்ற நிகழ்ச்சியாகும்.
- $\overline{A}$ என்ற நிகழ்ச்சியானது, A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறாத பொழுது நடைபெறும் நிகழ்ச்சியாகும்.
- $A \cap \overline{A} = \phi$
- $A \cup \overline{A} = S$
- A , B ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- P(ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் சேர்ப்பு) = Σ (நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு)
- $P\overline{(A \cup B)} = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

தேற்றம் 1

A மற்றும் B ஆகியவை ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

1. $P(A \cap \overline{B}) = P(A \text{ மட்டும்}) = P(A) - P(A \cap B)$
2. $P(\overline{A} \cap B) = P(B \text{ மட்டும்}) = P(B) - P(A \cap B)$

நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்

1. A மற்றும் B ஆகியவை ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்,
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. A, B மற்றும் C ஆகியவை ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்,
   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

எடுத்துக்காட்டு

8.27 $P(A) = 0.37, P(B) = 0.42, P(A \cap B) = 0.09$ எனில், $P(A \cup B)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$P(A) = 0.37, P(B) = 0.42, P(A \cap B) = 0.09$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0.37 + 0.42 - 0.09 = 0.7$

8.28 நன்கு கலைத்து அடுக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கும்போது ஓர் இராசா அல்லது ஓர் இராணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

மொத்த சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை = 52

இராசா சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை = 4

இராசா சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{4}{52}$

இராணி சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை = 4

இராணி சீட்டுகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு = $\frac{4}{52}$

இராசா மற்றும் இராணி சீட்டுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

எனவே, இராசா சீட்டு அல்லது இராணி சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது = $\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{2}{13}$

8.29 இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. இரண்டு முக மதிப்புகளும் சமமாக இருக்க அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

இரண்டு பகடைகள் ஒன்றாக உருட்டப்படும் பொழுது அதன் கூறுவெளியில் $6 \times 6 = 36$ உறுப்புகள் இருக்கும். எனவே, $n(S) = 36$

A ஆனது இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்புகள் மற்றும் B -ஆனது இரண்டு பகடைகளின் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4 -ஆக கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சிகள் என்க.

எனவே, $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

ஆகவே, $A \cap B = \{(2, 2)\}$

எனவே, $n(A) = 6, n(B) = 3, n(A \cap B) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

எனவே, P (ஒரே முக மதிப்புகள் அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4 கிடைக்க)

$$= P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவு $\frac{2}{9}$ ஆகும்.

8.30 A மற்றும் B ஆகியவை $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ மற்றும் P (A மற்றும் B) $= \frac{1}{8}$ என இருக்குமாறு அமையும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) P(A அல்லது B) (ii) P(A -ம் இல்லை மற்றும் B -ம் இல்லை).

தீர்வு :

(i) P(A அல்லது B) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \text{ அல்லது } B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

(ii) P(A -ம் இல்லை மற்றும் B -ம் இல்லை)

$$= P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$= P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

P(A-ம் இல்லை மற்றும் B -ம் இல்லை)

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

8.31 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகின்றது. அந்தச் சீட்டு இராசா அல்லது ஹார்ட் அல்லது சிவப்பு நிறச் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை = 52; $n(S) = 52$

A ஆனது இராசா சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52}$$

B ஆனது ஹார்ட் சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n(B) = 13$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{13}{52}$$

C ஆனது சிவப்பு நிறச் சீட்டு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n(C) = 26$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{26}{52}$$

$P(A \cap B)$ = P(ஹார்ட் மற்றும் இராசா சீட்டு கிடைக்க) $= \frac{1}{52}$

$P(B \cap C)$ = P(சிவப்பு நிற ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்க) $= \frac{13}{52}$

$P(A \cap C)$ = P(சிவப்பு நிற இராசா சீட்டு கிடைக்க) $= \frac{2}{52}$

$P(A \cap B \cap C)$ = P(ஹார்ட், இராசா சீட்டு சிவப்பு நிறத்தில் கிடைக்க) $= \frac{1}{52}$

எனவே, தேவையான நிகழ்தகவானது

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{26}{52} - \frac{1}{52} - \frac{13}{52} - \frac{2}{52} + \frac{1}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}.$$

8.32 50மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், 28பேர் NCC -யிலும், 30 பேர் NSS -லும் மற்றும் 18 பேர் NCC மற்றும் NSS -லும் சேர்கிறார்கள். ஒரு மாணவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவர்

(i) NCC -யில் இருந்து, ஆனால் NSS -ல் இல்லாமல்

(ii) NSS -ல் இருந்து, ஆனால் NCC -ல் இல்லாமல்

(iii) ஒன்றே ஒன்றில் மட்டும் சேர்ந்து இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 50$

A மற்றும் B ஆகியவை முறையே NCC மற்றும் NSS -யில் சேர்ந்த மாணவர்கள் என்க.

$$n(A) = 28,\ n(B) = 30,\ n(A \cap B) = 18$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{50}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{50}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{18}{50}$$

(i) NCCயில் சேர்ந்து NSS -யில் சேராமல் உள்ள மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{28}{50} - \frac{18}{50} = \frac{1}{5}$$

(ii) NSS-யில் சேர்ந்து NCC -யில் சேராமல் உள்ள மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{30}{50} - \frac{18}{50} = \frac{6}{25}$$

(iii) ஏதாவது ஒன்றில் மட்டுமே சேர்ந்த மாணவரைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு P (A மட்டும் அல்லது B மட்டும்)

$$= P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$$

$$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

(குறிப்பு: $(A \cap \bar{B}), (\bar{A} \cap B)$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்).

8.33 A மற்றும் B ஆகிய இரு விண்ணப்பதாரர்கள் IIT-யில் சேர்வதற்காகக் காத்திருப்பவர்கள். இவர்களில் A தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5, A மற்றும் B இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.3 எனில், B தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான அதிகபட்ச நிகழ்தகவு 0.8 என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$P(A) = 0.5,\ P(A \cap B) = 0.3$$

$P(A \cup B) \leq 1$ என அறிவோம்.

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$0.5 + P(B) - 0.3 \leq 1$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 1 - 0.2$$

$$P(B) \leq 0.8$$

எனவே, B தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான அதிகபட்ச நிகழ்தகவு 0.8 ஆகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. P(A மட்டும்) = _____.

விடை: $P(A) - P(A \cap B)$

2. $P(\bar{A} \cap B)$ = _____.

விடை: $P(B) - P(A \cap B)$

3. $A \cap B$ மற்றும் $\bar{A} \cap B$ ஆகியவை _____ நிகழ்ச்சிகள்.

விடை: ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

4. $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ = _____.

விடை: $P(\overline{A \cup B})$

5. A மற்றும் B ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $P(A \cap B)$ = _____.

விடை: 0

6. $P(A \cap B) = 0.3$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.45$ எனில், P(B) = _____.

விடை: 0.75

பயிற்சி 8.4

1. $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ எனில், $P(A \cap B)$ காண்க.

தீர்வு :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10 + 6 - 5}{15} = \frac{16 - 5}{15} = \frac{11}{15}$$

2. A மற்றும் B ஆகியவை இரு நிகழ்ச்சிகள். மேலும், $P(A) = 0.42, P(B) = 0.48$ மற்றும் $P(A \cap B) = 0.16$ எனில்,
(i) P(A இல்லை) (ii) P(B இல்லை)
(iii) P(A அல்லது B) ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) கணக்கின்படி

$$P(A) = 0.42$$

$$\therefore \quad P(A \text{ இல்லை}) = 1 - P(A)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.42 = 0.58$$

(ii) கணக்கின்படி

$$P(B) = 0.48$$

$$P(B \text{ இல்லை}) = 1 - P(B)$$

$$P(\overline{B}) = 1 - 0.48 = 0.52$$

(iii) $P(A \text{ அல்லது } B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.42 + 0.48 - 0.16$$

$$= 0.90 - 0.16$$

$$P(A \text{ அல்லது } B) = 0.74$$

3. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் A , B ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் P(A இல்லை) = 0.45, $P(A \cup B) = 0.65$ எனில், P(B) –ஐக் காண்க.

தீர்வு :

A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனவே $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \text{ இல்லை}) = 0.45$$

$$\therefore \quad P(A) = 1 - P(A \text{ இல்லை})$$

$$P(A) = 1 - 0.45 = 0.55$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.65 = 0.55 + P(B) - 0$$

$$P(B) = 0.65 - 0.55 = 0.1$$

4. A மற்றும் B –யில், குறைந்தது ஏதாவது ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.6. A மற்றும் B ஒரே நேரத்தில் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 எனில், $P(\overline{A}) + P(\overline{B})$ –ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$P(A \text{ அல்லது } B) = P(A \cup B) = 0.6$$

$$P(A \cap B) = 0.2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.6 = P(A) + P(B) - 0.2$$

$$P(A) + P(B) = 0.6 + 0.2 = 0.8$$

$[\because P(A) = 1 - P(\overline{A}); P(B) = 1 - P(\overline{B})]$

$$[1 - P(\overline{A})] + [1 - P(\overline{B})] = 0.8$$

$$1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) = 0.8$$

$$2 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B})] = 0.8$$

$$P(\overline{A}) + P(\overline{B}) = 2 - 0.8 = 1.2$$

5. நிகழ்ச்சி A –க்கான நிகழ்தகவு 0.5 மற்றும் B –க்கான நிகழ்தகவு 0.3. A மற்றும் B ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், A –ம், B –ம் நிகழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு : $P(A) = 0.5$
$P(B) = 0.3$

A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனவே $P(A \cap B) = 0$

$$P(A \text{ அல்லது } B) = P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0 = 0.8$$

P(A –யும் இல்லை மற்றும் B –யும் இல்லை)

$$= P(\overline{A \cup B})$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

A –யும் B –யும் நிகழாமல் இருக்க நிகழ்தகவு = 0.2

6. இரண்டு பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படுகின்றன. முதல் பகடையில் முக மதிப்பு இரட்டைப் படை எண் அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 8 ஆகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

இரு பகடைகள் ஒருமுறை உருட்டப்படும்போது

கூறுவெளி

$S = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)$
$(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)$
$(3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)$
$(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6)$
$(5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)$
$(6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$

$n(S) = 36$

முதல் பகடையின் முகமதிப்பு இரட்டைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்வு 'A' என்க.

$A = \{(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)$
$(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6)$
$(6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$

$n(A) = 18$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36}$$

முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 8 கிடைக்கும் நிகழ்வு 'B' என்க

$B = \{(2,6)\ (3,5)\ (4,4)\ (5,3)\ (6,2)\}$

$n(B) = 5$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

$A \cap B = \{(4,4)\ (6,2)\ (2,6)\}$

$n(A \cap B) = 3$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

இப்போது $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{18}{36} + \frac{5}{36} - \frac{3}{36}$$

$$P(A \cup B) = \frac{18+5-3}{36} = \frac{23-3}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

முதல் பகடையின் முகமதிப்பு இரட்டைப்படை எண் அல்லது முகமதிப்புகளின் கூடுதல் 8 கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{5}{9}$

7. நன்கு கலைத்து அடுக்கிய 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட கட்டிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது சிவப்பு இராசாவாக அல்லது கருப்பு இராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த சீட்டுகள் $= 52$

$n(S) = 52$

எடுக்கும் சீட்டு சிவப்பு இராசாவாக இருக்கும் நிகழ்வு 'A' என்க.

$n(A) = 2$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{52}$$

எடுக்கும் சீட்டு கருப்பு இராணியாக இருக்கும் நிகழ்வு 'B' என்க.

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52}$$

A யும் B யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். எனவே,

$A \cap B = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{52} + \frac{2}{52} - 0$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

சீட்டு சிவப்பு இராசாவாக அல்லது கருப்பு இராணியாக இருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{13}$

8. ஒரு பெட்டியில் 3, 5, 7, 9, ... 35, 37 என்ற எண்கள் குறிக்கப்பட்ட சீட்டுகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு ஆனது 7 –ன் மடங்காக அல்லது பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

பெட்டியில் உள்ள சீட்டுகள் $= \{3, 5, 7, 9, ..., 37\}$

சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{l-a}{d} + 1$

$$= \frac{37-3}{2} + 1 = \frac{34}{2} + 1 = 17 + 1$$

$\therefore$ மொத்த சீட்டுகள் $= 18$

$n(S) = 18$

எடுக்கப்படும் சீட்டு 7 –இன் மடங்காக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{7, 21, 35\}$

$n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{18}$$

எடுக்கப்படும் சீட்டு பகா எண்ணாக இருக்கும்

நிகழ்வு B என்க.

$B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$

$n(B) = 11$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{11}{18}$

$A \cap B = \{7\}$

$n(A \cap B) = 1$

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{18}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{18} + \frac{11}{18} - \frac{1}{18}$

$= \frac{3+11-1}{18} = \frac{13}{18}$

எடுக்கப்படும் சீட்டு 7 –இன் மடங்காக அல்லது பகா எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{13}{18}$

9. சீரான மூன்று நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. அதிகபட்சம் 2 பூக்கள் அல்லது குறைந்தபட்சம் 2 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

சீரான மூன்று நாணயங்கள் சுண்டப்படும்போது கூறுவெளி

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$n(S) = 8$

அதிகபட்சம் 2 பூக்கள் கிடைக்கும் நிகழ்வு A என்க.

(0 பூ, 1 பூ, 2 பூக்கள்}

$A = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$

$n(A) = 7$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

குறைந்தபட்சம் 2 தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்வு B என்க. (2 தலைகள், 3 தலைகள்)

$B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

$n(B) = 4$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8}$

$A \cap B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

$n(A \cap B) = 4$

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{4}{8}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{7}{8} + \frac{4}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7+4-4}{8} = \frac{7}{8}$

அதிகபட்சம் 2 பூக்கள் அல்லது குறைந்தபட்சம் 2 தலைகள் கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{7}{8}$

10. ஒருவருக்கு மின்சார ஒப்பந்தம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$ மற்றும் குழாய்கள் பொருத்துவதற்கான ஒப்பந்தம் கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{8}$ ஆகும். மேலும் குறைந்தபட்சம் ஏதாவது ஒரு ஒப்பந்தம் கிடைக்கப்பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{7}$ எனில், இரண்டு ஒப்பந்தங்களும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

மின்சார ஒப்பந்தம் கிடைக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$P(A) = \frac{3}{5}$

குழாய் பொருத்தும் ஒப்பந்தம் கிடைக்கும் நிகழ்வு B என்க.

$P(\overline{B}) = \frac{5}{8}$

$1 - P(B) = \frac{5}{8}$

$P(B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

மேலும் $P(A \cup B) = \frac{5}{7}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{7} = \frac{3}{5} + \frac{3}{8} - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{3}{8} - \frac{5}{7}$

$= \frac{168 + 105 - 200}{280} = \frac{73}{280}$

இரு ஒப்பந்தங்களும் கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{73}{280}$.

11. 8000 மக்கள்தொகை கொண்ட ஒரு நகரத்தில், 1300 பேர் 50 வயதிற்கு மேற்பட்டவர்கள் மற்றும் 3000 பேர் பெண்கள். மேலும் 50 வயதிற்கு மேற்பட்ட பெண்கள் 30% உள்ளனர் எனவும் தெரிய வருகிறது. தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு நபர், பெண்ணாக அல்லது 50 வயதிற்கு மேற்பட்டவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த மக்கள் தொகை = 8000

$n(S) = 8000$

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவர் பெண்ணாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

பெண்களின் எண்ணிக்கை $n(A) = 3000$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3000}{8000}$$

50 வயதிற்கு மேற்பட்டவராக இருக்கும் நிகழ்வு 'B' என்க.

50 வயதிற்கு மேற்பட்டவர் எண்ணிக்கை = 1300

$$n(B) = 1300$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1300}{8000}$$

$n(A \cap B) = 3000$ இல் 30%

$$n(A \cap B) = \frac{30}{100} \times 3000 = 900$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{900}{8000}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3000}{8000} + \frac{1300}{8000} - \frac{900}{8000}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3000 + 1300 - 900}{8000}$$

$$= \frac{3400}{8000} = \frac{17}{40}$$

∴ தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நபர் பெண்ணாக அல்லது 50 வயதிற்கு மேற்பட்டவராக இருக்க நிகழ்தகவு

$$= \frac{17}{40}$$

12. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. சரியாக இரண்டு தலைகள் அல்லது குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ அல்லது அடுத்தடுத்து இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு நாணயம் 3 முறை சுண்டப்படும்போது கூறுவெளி

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$n(S) = 8$

சரியாக இரண்டு தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்வு A என்க.

A = {HHT, HTH, THH}

$n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

குறைந்தபட்சம் 1 பூ கிடைக்கும் நிகழ்வு B என்க.

B = {HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$n(B) = 7$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

அடுத்தடுத்து இரண்டு தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்வு C என்க.

C = {HHT, THH, HHH}

$n(C) = 3$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

$A \cap B$ = {HHT, HTH, THH}

$n(A \cap B) = 3$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

$B \cap C$ = {HHT, THH}

$n(B \cap C) = 2$

$$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8}$$

$A \cap C$ = {HHT, THH}

$n(A \cap C) = 2$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8}$$

$A \cap B \cap C$ = {HHT, THH}

$n(A \cap B \cap C) = 2$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8}$$

$P(A \cup B \cup C) =$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{2}{8} - \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$$

$$= \frac{3 + 7 + 3 - 3 - 2 - 2 + 2}{8}$$

$$= \frac{8}{8} = 1$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு = 1

13. A, B, C என்பன ஏதேனும் மூன்று நிகழச்சிகள். மேலும் B கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு A –ன் நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்காகவும், C கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு A –ஐ விட மூன்று மடங்காகவும் உள்ளன. மேலும் $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$, $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$ எனில், P(A), P(B) மற்றும் P(C) –ஐக் காண்க.

தீர்வு :

கணக்கின்படி,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$$

மேலும் $P(B) = 2\,P(A)$

$$P(C) = 3\,P(A)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\frac{9}{10} = P(A) + 2\,P(A) + 3\,(P(A)) - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{9}{10} = 6\,P(A) - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15}$$

$$6\,P(A) = \frac{9}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15}$$

$$6\,P(A) = \frac{108 + 20 + 30 + 15 - 8}{120}$$

$$6\,P(A) = \frac{165}{120}$$

$$P(A) = \frac{165}{120 \times 6} = \frac{11}{48}$$

$$P(B) = 2 \times \frac{11}{48} = \frac{11}{24}$$

$$P(C) = 3 \times \frac{11}{48} = \frac{11}{16}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{11}{48};\ P(B) = \frac{11}{24};\ P(C) = \frac{11}{16}$$

14. 35 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவருக்கும் 1 முதல் 35 வரை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களுக்கும் மாணவிகளுக்கும் உள்ள விகிதமானது 4 : 3 ஆகும். வரிசை எண்கள் மாணவர்களில் தொடங்கி மாணவிகளில் முடிவடைகிறது. ஒருவர் வகுப்பிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவர் பகா எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவராகவோ அல்லது பகு எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவியாகவோ அல்லது இரட்டை எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்டவராகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

வகுப்பிலுள்ள மொத்த மாணவர்கள் = 35

$n(S) = 35$

மாணவர்கள் : மாணவிகள் = 4 : 3

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 4x

மாணவிகளின் எண்ணிக்கை = 3x என்க.

$$4x + 3x = 35$$

$$7x = 35$$

$$x = \frac{35}{7} = 5$$

∴ மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 5 = 20$

மாணவிகளின் எண்ணிக்கை $= 3 \times 5 = 15$

மாணவர்களின் வரிசை எண்கள்

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

மாணவிகளின் வரிசை எண்கள்

$= \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$

பகா எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வு A என்க

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$n(A) = 8$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{35}$$

பகு எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவியரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வு B என்க.

$B = \{21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35\}$

$n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{35}$$

இரட்டை எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்டவராக இருக்கும் நிகழ்வு C என்க.

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$

$n(C) = 17$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{17}{35}$$

A யும் B யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள். எனவே,

$P(A \cap B) = 0$

$B \cap C = \{22, 24, 26, 28, 30, 32, 34\}$

$n(B \cap C) = 7$

$$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{7}{35}$$

$A \cap C = \{2\}$

$n(A \cap C) = 1$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{1}{35}$$

$P(A \cap B \cap C) = 0 \quad [\because n(A \cap B) = 0]$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{8}{35} + \frac{12}{35} + \frac{17}{35} - 0 - \frac{7}{35} - \frac{1}{35} + 0$$

$$= \frac{8 + 12 + 17 - 7 - 1}{35} = \frac{29}{35}$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{29}{35}$

பயிற்சி 8.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்:

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது பரவல் அளவை இல்லை?

(1) வீச்சு
(2) திட்ட விலக்கம்
(3) கூட்டுச் சராசரி
(4) விலக்க வர்க்கச் சராசரி [விடை: (3)]

2. 8, 8, 8, 8, 8 ... 8 ஆகிய தரவின் வீச்சு

(1) 0 (2) 1
(3) 8 (4) 3 [விடை: (1)]

தீர்வு :

வீச்சு = L – S
= 8 – 8
= 0

3. சராசரியிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்ற தரவுப் புள்ளிகளுடைய விலக்கங்களின் கூடுதலானது ___.

(1) எப்பொழுதும் மிகை எண்
(2) எப்பொழுதும் குறை எண்
(3) பூச்சியம்
(4) பூச்சியமற்ற முழுக்கள்

[விடை: (3)]

4. 100 தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி 40 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 எனில், விலக்கங்களின் வர்க்கக் கூடுதலானது

(1) 40000 (2) 160900
(3) 160000 (4) 30000 [விடை: (2)]

தீர்வு :

$N = 100$

$\bar{x} = 40$

$\sigma = 3$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum d_i}{N}\right)^2}$$

$$3^2 = \frac{\sum d_i^2}{100} - 40^2$$

$$9 = \frac{\sum d_i^2}{100} - 1600$$

$$9 + 1600 = \frac{\sum d_i^2}{100}$$

$$1609 \times 100 = \sum d_i^2$$

$$\sum d_i^2 = 1,60,900$$

5. முதல் 20 இயல் எண்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது

(1) 32.25 (2) 44.25
(3) 33.25 (4) 30 [விடை: (3)]

தீர்வு :

முதல் 20 இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{20\times 21}{2}$$

$$\sum x_i = 210$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$\sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 20^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{20\times 21\times 41}{6} = 10\times 7\times 41$$

$$= 2870$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2870}{20} - \left(\frac{210}{20}\right)^2}$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$\sigma^2 = \frac{2870}{20} - \left(\frac{210}{20}\right)^2$$

$$= 143.5 - \frac{441}{4}$$

$$= 143.5 - 110.25 = 33.25$$

6. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கமானது 3. ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 5 -ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய தரவின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது

(1) 3 (2) 15
(3) 5 (4) 225 [விடை: (4)]

தீர்வு : திட்ட விலக்கம் $\sigma = 3$

ஒரு தரவில் உள்ள ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளிகளையும் 5 ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் தரவுகளின் புதிய திட்டவிலக்கம் பெற பழைய திட்டவிலக்கத்தின் 5 மடங்கு காண வேண்டும்.

$\therefore$ புதிய திட்ட விலக்கம் $\sigma = 3\times 5 = 15$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = 15^2 = 225$

7. x, y, z ஆகியவற்றின் திட்டவிலக்கம் p -எனில், 3x + 5, 3y + 5, 3z + 5 ஆகியவற்றின் திட்டவிலக்கமானது

(1) 3p + 5 (2) 3p
(3) p + 5 (4) 9p + 15 [விடை: (2)]

தீர்வு : திட்ட விலக்கம் $\sigma = p$

ஒரு தரவில் உள்ள ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளிகளையும் 3 ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் தரவுகளின் புதிய திட்டவிலக்கம் பெற பழைய திட்டவிலக்கத்தின் 3 மடங்கு காண வேண்டும். புதிய $\sigma = 3p$

ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் 5 ஐக் கூட்ட திட்ட விலக்கம் மாறாது.

$\therefore$ புதிய திட்ட விலக்கம் $\sigma = 3p$

8. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு முறையே 4 மற்றும் 87.5% எனில் திட்டவிலக்கமானது

(1) 3.5 (2) 3
(3) 4.5 (4) 2.5 [விடை: (1)]

தீர்வு :

$$C.V = \frac{\sigma}{x}\times 100\%$$

$$87.5\% = \frac{\sigma}{4}\times 100\%$$

$$87.5\times 4 = \sigma\times 100$$

$$350.0 = \sigma\times 100$$

$$\sigma = \frac{350}{100} = 3.5$$

9. கொடுக்கப்பட்டவைகளில் எது தவறானது?

(1) $P(A) > 1$ (2) $0 \le P(A) \le 1$
(3) $P(\phi) = 0$ (4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ [விடை: (1)]

10. p சிவப்பு, q நீல, r பச்சை நிறக் கூழாங்கற்கள் உள்ள ஒரு குடுவையில் இருந்து ஒரு சிவப்பு கூழாங்கல் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{q}{p+q+r}$ (2) $\frac{p}{p+q+r}$
(3) $\frac{p+q}{p+q+r}$ (4) $\frac{p+r}{p+q+r}$ [விடை: (2)]

தீர்வு : மொத்த பந்துகள் = p சிவப்பு + q நீலம் + r பச்சை

$n(S) = p + q + r$

சிவப்பு பந்து எடுக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$n(A) = p$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{p}{p+q+r}$$

11. ஒரு புத்தகத்திலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பக்கம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்தப் பக்க எண்ணின் ஒன்றாம் இட மதிப்பானது 7 -ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{7}{10}$
(3) $\frac{3}{9}$ (4) $\frac{7}{9}$ [விடை: (2)]

தீர்வு : பக்க எண்ணின் ஒன்றாம் இட மதிப்புகளின் கூறுவெளி

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$n(S) = 10.$

பக்க எண்ணின் ஒன்றாம் இடமதிப்பு 7 ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4. 5, 6\}$

$n(A) = 7$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{10}$

12. ஒரு நபருக்கு வேலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது $\frac{x}{3}$. வேலை கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ எனில், x –யின் மதிப்பானது

(1) 2 (2) 1
(3) 3 (4) 1.5 [விடை: (2)]

தீர்வு : வேலை கிடைக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$\frac{x+2}{3} = 1$

$x + 2 = 3$

$x = 3 - 2$

$x = 1.$

13. கமலம், குலுக்கல் போட்டியில் கலந்து கொண்டாள். அங்கு மொத்தம் 135 சீட்டுகள் விற்கப்பட்டன. கமலம் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு $\frac{1}{9}$ எனில், கமலம் வாங்கிய சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 5 (2) 10
(3) 15 (4) 20 [விடை: (3)]

தீர்வு :

குலுக்கலில் வெற்றி பெறும் நிகழ்வு A என்க.

$P(A) = \frac{1}{9}$

$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{9}$

$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1\times15}{9\times15} = \frac{15}{135}$

$n(A) = 15.$

14. ஆங்கில எழுத்துகள் {a, b, ..., z} –யிலிருந்து ஓர் எழுத்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்வு செய்யப்படுகிறது. அந்த எழுத்து x –க்கு முந்தைய எழுத்துகளில் ஒன்றாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{1}{13}$
(3) $\frac{23}{26}$ (4) $\frac{3}{26}$ [விடை: (3)]

தீர்வு : $S = \{a, b, ..., z\}$ என்க.

$n(S) = 26$

தேர்ந்தெடுக்கும் எழுத்து x க்கு முந்தைய எழுத்தாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{a, b, c, d, ..., w\}$

$n(A) = 23$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{23}{26}$

15. ஒரு பணப்பையில் ₹ 2000 நோட்டுகள் 10 –ம், ₹ 500 நோட்டுகள் 15 –ம், ₹ 200 நோட்டுகள் 25 –ம் உள்ளன. ஒரு நோட்டு சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றது எனில், அந்த நோட்டு ₹ 500 நோட்டாகவோ அல்லது ₹ 200 நோட்டாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{3}{10}$
(3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{4}{5}$ [விடை: (4)]

தீர்வு :

மொத்த நோட்டுகள்

$n(S) = 10 + 15 + 25$

$n(S) = 50$

நோட்டானது ₹ 500 ஆக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$n(A) = 15$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$P(A) = \frac{15}{50}$

எடுக்கும் நோட்டு ₹ 200 ஆக இருக்கும் நிகழ்வு B என்க.

$n(B) = 25$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{25}{50}$

A –உம் B –உம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள். எனவே,

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{15}{50} + \frac{25}{50} - 0 = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

அலகுப்பயிற்சி – 8

1. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியானது 62.8 மற்றும் அனைத்து நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் 50. விடுபட்ட நிகழ்வெண்கள் f_1 மற்றும் f_2 – ஐக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
நிகழ்வெண்	5	f_1	10	f_2	7	8

தீர்வு :

A = 50 மற்றும் C = 20 என்க.

பிரிவு இடைவெளி	f_i	x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 50$	$d_i = \frac{x_i - 50}{C}$ $d_i = \frac{x_i - 50}{20}$	$f_i d_i$
0-20	5	10	– 40	– 2	– 10
20-40	f_1	30	– 20	– 1	$-f_1$
40-60	10	50	0	0	0
60-80	f_2	70	20	1	f_2
80-100	7	90	40	2	14
100-120	8	110	60	3	24
	$\sum f_i = 30 + f_1 + f_2$ $\sum f_i = 50$				$\sum f_i d_i = 28 + f_2 - f_1$

$$\text{சராசரி } \bar{x} = 62.8$$

$$\sum f_i = 50$$

$$30 + f_1 + f_2 = 50$$

$$f_1 + f_2 = 50 - 30$$

$$f_1 + f_2 = 20 \quad \ldots (1)$$

$$\text{சராசரி } \bar{x} = A + C \times \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$62.8 = 50 + 20 \times \left[\frac{28 + f_2 - f_1}{50}\right]$$

$$62.8 - 50 = \frac{2}{5}(28 + f_2 - f_1)$$

$$12.8 \times 5 = 56 + 2f_2 - 2f_1$$

$$64.0 - 56 = 2(f_2 - f_1)$$

$$\frac{8}{2} = f_2 - f_1$$

$$f_2 - f_1 = 4$$

$$f_1 - f_2 = -4 \quad \ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2f_1 = 16$$

$$f_1 = \frac{16}{2} = 8$$

$$(2) \Rightarrow f_1 - f_2 = -4$$

$$8 - f_2 = -4$$

$$-f_2 = -4 - 8$$

$$-f_2 = -12$$

$$f_2 = 12$$

$$\therefore \quad f_1 = 8 \text{ மற்றும் } f_2 = 12$$

2. ஒரு வடிவமைப்பில் வரையப்பட்ட வட்டங்களின் விட்ட அளவுகள் (மி.மீ –ல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விட்டங்கள்	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
வட்டங்களின் எண்ணிக்கை	15	17	21	22	25

திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

A = 42.5 மற்றும் C = 4 என்க.

விட்டங்கள்	வட்டங்களின் எண்ணிக்கை f_i	x_i	$d_i = \frac{x_i - A}{C}$ $d_i = \frac{x_i - 42.5}{4}$	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
33-36	15	34.5	$\frac{34.5 - 42.5}{4} = -2$	– 30	4	60
37-40	17	38.5	$\frac{38.5 - 42.5}{4} = -1$	– 17	1	17
41-44	21	42.5	$\frac{42.5 - 42.5}{4} = 0$	0	0	0
45-48	22	46.5	$\frac{46.5 - 42.5}{4} = 1$	22	1	22
49-52	25	50.5	$\frac{50.5 - 42.5}{4} = 2$	50	4	100

$$\text{சராசரி } \bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \times C$$

$$\bar{x} = 42.5 + \frac{25}{100} \times 4$$

$$\bar{x} = 42.5 + 1 = 43.5$$

திட்டவிலக்கம்

$$\sigma = C\times\sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N}-\left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = 4\times\sqrt{\frac{199}{100}-\left(\frac{25}{100}\right)^2}$$

$$\sigma = 4\times\sqrt{\frac{199}{100}-\frac{625}{10000}}$$

$$\sigma = 4\times\sqrt{\frac{19900-625}{10000}}$$

$$\sigma = 4\sqrt{\frac{19275}{10000}} = 4\sqrt{1.9275}$$

$$= 4\times 1.388 = 5.55$$

$\therefore$ திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5.55$

3. ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	k	2k	3k	4k	5k	6k
f	2	1	1	1	1	1

அட்டவணையில், k ஒரு மிகை முழு. விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது 160 எனில், k–ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N}-\left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2}$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N}-\left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2$

x_i	f_i	x_i^2	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
k	2	k^2	2k	$2k^2$
2k	1	$4k^2$	2k	$4k^2$
3k	1	$9k^2$	3k	$9k^2$
4k	1	$16k^2$	4k	$16k^2$
5k	1	$25k^2$	5k	$25k^2$
6k	1	$36k^2$	6k	$36k^2$
	$N = \sum f_i = 7$		$\sum f_i x_i = 22\,k$	$\sum f_i x_i^2 = 92k^2$

$\therefore$ விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$\sigma^2 = \frac{92k^2}{7}-\left(\frac{22k}{7}\right)^2$$

$$160 = \frac{92k^2}{7}-\frac{484k^2}{49}$$

$$160 = \frac{644k^2-484k^2}{49}$$

$$160 = \frac{160k^2}{49} \Rightarrow k^2 = \frac{160\times 49}{160}$$

$$k^2 = 49 \Rightarrow k = \pm 7$$

k ஒரு மிகை முழு என்பதால்

$$k = 7$$

4. செல்சியஸில் குறிக்கப்பட்ட வெப்பநிலை தரவின் திட்டவிலக்கமானது 5. இந்த வெப்பநிலை தரவை ஃபாரன்ஹீட் ஆக மாற்றும்பொழுது கிடைக்கும் தரவின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு :

செல்சியஸில் குறிக்கப்பட்ட வெப்பநிலை தரவின் திட்ட விலக்கம் = 5.

$$\sigma_C = 5$$

அந்த தரவுப் புள்ளிகள்

$x_1^\circ C,\ x_2^\circ C,\ x_3^\circ C,\ x_4^\circ C,\ x_5^\circ C, \ldots$ என்க.

செல்சியஸை, ஃபாரன்ஹீட்டாக மாற்றும்போது

$F = \frac{9}{5}\times$ செல்ஸியஸ் வெப்பநிலை $+ 32$

ஃபாரன்ஹீட்டாக மாற்றப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகள்

$\frac{9}{5}x_1+32,\ \frac{9}{5}x_2+32,\ \frac{9}{5}x_3+32,\ \frac{9}{5}x_4+32,\ \frac{9}{5}x_5+32, \ldots$

செல்சியஸ் தரவுப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும் $\frac{9}{5}$ ஆல் பெருக்கி அதனுடன் 32 கூட்டப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளிகளுடனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியை பெருக்கினால் புதிய திட்டவிலக்கமும் அந்த மாறிலியின் மடங்காகும். ஒவ்வொரு தரவுப்புள்ளிகளுடனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியைக் கூட்டினால் திட்டவிலக்கம் மாறாது.

ஃபாரன்ஹீட்டில் உள்ள புதிய வெப்பநிலைகளின் திட்ட விலக்கம் $\sigma_F = \frac{9}{5}\times\sigma_C$ [$\because +32$ திட்டவிலக்கத்தை பாதிக்காது]

$$= \frac{9}{5}\times 5 = 9^\circ$$

$\therefore$ புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma_F^2 = 9^2 = 81$

$\therefore$ புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= 81^\circ F$

5. ஒரு பரவலில் $\sum(x-5) = 3$, $\sum(x-5)^2 = 43$, மற்றும் மொத்த தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 18 எனில், சராசரி, திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க

தீர்வு :

கணக்கின்படி $\sum(x-5) = 3$

$N = 18$

$\sum(x-5) = 3$

$\sum x - \sum 5 = 3$

$\sum x - 18\times 5 = 3$

$\sum x - 90 = 3$

$$\sum x = 3 + 90 = 93$$
$$\sum (x-5)^2 = 43$$
$$\sum (x^2 + 25 - 10x) = 43$$
$$\sum x^2 + \sum 25 - 10\sum x = 43$$
$$\sum x^2 + 25 \times 18 - 10 \times 93 = 43$$
$$\sum x^2 = 43 + 930 - 450 = 523$$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{523}{18} - \left(\frac{93}{18}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{523 \times 18 - 93 \times 93}{18 \times 18}}$$
$$= \frac{1}{18}\sqrt{9414 - 8649}$$
$$= \frac{27.66}{18} = 1.53$$

∴ திட்டவிலக்கம் = 1.53

சராசரி $= \frac{\sum x}{N}$

$\bar{x} = \frac{93}{18} = 5.166$

சராசரி = 5.17

6. இரண்டு நகரங்களின் பல்வேறு இடங்களில் விற்பனை செய்யும் நிலக்கடலை பொட்டலங்களின் விலைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எந்த நகரத்தில் விலைகளானது மிகவும் நிலையானதாக உள்ளது?

நகரம் A –ன் விலைகள்	20	22	19	23	16
நகரம் B –ன் விலைகள்	10	20	18	12	15

தீர்வு :

நகரம் A இன் விலைகள்

n = 5

x_i	20	22	19	23	16	$\sum x_i = 100$
x_i^2	400	484	361	529	256	$\sum x_i^2 = 2030$

சராசரி $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$\bar{x} = \frac{100}{5} = 20$

திட்டவிலக்கம் $\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{2030}{5} - \left(\frac{100}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{406 - 400} = \sqrt{6} = 2.45$$

மாறுபாட்டுக்கெழு $C.V_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$= \frac{2.45}{20} \times 100\% = \frac{245}{20}\%$$
$$= \frac{122.5}{10}\% = 12.25\%$$

நகரம் A இன் விலைகளின் மாறுபாட்டுக்கெழு

$C.V_1 = 12.25\%$

நகரம் B இன் விலைகள்

n = 5

x_i	10	20	18	12	15	$\sum x_i = 75$
x_i^2	100	400	324	144	225	$\sum x_i^2 = 1193$

$\bar{x} = \frac{75}{5} = 15$

$\sigma_B = \sqrt{\frac{1193}{5} - \left(\frac{75}{5}\right)^2}$

$$= \sqrt{238.6 - 15^2}$$
$$= \sqrt{238.6 - 225} = \sqrt{13.6}$$
$$= 3.69$$

நகரம் B இன் விலைகளின் மாறுபாட்டுக்கெழு

$C.V_2 = \frac{3.69}{15} \times 100\%$

$= \frac{369}{15}\% = 24.6\%$

நகரம் A இன் மாறுபாட்டுக்கெழு < நகரம் B இன் மாறுபாட்டுக்கெழு.

∴ நகரம் A இன் விலைகள் நிலையானது.

7. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக்கெழு முறையே 20 மற்றும் 0.2 எனில், விவரங்களின் மிகப்பெரிய மதிப்பு மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

வீச்சு = 20

$L - S = 20$ ... (1)

வீச்சுக் கெழு = 0.2

$\frac{L-S}{L+S} = 0.2$

$L - S = 0.2 (L + S)$

$$20 = 0.2(L + S)$$
$$\frac{20}{0.2} = L + S$$
$$L + S = \frac{200}{2}$$
$$L + S = 100 \quad \ldots (2)$$
$$L - S = 20$$
$$(1) + (2) \Rightarrow 2L = 120$$
$$L = \frac{120}{2} = 60$$

$L = 60$ என (2) இல் பிரதியிட,

$$L + S = 100$$
$$60 + S = 100$$
$$S = 100 - 60 = 40$$

$\therefore$ $L = 60$ மற்றும் $S = 40$.

8. இரண்டு முறையான பகடைகள் உருட்டப்படும் பொழுது, முக மதிப்புகளின் பெருக்கல் 6 ஆகவோ அல்லது முக மதிப்புகளின் வித்தியாசம் 5 ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு : இரு முறையான பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கூறுவெளி

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$n(S) = 36$

முகமதிப்புகளின் பெருக்கல் 6 கிடைக்கும் நிகழ்வு 'A' என்க.

$$A = \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}$$
$$n(A) = 4$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36}$$

முகமதிப்புகளின் வித்தியாசம் 5 ஆக இருக்கும் நிகழ்வு 'B' என்க.

$$B = \{(1,6), (6,1)\}$$
$$n(B) = 2$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$$
$$A \cap B = \{(1,6), (6,1)\}$$
$$n(A \cap B) = 2$$
$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} - \frac{2}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{9}$

9. இரண்டு குழந்தைகள் உள்ள ஒரு குடும்பத்தில், குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு :

குடும்பத்தில் இரு குழந்தைகள் உள்ளனர் எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

பெண் குழந்தையை 'g' எனவும், ஆண் குழந்தையை 'b' எனவும் கொள்க.

$$\text{கூறுவெளி, } S = \{(g,g), (g,b), (b,g), (b,b)\}$$
$$n(S) = 4$$

குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$$A = \{(g,g), (g,b), (b,g)\}$$
$$n(A) = 3$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ குறைந்தது ஒரு பெண் குழந்தையாவது இருக்கும் நிகழ்வின் நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

10. ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் சில கருப்பு பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து கருப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைப்போல் இரு மடங்கு எனில், கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு :

பையிலுள்ள கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

பையிலிருந்து கருப்பு பந்து எடுக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$$n(A) = x$$

பையிலுள்ள மொத்த பந்துகள் $= 5 + x$

$$n(S) = 5 + x$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{x}{5+x}$$

வெள்ளைப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்வு 'B' என்க

$$n(B) = 5$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{5+x}$$

கணக்கின்படி $\frac{x}{5+x} = 2\left(\frac{5}{5+x}\right)$

$$\frac{x(5+x)}{5+x} = 2 \times 5$$
$$x = 10$$

$\therefore$ கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 10$

11. ஒரு மாணவன் இறுதித் தேர்வில் ஆங்கிலம் மற்றும் தமிழில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5, ஒன்றிலும் தேர்ச்சி அடையாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.1. ஆங்கிலத் தேர்வில் தேர்ச்சி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.75 எனில், தமிழ் தேர்வில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

T என்பது தமிழ், E என்பது ஆங்கிலம் என்க.

$P(T \cap E) = 0.5$

P (ஒன்றிலும் தேர்ச்சி அடையாமல் இருக்கும் நிகழ்வு)

$= P(T' \cap E')$

$= P(T \cup E)' = 0.1$

$P(T \cup E) = 1 - P(T \cup E)'$

$= 1 - 0.1 = 0.9$

மேலும் $P(E) = 0.75$

$P(T \cup E) = P(T) + P(E) - P(T \cap E)$

$0.9 = P(T) + 0.75 - 0.5$

$P(T) = 0.9 - 0.75 + 0.5 = 0.65$

∴ தமிழ் தேர்வில் தேர்ச்சி பெற நிகழ்தகவு = 0.65

$P(T) = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$

12. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டில் ஸ்பேடு சீட்டுகளிலிருந்து இராசா, இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டுகள் நீக்கப்படுகின்றன. மீதமுள்ள சீட்டுகளிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அது (i) ஒரு டைமண்ட் (ii) ஒரு இராணி (iii) ஒரு ஸ்பேடு (iv) 5 என்ற எண் கொண்ட ஹார்ட் சீட்டு ஆகியனவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

சீட்டுகளின் வகைகள்	ஸ்பேட் ♠	ஹார்ட் ♥	கிளவர் ♣	டைமண்ட் ♦
ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகள்	A	A	A	A
	2	2	2	2
	3	3	3	3
	4	4	4	4
	5	5	5	5
	6	6	6	6
	7	7	7	7
	8	8	8	8
	9	9	9	9
ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகள்	10	10	10	10
		J	J	J
		Q	Q	Q
		K	K	K
ஒவ்வொரு வகையிலும் உள்ள சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை	13	13	13	13
சில சீட்டுகளை நீக்கிய பின் மீதமுள்ளவை	10	13	13	13

ஸ்பேட் சீட்டுகளிலிருந்து இராசா, இராணி மற்றும் மந்திரி சீட்டுகள் நீக்கிய பின் மீதமுள்ள சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை

$n(S) = 10 + 13 + 13 + 13$

$n(S) = 49$

(i) எடுக்கும் சீட்டு டைமண்ட் ஆக இருக்கும் நிகழ்வு 'A' என்க.

$n(A) = 13$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{13}{49}$

∴ டைமண்ட் சீட்டு பெறும் நிகழ்வின் நிகழ்தகவு $= \frac{13}{49}$

(ii) இராணி சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்வு 'B' என்க

$n(B) = 3$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{49}$

∴ இராணி கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{3}{49}$

(iii) எடுக்கும் சீட்டு ஸ்பேடாக இருக்கும் நிகழ்வு 'C' என்க.

$n(C) = 10$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{49}$

∴ ஸ்பேடு சீட்டு கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{10}{49}$

(iv) 5 எண் கொண்ட ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்வு 'D' என்க.

$n(D) = 1$

$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{49}$

∴ 5 எண் கொண்ட ஹார்ட் கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{49}$

சிந்தனை வினாக்கள்

I. ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்

பரவல் அளவைகள்

1. மதிப்புகள் பரவியுள்ளதைப் பற்றி அறிய உதவும் அளவையானது _____.
(1) வீச்சுக்கெழு (2) பரவல் அளவைகள்
(3) வீச்சு (4) திட்ட விலக்கம்
[விடை: (2)]

2. தரவுப்புள்ளிக்கும் அதன் கூட்டு சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை வர்க்கப்படுத்தி அந்த வர்க்கங்களுக்கு சராசரி காண்பது _____ ஆகும்.
(1) திட்ட விலக்கம்
(2) விலக்க வர்க்கச் சராசரி
(3) இடைநிலை (4) முகடு [விடை: (2)]

3. விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் மிகை வர்க்கமூலம்____.
(1) திட்ட விலக்கம்
(2) விலக்க வர்க்கச் சராசரி
(3) இடைநிலை (4) முகடு [விடை: (1)]

4. சராசரியிலிருந்து கிடைக்கப்பெற்ற தரவுப் புள்ளிகளுடைய விலக்கங்கள் கூடுதலானது ____.
(1) 0 (2) 1
(3) 2 (4) 5 [விடை: (1)]

5. முதல் 50 இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்_____.
(1) 45.43 (2) 14.43
(3) 20.43 (4) 16.43 [விடை: (2)]

தீர்வு :
முதல் n இயல் எண்களின்

$$\text{திட்டவிலக்கம்} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

முதல் **50** இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{50^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{2500-1}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{2499}{12}} = \sqrt{208.25}$$

$$= 14.43$$

6. தரவுப்புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் _____ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
(1) Ω (2) ω
(3) σ (4) Δ [விடை: (3)]

7. தொடர்ந்து 3 நாட்களில் ஆப்பிள் விற்ற விலைகள் ₹98, ₹97 மற்றும் ₹100 எனில், அவற்றின் திட்டவிலக்கம் (ஊகச் சராசரி முறையில்)
(1) 15 (2) 10
(3) 1 (4) 11
[விடை: (3)]

தீர்வு :

x_i	f_i	$d_i = x_i - A = x_i - 98$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
97	1	−1	1	−1	1
98	1	0	0	0	0
100	1	2	4	2	4
				$\sum f_i d_i = 1$	$\sum f_i d_i^2 = 5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.666 - 0.333} = \sqrt{1.333}$$

$$= 1.15 \simeq 1$$

8. மைய மதிப்பிலிருந்து தரவுப்புள்ளிகளின் விலகல் _____ எனப்படுகிறது.
(1) திட்ட விலக்க வர்க்கச் சராசரி
(2) விலக்க வர்க்கச் சராசரி
(3) வர்க்க மூலம்
(4) திட்டவிலக்கம் [விடை: (4)]

9. 80, 90, 90, 85, 60, 70, 75, 85, 90, 60, 80 என்ற தரவுப்புள்ளிகளின் வீச்சு _____.
(1) 30 (2) 70
(3) 90 (4) 40 [விடை: (1)]

தீர்வு :

$$\text{வீச்சு} = L - S = 90 - 60 = 30$$

10. 5, 6, 7, 8, 9, 54 என்ற தரவுப் புள்ளிகளின் வீச்சுக் கெழு _____ ஆகும்.
(1) $\frac{39}{49}$ (2) $\frac{49}{59}$
(3) $\frac{59}{69}$ (4) $\frac{69}{79}$ [விடை: (2)]

தீர்வு: வீச்சுக் கெழு $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{54-5}{54+5} = \frac{49}{59}$

11. விலக்க வர்க்கச் சராசரி 5 மற்றும் புள்ளிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 20 எனில், தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை _____.

(1) 15 (2) 25
(3) 4 (4) 35 [விடை: (3)]

தீர்வு :

$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 20$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= 5$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{20}{n}}$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = \frac{20}{n}$

$5 = \frac{20}{n}$

$n = \frac{20}{5} = 4$

மாறுபாட்டுக்கெழு

12. தரவுப்புள்ளிகளின் சராசரி 25, திட்டவிலக்கம் 5 எனில், மாறுபாட்டுக் கெழு _____.

(1) 100% (2) 25%
(3) 20% (4) எதுவுமில்லை [விடை: (3)]

தீர்வு : $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{5}{25} \times 100\% = 20\%$

13. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தரவுகளின் ஒத்த மாற்றங்களை ஒப்பிட திட்ட விலக்கத்திற்கு தொடர்புடைய அளவான _____ பயன்படுத்தப்படுகிறது.

(1) வீச்சு (2) திட்டவிலக்கம்
(3) மாறுபாட்டுக்கெழு (4) சராசரி [விடை: (3)]

14. தரவுகளின் சீரான அல்லது நிலைத் தன்மையை அறிய _____ பயன்படுகிறது.

(1) வீச்சு
(2) திட்டவிலக்கம்
(3) மாறுபாட்டுக்கெழு
(4) சராசரி விலக்கம் [விடை: (3)]

15. பிருந்தா, புவனா ஆகியோரின் மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டுக் கெழுக்கள் முறையே 25% மற்றும் 40% எனில், சீரான மதிப்பெண் பெற்றவர் யார்?

(1) பிருந்தா (2) புவனா
(3) இருவரும் (4) எவருமில்லை [விடை: (1)]

தீர்வு :
குறைந்த மாறுபாட்டுக் கெழு அதிக நிலைத்தன்மையைக் குறிக்கும். எனவே சீரான மதிப்பெண் பெற்றவர் பிருந்தா.

நிகழ்தகவு

16. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 என்ற எண்களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு எண்ணானது ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு_____.

(1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{5}{9}$
(3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{2}{3}$ [விடை: (2)]

தீர்வு : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$n(S) = 9$

ஒற்றை எண் தெரிவு செய்யும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$n(A) = 5$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$

17. ஒரு பகடை ஒருமுறை உருட்டப்படும் போது 3 இன் மடங்கு எண்கள் கிடைக்க நிகழ்தகவு_____.

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$
(3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{2}{3}$ [விடை: (2)]

தீர்வு :
பகடை 1 முறை உருட்டினால் $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$

3 இன் மடங்கு கிடைக்கப் பெறும் நிகழ்வு A என்க.

$E = \{3, 6\}$

$n(A) = 2$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

18. ஒரு பகடை ஒருமுறை உருட்டப்படும்போது 2 –க்கு அதிகமான முகமதிப்பு கிடைக்க நிகழ்தகவு_____.

(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$
(3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$ [விடை: (3)]

தீர்வு : ஒரு பகடை உருட்டப்படும்போது $n(S) = 6$
2 இக்கு அதிகமான எண் கிடைக்கும் நிகழ்வு E என்க.

$E = \{3, 4, 5, 6\}$

$n(E) = 4$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

19. 52 சீட்டுகள் கொண்ட சீட்டுக்கட்டிலிருந்து எடுக்கும் சீட்டு ஆஸ் ஆக இருக்க நிகழ்தகவு _____.

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{13}$

(3) $\frac{1}{52}$ (4) $\frac{12}{13}$ [விடை: (2)]

தீர்வு : $n(S) = 52$.

'ஆஸ்' களின் எண்ணிக்கை $n(A) = 4$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

20. உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

(1) 0 (2) 1

(3) $\frac{1}{2}$ (4) வரையறுக்கப்படாதது [விடை: (2)]

21. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

(1) 0 (2) 1

(3) $\frac{1}{2}$ (4) வரையறுக்கப்படாதது [விடை: (1)]

22. கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது ஒரு நிகழ்வின் நிகழ்தகவாக இருக்க இயலாது?

(1) 0.2 (2) 0.4

(3) 0.8 (4) 1.6 [விடை: (4)]

நிகழ்ச்சிகளின் செயல்பாடுகள்

23. P (E) = 0.05 எனில், P (E இல்லை) =

(1) – 0.05 (2) 0.5

(3) 0.9 (4) 0.95 [விடை: (4)]

தீர்வு : $P(E') = 1 - P(E) = 1 - 0.05 = 0.95$

24. கீழ்க்கண்ட கூற்றுகளுள் எது தவறானது?

(1) A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் சேர்ந்து நடைபெற்றால் அந்த நிகழ்ச்சியானது $A \cap B$ என்ற நிகழ்ச்சியாகும்.

(2) A அல்லது B-யில் ஏதாவது ஒன்று நடைபெற்றால் அந்த நிகழ்ச்சியானது $A \cup B$ என்ற நிகழ்ச்சியாகும்.

(3) $\bar{A}$ என்ற நிகழ்ச்சியானது, A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறாத பொழுது நடைபெறும் நிகழ்ச்சியாகும்.

(4) $\bar{B}$ என்ற நிகழ்ச்சியானது B நடைபெறும் பொழுது நடைபெறும். [விடை: (4)]

25. $A \cup \bar{A}$ = _____.

(1) 0 (2) 1

(3) ϕ (4) S [விடை: (4)]

26. $A \cap \bar{A}$ = _____.

(1) 0 (2) 1

(3) ϕ (4) S [விடை: (3)]

27. $P(\overline{A \cup B})$ = _____.

(1) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (2) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(3) $P(A \cup B)$ (4) $P(A \cap B)$ [விடை: (2)]

II. இரண்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. 13, 15, 21, 25, 18, 27, 43, 31 என்ற தரவுகளுக்கு வீச்சுக் கெழு காண்க.

தீர்வு :

மிகப் பெரிய மதிப்பு L = 43

மிகச் சிறிய மதிப்பு S = 13

$\text{வீச்சுக்கெழு} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{43-13}{43+13} = \frac{30}{56}$

$\text{வீச்சுக்கெழு} = \frac{15}{28} = 0.54$

2. 70.3, 43.2, 80.5, 93.4, 100, 13.7 என்ற தரவுகளுக்கு வீச்சு காண்க.

தீர்வு :

மிகப் பெரிய மதிப்பு L = 100

மிகச் சிறிய மதிப்பு S = 13.7

வீச்சு = L – S = 100 – 13.7

= 86.3

3. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு வீச்சு காண்க.

மதிப்பெண்	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
மாணவர் எண்ணிக்கை	20	13	27	17	40	8

தீர்வு : மிகப் பெரிய மதிப்பு L = 100

மிகச் சிறிய மதிப்பு S = 40

வீச்சு = L – S = 100 – 40

வீச்சு = 60

4. முதல் 50 இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு : முதல் n இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்

$= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

∴ முதல் 50 இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்

$= \sqrt{\frac{50^2-1}{12}}$

$$= \sqrt{\frac{2500-1}{12}} = \sqrt{\frac{2499}{12}}$$

$$= \sqrt{208.25} = 14.43$$

முதல் 50 இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம்

$$= 14.43$$

5. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கம் 20.5. அதில் உள்ள தரவுப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றுடனும் 12 ஐக் கூட்டுவதால் கிடைக்கும் புதிய தரவுப் புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

தரவுகளின் திட்டவிலக்கம் = 20.5

தரவுப்புள்ளிகளின் ஒவ்வொன்றுடனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியைக் கூட்டுவதால் திட்டவிலக்கம் மாறாது.

எனவே தரவுப்புள்ளிகளுடன் 12 ஐக் கூட்டுவதால் கிடைக்கும் புதிய தரவுப் புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் மாறாது.

∴ புதிய திட்டவிலக்கம் = 20.5

6. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கம் 60, சராசரி 120 எனில் மாறுபாட்டுக் கெழு காண்க.

தீர்வு :

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 60$

சராசரி $\bar{x} = 120$

மாறுபாட்டுக்கெழு

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$= \frac{60}{120} \times 100\% = \frac{6000}{120}$$

$$= 50\%$$

மாறுபாட்டுக்கெழு = 50%

7. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக்கெழு முறையே 9 மற்றும் 72. அதன் சராசரி காண்க.

தீர்வு :

மாறுபாட்டுக்கெழு C. V = 72

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 9$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$72 = \frac{9}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$\bar{x} = \frac{9}{72} \times 100 = \frac{100}{8}$$

∴ சராசரி $\bar{x} = 12.5$

8. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக்கெழு 30 மற்றும் 96 எனில் திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

சராசரி $\bar{x} = 30$

மாறுபாட்டுக்கெழு $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$$96 = \frac{\sigma}{30} \times 100\%$$

$$\sigma = \frac{96 \times 30}{100} = \frac{288}{10}$$

∴ திட்டவிலக்கம் $\sigma = 28.8$

9. நாளை மழை பெய்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.85 எனில் நாளை மழை பெய்யாமலிருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

P (மழை பெய்யும்) + P (மழை பெய்யாது) = 1

∴ P (மழை பெய்யாது) = 1 – P (மழை பெய்யும்)

$$= 1 - 0.85 = 0.15$$

நாளை மழை பெய்யாமலிருக்கும் நிகழ்தகவு = 0.15

10. ஒரு பகடை ஒருமுறை உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முகமதிப்பு இரட்டைப் படை பகா எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படும்போது கூறுவெளி

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(S) = 6$$

முகமதிப்பு இரட்டைப் படை பகா எண் கிடைக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$$A = \{2\}$$

$$n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

இரட்டைப் படை பகா எண் கிடைக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$

11. ஒரு பையில் 10 சிவப்பு மற்றும் 8 வெள்ளை நிற பந்துகள் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு பந்து வெள்ளைப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

பையிலுள்ள மொத்த பந்துகள் = 10 சிவப்பு + 8 வெள்ளை

$$n(S) = 18$$

வெள்ளை பந்து எடுக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$$n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

12. ஒரு பையில் 3 சிவப்பு, 5 கருப்பு மற்றும் 4 வெள்ளை நிற பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு பந்து சிவப்பு பந்தாக இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

மொத்த பந்துகள் = 3 சிவப்பு + 5 கருப்பு + 4 வெள்ளை

$n(S) = 12$

சிவப்பு பந்து எடுக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4}$

$P(\overline{A}) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore$ எடுக்கும் பந்து சிவப்பு இல்லாமலிருக்க நிகழ்தகவு $\frac{3}{4}$.

13. 1 முதல் 15 வரையிலான எண்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு எண் 4 இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

$S = \{1, 2, 3, ... , 15\}$

$n(S) = 15$

4 இன் மடங்கு தெரிவு செய்யும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{4, 8, 12\}$

$n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ 4 இன் மடங்கு தெரிவு செய்ய நிகழ்தகவு $\frac{1}{5}$.

14. ஒரு லாட்டரியில் 10 பரிசுகளும் 25 காலி பரிசுகளும் உள்ளன. வாங்கும் ஒரு லாட்டரிக்கு பரிசு கிடைக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

லாட்டரி முடிவுகள் = 10 பரிசுகள் + 25 காலி பரிசுகள்

$n(S) = 35$

பரிசு கிடைக்கும் நிகழ்தகவு A என்க.

$n(A) = 10$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

பரிசுபெற நிகழ்தகவு 2/7

15. ஒரு விளையாட்டில் வெற்றி பெற நிகழ்தகவு 0.3 வெற்றி பெறாமலிருக்க (தோற்க) நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

P(வெல்வது) + P(தோற்பது) = 1

0.3 + P(தோற்பது) = 1

P(தோற்பது) = 1 – 0.3 = 0.7

$\therefore$ விளையாட்டில் தோற்க நிகழ்தகவு 0.7

16. ஒரு பையிலுள்ள அட்டைகளில் 2 முதல் 90 வரையிலான எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் அதிலிருந்து எடுக்கும் ஒரு அட்டையில் முழுவர்க்க எண் கிடைக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

$S = \{2, 3, 4, 5, ..., 90\}$

$n(S) = 89$

முழுவர்க்கம் கிடைக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

$n(A) = 8$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{89}$

$\therefore$ முழுவர்க்கம் கிடைக்க நிகழ்தகவு $= \frac{8}{89}$

17. $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ எனில், $P(A' \cap B')$ காண்க.

தீர்வு : கணக்கின் படி $P(A) = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{4 + 6 - 3}{12} = \frac{7}{12}$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{12 - 7}{12} = \frac{5}{12}$

$\therefore P(A' \cap B') = \frac{5}{12} \; [\because P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})]$

18. P (A இல்லை அல்லது B இல்லை) = 0.25 என்று அமைந்தவாறு உள்ள இரு நிகழ்வுகள் A மற்றும் B எனில், அவை ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்வுகளா? எனக் காண்க.

தீர்வு :

$P(A \cap B)' = P(A' \cup B')$

$P(A' \cup B') = 0.25$

$P(A \cap B)' = 0.25$

$P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)'$

$P(A \cap B) = 1 - 0.25 = 0.75$

$P(A \cap B) \neq 0$

$\therefore$ A உம் B உம் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள் அல்ல.

19. $P(A) = \frac{3}{5}$; $P(B) = \frac{1}{5}$ மற்றும் A யும் B யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில் P (A அல்லது B) காண்க.

தீர்வு : A யும் B யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்வுகள்.

$\therefore P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

P ('A' அல்லது 'B') $= \frac{4}{5}$

20. சமவாய்ப்பு முறையில் நடத்தப்பட்ட ஒரு சோதனையில் A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்வுகள் ஆகும். P(A) = 0.3, P(B) = 0.2 மற்றும் $P(A \cap B) = 0.1$ எனில், $P(A \cap \overline{B})$ காண்க.

தீர்வு :

$P(A \cap \overline{B})$ = P (A மட்டும்)

$= P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.1$

$\therefore P(A \cap \overline{B}) = 0.2$

21. 50 தரவுப்புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் 12.6 ஒவ்வொரு தரவுப்புள்ளியையும் 6 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய தரவுப்புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

தீர்வு :

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 12.6$

ஒவ்வொரு தரவுப்புள்ளிகளையும் 6 ஆல் வகுப்பதால் கிடைக்கும் புதிய தரவுப்புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் காண பழைய திட்ட விலக்கத்தை 6 ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$\therefore$ புதிய திட்ட விலக்கம் $= \frac{12.6}{6} = 2.1$

புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= \sigma^2 = (2.1)^2 = 4.41$

புதிய திட்ட விலக்கம் = 2.1

புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 4.41

22. n=10, $\bar{x} = 1.8$, $\sum x^2 = 1500$ எனில், மாறுபாட்டுக்கெழு காண்க.

தீர்வு :

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{1500}{10} - (1.8)^2}$

$= \sqrt{150 - 3.24} = \sqrt{146.76}$

$\sigma = 12.11$

மாறுபாட்டுக்கெழு $= \frac{\sigma}{x} \times 100\%$

$= \frac{12.11}{1.8} \times 100\%$

C. V = 672.78%

23. 1 முதல் 50 வரை எண் இடப்பட்ட ஒரு கட்டிலிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு பகா எண் கொண்ட சீட்டாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

$S = \{1, 2, 3, ..., 50\}$

$n(S) = 50$

எடுக்கும் சீட்டு பகா எண் கொண்டதாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

$n(A) = 15$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

$\therefore$ எடுத்த சீட்டு பகா எண் உடையதாக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{3}{10}$

24. ஒரு பையில் 6 சிவப்பு பந்துகளும் 8 கருப்பு பந்துகளும் 4 வெள்ளை பந்துகளும் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு பந்து கருப்பாக இல்லாமலிருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

மொத்த பந்துகள் = 6 சிவப்பு + 8 கருப்பு + 4 வெள்ளை

$n(S) = 18$

எடுக்கும் பந்து கருப்பாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$n(A) = 8$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

P(கருப்பு இல்லை) = 1 – P(A)

$P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{9}$

$P(\overline{A}) = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$

$\therefore$ எடுக்கும் பந்து கருப்பு இல்லாமலிருக்க நிகழ்தகவு $\frac{5}{9}$.

25. 1 லிருந்து 35 வரையிலான எண்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு எண் 7 இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

$S = \{1, 2, 3, 4, ...35\}$

$n(S) = 35$

7 இன் மடங்கினை தெரிவு செய்யும் நிகழ்வு A என்க.

$A = \{7, 14, 21, 28, 35\}$

$n(A) = 5$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

$\therefore$ 7 ன் மடங்கினை தெரிவு செய்யும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{7}$.

26. ஒரு அட்டையில் 144 பந்துமுனை பேனாக்கள் உள்ளன. அவற்றுள் 20 பழுதடைந்தவை, மற்ற பேனாக்கள் நல்ல நிலையில் உள்ளவை. லீனா ஒரு பேனா வாங்குகிறாள். கடைக்காரர் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பேனாவை அவளுக்கு வழங்குகிறார். அவள் அதை வாங்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : மொத்த பேனாக்கள் = 144

$n(S) = 144$

நல்ல நிலையிலுள்ள பேனாக்கள் = 144 – பாதிப்புடைய பேனாக்கள்.

$= 144 - 20 = 124$

நல்ல நிலையிலுள்ள பேனா பெறும் நிகழ்வு A என்க.

$\therefore \quad n(A) = 124$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{124}{144} = \frac{31}{36}$$

அவளுக்கு நல்ல பேனா கிடைத்தால் அதை வாங்குவாள்.

$\therefore$ அவள் பேனா வாங்க நிகழ்தகவு = $\frac{31}{36}$

27. A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் P(A) = 0.35, P(B) = 0.45 எனில், $P(A' \cap B')$ என்ன?

தீர்வு :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= 0.35 + 0.45 = 0.80$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.80$$

$$\therefore P(A' \cap B') = 0.20$$

III. ஐந்து மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. இரு தரவுகளின் மாறுபாட்டுக்கெழுக்கள் முறையே 60 மற்றும் 70. அவற்றின் திட்டவிலக்கங்கள் முறையே 21 மற்றும் 16 எனில், அவற்றின் கூட்டுசராசரி காண்க.

தீர்வு :

முதல் தரவுகளுக்கு	இரண்டாம் தரவுகளுக்கு
$C.V_1 = 60$	$C.V_2 = 70$
$\sigma_1 = 21$	$\sigma_2 = 16$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

$$C.V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100\%$$

$$60 = \frac{21}{\bar{x}_1} \times 100$$

$$\bar{x}_1 = \frac{21}{60} \times 100 = 35$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100\%$$

$$70 = \frac{16}{\bar{x}_2} \times 100$$

$$\bar{x}_2 = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$$

$\bar{x}_1 = 35; \bar{x}_2 = 22.85$

2. இரு வாடிக்கையாளர்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட அங்காடியை ஒரு வாரத்தில் பார்வையிடுகின்றார். (திங்கள் முதல் சனி வரை) இருவரும் ஒரே நாளிலோ அல்லது வேறுவேறு நாட்களிலோ சென்று வரலாம். இருவரும் வெவ்வேறு நாட்களில் கடைக்கு செல்ல நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : ஒவ்வொருவரும் 6 நாட்களில் ஏதேனும் ஒரு நாளில் கடைக்குச் செல்லலாம்.

S = {(திங், திங்) (திங், செவ்) (திங், புதன்)
(திங், வியா) (திங், வெ) (திங், சனி)
(செவ், திங்) (செவ், செவ்) (செவ், புதன்)
(செவ், வியா) (செவ், வெள்) (செவ், சனி)
(புதன், திங்) (புதன், செவ்) (புதன், புதன்)
(புதன், வியா) (புதன், வெள்) (புதன், சனி)
(வியா, திங்) (வியா, செவ்) (வியா, புதன்)
(வியா, வியா) (வியா, வெள்) (வியா, சனி)
(வெள், திங்) (வெள், செவ்) (வெள், புதன்)
(வெள், வியா) (வெள், வெள்) (வெள், சனி)
(சனி, திங்)(சனி, செவ்) (சனி, புதன்) (சனி, வியா)
(சனி, வெள்)(சனி, சனி)}

$n(S) = 36$

இருவரும் ஒரே நாளில் அங்காடி செல்லும் நிகழ்வு A என்க.

A = {(திங், திங்) (செவ், செவ்) (புதன், புதன்)
(வியா, வியா) (வெள், வெள்) (சனி, சனி)}

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

∴ இருவரும் வெவ்வேறு நாளில் அங்காடி செல்லும் நிகழ்வின் நிகழ்தகவு $= \frac{5}{6}$

3. ஒரு பையில் 6 சிவப்பு பந்துகளும் சில நீல பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து ஒரு நீல பந்தினை எடுக்கும் நிகழ்வின் நிகழ்தகவானது ஒரு சிவப்பு பந்தினை எடுக்கும் நிகழ்தகவினைப் போல் இருமடங்கு எனில், பையில் இருந்த நீல நிற பந்துகள் எத்தனை?

தீர்வு : நீலப்பந்துகளின் எண்ணிக்கை = x என்க.

∴ மொத்த பந்துகள் n(S) = 6 + x

நீல பேனா எடுக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$$n(A) = x$$

$$P(A) = \frac{x}{6+x}$$

சிவப்பு பந்து எடுக்கும் நிகழ்வு B என்க.

$$n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{6}{6+x}$$

$$P(A) = 2\,[P(B)]$$

$$P(A) = 2 \times \frac{6}{6+x}$$

$$\frac{x}{6+x} = 2 \times \frac{6}{6+x}$$

$$\frac{x(6+x)}{6+x} = 2 \times 6$$

$$x = 12$$

∴ நீலப்பந்துகளின் எண்ணிக்கை = 12

4. 1, 2, 3 என்ற எண்களிலிருந்து x என்ற ஒரு எண் எடுக்கப்படுகிறது. பின் y என்ற இன்னுமோர் எண் சமவாய்ப்பு முறையில் 1,4, 9 என்ற எண்களிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில், இரு எண்களின் பெருக்கற்பலன் xy ஆனது 9 ஐ விட குறைவாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

முதல் எண்ணானது 1, 2, 3 என்ற எண்களிலிருந்தும் இரண்டாம் எண் 1, 4, 9 என்ற எண்களிலிருந்தும், பெறப்படுகிறது.

S = {(1, 1) (1, 4) (1, 9) (2, 1) (2, 4) (2, 9) (3, 1) (3, 4) (3, 9)}

$$n(S) = 9$$

அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 9 ஐ விட குறைவாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

A = {(1, 1) (1, 4) (2, 1) (2, 4) (3, 1)}

$$n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{9}$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{5}{9}$

5. A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்வுகளில் குறைந்தது ஒன்றேனும் நடக்க நிகழ்தகவு 0.6 Aயும் Bயும் ஒரே நேரத்தில் நிகழ்தகவு 0.3 எனில் $P(\overline{A}) + P(\overline{B})$ காண்க.

தீர்வு :

$$P(A \cup B) = 0.6$$

$$P(A \cap B) = 0.3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.6 = P(A) + P(B) - 0.3$$

$$P(A) + P(B) = 0.6 + 0.3 = 0.9$$

$$[1 - P(\overline{A})] + [1 - P(\overline{B})] = 0.9$$

$$1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) = 0.9$$

$$2 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B})] = 0.9$$

$$P(\overline{A}) + P(\overline{B}) = 2 - 0.9 = 1.1$$

6. A மற்றும் B என்ற நிகழ்வுகளில் $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ மற்றும் P (A மற்றும் B) $= \frac{1}{7}$ எனில்,

(i) P (A அல்லது B), (ii) P (A இல்லை மற்றும் B இல்லை) காண்க.

தீர்வு :

(i) P(A அல்லது B) $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

P(A அல்லது B) $= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{21 + 35 - 15}{105}$

P(A அல்லது B) $= \frac{41}{105}$

(ii) P (A இல்லை மற்றும் B இல்லை) $= P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \frac{41}{105} = \frac{105 - 41}{105}$

P (A இல்லை மற்றும் B இல்லை) $= \frac{64}{105}$

7. நேரடி முறையில் திட்டவிலக்கம் காண்க: 25, 27, 31, 32, 35.

தீர்வு :

x_i	x_i^2
25	625
27	729
31	961
32	1024
35	1225
$\Sigma x_i = 150$	$\Sigma x_i^2 = 4564$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4564}{5} - \left(\frac{150}{5}\right)^2} = \sqrt{912.8 - 900} = \sqrt{12.8}$

$\therefore \sigma = 3.578$

8. N = 10, Σx = 120, Σx^2 = 1530 எனில், விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

தீர்வு : $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{120}{10} = 12$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{N}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{1530}{10} - \left(\frac{120}{10}\right)^2}$

$\sigma = \sqrt{153 - 144} = \sqrt{9} = 3$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 = 3^2 = 9$

9. ஊகச் சராசரி முறையில் திட்டவிலக்கம் காண்க. 40, 44, 54, 60, 62, 64, 70, 80, 90, 96.

தீர்வு : A = 60 என்க.

x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 60$	d_i^2
40	– 20	400
44	– 16	256
54	– 6	36
60	0	0
62	2	4
64	4	16
70	10	100
80	20	400
90	30	900
96	36	1296
N = 10	$\Sigma d_i = 60$	$\Sigma d_i^2 = 3408$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d_i}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{3408}{10} - \left(\frac{60}{10}\right)^2}$

$= \sqrt{340.8 - 36} = \sqrt{304.8}$

$\therefore$ திட்டவிலக்கம் $\sigma = 17.46$

10. கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

x	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	1	4	17	45	26	5	2

தீர்வு :

A = 35 மற்றும் C = 10 என்க.

x_i	மைய மதிப்பு x_i	f_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 35$	$d_i = \frac{x_i - A}{C}$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
0-10	5	1	– 30	– 3	– 3	9
10-20	15	4	– 20	– 2	– 8	16
20-30	25	17	– 10	– 1	– 17	17
30-40	35	45	0	0	0	0
40-50	45	26	10	1	26	26
50-60	55	5	20	2	10	20
60 - 70	65	2	30	3	6	18
		$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i d_i = 14$	$\Sigma f_i d_i^2 = 106$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2} \times C$

$= \sqrt{\frac{106}{100} - \left(\frac{14}{100}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{1.06 - 0.0196} \times 10$

$= \sqrt{1.0404} \times 10$

$= 1.02 \times 10$

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 10.2$

11. வகுப்பு X இல் உள்ள மாணவர்களின் உயரம் மற்றும் எடையின் விவரங்கள் பின்வருமாறு:

	உயரம்	எடை
சராசரி	162.6 செ.மீ	52.36 கிகி
விலக்க வர்க்கச் சராசரி	127.69 செ.மீ^{2}	23.1361 கிகி^{2}

உயரங்களை விட எடைகள் அதிக மாறுபாடு உடையதா?

தீர்வு :

மாறுபாடுகளை அறிய மாறுபாட்டுக் கெழுவை நாம் காணவேண்டும். உயரங்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 127.69 செ.மீ^{2}

∴ உயரங்களின் திட்டவிலக்கம்

$= \sqrt{127.69}$ செ.மீ = 11.3 செ.மீ

எடைகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி = 23.1361 கி.கி^{2}

∴ எடைகளின் திட்டவிலக்கம்

$\sqrt{23.1361} = 4.81$ கி.கி

∴ மாறுபாட்டுக் கெழு C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

உயரங்களின் C. V $= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95\%$

எடைகளின் C. V $= \frac{4.89}{52.36} \times 100\% = 9.18\%$

எடைகளின் C. V > உயரங்களின் C. V

∴ உயரங்களை விட எடை அதிக மாறுபாடு உடையது ஆகும்.

12. 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 பாடங்களுக்கு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் எந்த பாட மதிப்பெண்கள் அதிக மாறுபாட்டையும் குறைந்த மாறுபாட்டையும் தருகின்றன?

பாடம்	கணிதம்	இயற்பியல்	வேதியியல்
சராசரி	42	32	40.9
திட்ட விலக்கம்	12	15	20

தீர்வு :

(i) கணிதம்:

சராசரி $\bar{x} = 42$; திட்டவிலக்கம் $\sigma = 12$

மாறுபாட்டுக்கெழு C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{12}{42} \times 100\% = \frac{1200}{42}\% = 28.57\%$

(ii) இயற்பியல்:

சராசரி $\bar{x} = 32$; திட்டவிலக்கம் = 15

C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{15}{32} \times 100\% = \frac{1500}{32}\% = 46.87\%$

(iii) வேதியியல்:

சராசரி $\bar{x} = 40.9$; திட்டவிலக்கம் = 20

C. V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{20}{40.9} \times 100\% = \frac{2000}{40.9} = 48.89\%$

மாறுபாட்டுக்கெழு அதிகமானால் மதிப்பெண்களின் மாறுபாடு அதிகமாகும்.

∴ இங்கு வேதியியலின் C. V அதிகம், கணிதத்தின் C. V குறைவு.

∴ வேதியியல் அதிக மாறுபாட்டையும் கணிதம் குறைந்த மாறுபாட்டையும் காட்டுகிறது.

13. A மற்றும் B என்ற பங்குகளின் விலைகளிலிருந்து அதிக சீரான பங்கு எது எனக் காண்க.

A	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
B	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

$\sigma_A = 5.92$ மற்றும் $\sigma_B = 2$. மேலும் சராசரி (A) = 51 மற்றும் சராசரி (B) = 105.

தீர்வு :

மாறுபாட்டுக்கெழு C .V $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$C.V_A = \frac{5.92}{51} \times 100\% = \frac{592}{51}$

$C.V_A = 11.60$

$C.V_B = \frac{2}{105} \times 100 = \frac{200}{105}$

$C.V_B = 1.90$

குறைந்த மாறுபாட்டுக் கெழு கொண்ட பங்கு அதிக சீரான விலை உடையது.

∴ B பங்கின் C.V < A பங்கின் C. V

∴ பங்கு B இன் விலை சீரானது.

14. ஒரு புட்டியில் 24 கோலிக் குண்டுகள் உள்ளன, அவற்றுள் சில பச்சை மற்றும் மீதமுள்ளவை நீலம். அவற்றிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு கோலிகுண்டானது பச்சையாக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ எனில் நீல நிறக் குண்டுகளின் எண்ணிக்கை காண்க.

தீர்வு : பச்சை கோலிக் குண்டுகளின் எண்ணிக்கை x மற்றும் நீல கோலிக் குண்டுகளின் எண்ணிக்கை y என்க.

மொத்தம் $n(S) = x + y = 24$ ... (1)
பச்சை குண்டு எடுக்கும் நிகழ்வு A என்க.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{x}{24}$$

ஆனால் $P(A) = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{x}{24} = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2 \times 24}{3} = 16$

$x = 16$ என (1) இல் பிரதியிட

$x + y = 24$

$16 + y = 24$

$y = 24 - 16 = 8$

$\therefore$ பச்சை கோலிகள் = 16
நீல நிற கோலிகள் = 8

15. இரு சீரான பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. அதில் A என்பது முதல் பகடையில் இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்வையும், B என்பது முதல் பகடையில் ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்வையும், C என்பது இரு பகடைகள் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் ≤ 5 கிடைக்கும் நிகழ்வையும் குறிக்குமெனில், A மற்றும் C ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளா எனக் காண்க.

தீர்வு : இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி

S = {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 1)
(2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) (3, 1) (3, 2)
(3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 1) (4, 2) (4, 3)
(4, 4) (4, 5) (4, 6) (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4)
(5, 5) (5, 6) (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5)
(6, 6)}

$n(S) = 36$

முதல் பகடையில் இரட்டைப் படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

A = {(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)}

$n(A) = 18$

C என்பது முகமதிப்புகளில் கூடுதல் ≤ 5 கிடைக்கும் நிகழ்வு என்க.

C = {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 1) (2, 2) (3, 1) (3, 2) (4, 1)}

$n(C) = 10$

$A \cap C = \{(2, 1) (2, 2) (2, 3) (4, 1)\}$

$n(A \cap C) = 4$

$n(A \cap C) \neq 0,$

$\therefore$ A மற்றும் C ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

16. முதல் 50 இயல் எண்களிலிருந்து எடுக்கும் ஒரு எண்ணானது 5 இன் மடங்காக அல்லது 11 இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

கூறுவெளி = {1, 2, 3, 4, 5, ... 50}

$n(S) = 50$

கிடைக்கும் எண் 5 இன் மடங்காக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}

$n(A) = 10$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{50}$

கிடைக்கும் எண் 11 ன் மடங்காக இருக்கும் நிகழ்வு B என்க.

B = {11, 22, 33, 44}

$n(B) = 4$

$P(B) = \frac{4}{50}$

$A \cap B = \{\}$

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{10}{50} + \frac{4}{50} - 0$

$P(A \cup B) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$

கிடைக்கும் எண் 5 இன் மடங்கு அல்லது 11 இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{7}{25}$

17. முதல் 25 இயல் எண்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு எண்ணானது 4 ஆல் வகுபட அல்லது 7 ஆல் வகுபட நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு : கூறுவெளி S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}

$n(S) = 25$

எடுக்கப்படும் எண் 4 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க.

A = {4, 8, 12, 16, 20, 24}

$n(A) = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{25}$

எடுக்கும் எண் 7 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி B என்க.

B = {7, 14, 21}

$n(B) = 3$

$P(B) = \frac{3}{25}$

$A \cap B = 0$

$n(A \cap B) = 0$

$P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{25} + \frac{3}{25}$$

$$P(A \cup B) = \frac{9}{25}$$

∴ எடுக்கும் எண் 4 அல்லது 7 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{9}{25}$

18. முதல் 30 இயல் எண்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு எண்ணானது 2 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்க அல்லது பகா எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

கூறுவெளி S = {1, 2, 3, ..., 30}

$n(S) = 30$

எடுக்கப்படும் எண் 2 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க.

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}

$n(A) = 15$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{30}$$

எடுக்கும் எண் பகா எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்வு B என்க.

B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}

$n(B) = 10$

$$P(B) = \frac{10}{30}$$

$A \cap B = \{2\}$

$n(A \cap B) = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{30}$$

∴ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{1}{30}$$

$$P(A \cup B) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு = $\frac{4}{5}$

19. A, B மற்றும் C என்பவர்கள் வெவ்வேறு வயதுடைய மூன்று நபர்கள் A மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.80. 'B' மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.60 மற்றும் C மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.50. A மற்றும் B இருவரும் மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.46. B மற்றும் C மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.32. A மற்றும் C மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.48. இவர்கள் மூவரும் மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு 0.26 எனில் மூவரில் குறைந்தபட்சம் ஒருவராவது மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழதகவு என்ன?

தீர்வு :

கணக்கின் படி,

$P(A) = 0.80$

$P(B) = 0.60$

$P(C) = 0.50$

$P(A \cap B) = 0.46$

$P(B \cap C) = 0.32$

$P(A \cap C) = 0.48$

$P(A \cap B \cap C) = 0.26$

குறைந்தது ஒருவராவது மேலும் 5 ஆண்டுகள் வாழ நிகழ்தகவு $P(A \cup B \cup C)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.80 + 0.60 + 0.50 - 0.46 - 0.32 - 0.48 + 0.26$$

∴ $P(A \cup B \cup C) = 0.90$

20. ஒரு மாணவன் தனது தேர்வில் வெற்றி பெற நிகழ்தகவு 0.73 அவர் சில பாடங்களில் வெற்றியை தவறவிட நிகழ்தகவு 0.13 எனில் அவர் வெற்றி பெற அல்லது சில பாடங்களில் வெற்றியை தவறவிட நிகழ்தகவு 0.96 என்பது சரியா?

தீர்வு :

A என்பது வெற்றி பெற; B என்பது சில பாடங்களில் வெற்றி பெறாமலிருக்கும் நிகழ்வு என்க.

$P(A \cup B) = 0.96$

$P(A) = 0.73$

$P(B) = 0.13$

$P(A \cup B) = 0.96$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.96 = 0.73 + 0.13 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0.73 + 0.13 - 0.96$

$= 0.86 - 0.96 = -0.10$

$P(A \cap B) = -0.10$

நிகழ்தகவு எப்போதும் குறை எண்ணாக இருக்காது.

∴ அந்த மாணவன் எல்லா பாடங்களிலும் வெற்றி பெற அல்லது சில பாடங்களில் வெற்றி பெற நிகழ்தகவு 0.96 என்பது தவறு.

IV. எட்டு மதிப்பெண் வினாக்கள்

1. 50 மாணவர்கள் அடங்கிய ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 60 மற்றும் 15 ஆகும். பின்னர் 40 மற்றும் 70 என்ற தரவுப்புள்ளிகள் 30 மற்றும் 60 என தவறுதலாகப் பதியப் பெற்றது தெரிய வந்தது எனில், சரியான சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க.

தீர்வு :

சராசரி $\bar{x}$ = 60

திட்டவிலக்கம் σ = 15

தவறான தரவுப்புள்ளிகள் = 30 மற்றும் 60

சரியான புள்ளிகள் = 40 மற்றும் 70

$$\text{பழைய சராசரி} = \frac{\Sigma x_i}{n} = 60$$

$$\frac{\Sigma x_i}{50} = 60$$

பழைய $\Sigma x_i = 60 \times 50 = 3000$

சரியான Σx_i = 3000 – (தவறான பதிவுகள்) + (சரியான பதிவுகள்)

= 3000 – [(30 + 60)] + [(40 + 70)]

= 3000 – [90] + [110]

= 2910 + 110 = 3020

$$\text{சரியான சராசரி} = \frac{\text{சரியான } \Sigma x_i}{n} = \frac{3020}{50} = 60.4$$

பழைய திட்டவிலக்கம் σ = 15

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2}$$

$$15 = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - 60^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$225 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - 3600$$

$$225 + 3600 = \frac{\Sigma x_i^2}{50}$$

$$\frac{\text{பழைய } \Sigma x_i^2}{50} = 3825$$

பழைய $\Sigma x_i^2 = 3825 \times 50 = 191250$

சரியான Σx_i^2 = 191250 – (தவறான பதிவுகள்)^2 + (சரியான பதிவுகள்)^2

= $191250 - 30^2 - 60^2 + 40^2 + 70^2$

= 191250 – –900 – 3600 + 1600 + 4900

= 191250 – 4500 + 6500

= 193250

சரியான $\sigma = \sqrt{\frac{193250}{50} - (60.4)^2}$

$= \sqrt{3865 - 3648.16} = \sqrt{216.84}$

சரியான σ = 14.7

2. திட்டவிலக்கம் காண்க.

x	10	12	14	16	18	20	22
f	3	5	9	16	8	7	2

தீர்வு :

A = 14 என்க.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 14$	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
10	3	30	– 4	– 12	16	48
12	5	60	– 2	– 10	4	20
14	9	126	0	0	0	0
16	16	256	2	32	4	64
18	8	144	4	32	16	128
20	7	140	6	42	36	252
22	2	44	8	16	64	128
	Σf_i =50	$\Sigma x_i f_i$ = 800		$\Sigma f_i d_i$ = 100	Σd_i^2 =140	$\Sigma f_i d_i^2$ = 640

$$\text{திட்டவிலக்கம் } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{640}{50} - \left(\frac{100}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{5} - 4}$$

$$= \sqrt{\frac{64 - 20}{5}} = \sqrt{\frac{44}{5}} = \sqrt{8.8}$$

$\therefore$ திட்டவிலக்கம் = 2.97

3. ஒரு புட்டியில் உள்ள 54 கோலிக்குண்டுகளில் பச்சை, நீலம் மற்றும் வெள்ளை கோலிகள் அடங்கும். சமவாய்ப்பு முறையில் அதிலிருந்து எடுக்கும் ஒரு கோலிக் குண்டானது நீல நிறம் உடையதாக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ மற்றும் பச்சையாக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{4}{9}$ எனில், புட்டியிலுள்ள வெள்ளை நிற கோலிக்குண்டுகள் எத்தனை?

தீர்வு :

புட்டியில் இருக்கும் நீல நிற கோலிக்குண்டுகள் b, பச்சை கோலிகள் g மற்றும் வெள்ளை கோலிகள் w என்க.

$$b + g + w = 54 \quad \ldots (1)$$
$$n(S) = 54$$

A என்பது நீல நிற கோலி எடுக்கும் நிகழ்வு என்க.

$$n(A) = b$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{b}{54}$$
$$P(A) = \frac{1}{3}$$
$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{b}{54}$$
$$b = \frac{54}{3} = 18$$

B என்பது பச்சை கோலி எடுக்கும் நிகழ்வு என்க.

$$n(B) = g$$
$$P(B) = \frac{g}{54}$$

ஆனால் $P(B) = \frac{4}{9}$

$$\therefore \frac{g}{54} = \frac{4}{9}$$
$$g = \frac{4 \times 54}{9} = 24$$

$b = 18, g = 24$ என (1) இல் பிரதியிட,

$$b + g + w = 54$$
$$18 + 24 + w = 54$$
$$42 + w = 54$$
$$w = 54 - 42 = 12$$

∴ புட்டியில் 12 வெள்ளை கோலிகள் இருக்கும்.

4. இரு பகடைகள் சீராக உருட்டப்படும் போது

(i) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் இரட்டை எண்ணாக இருக்க,

(ii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் குறைந்தது 10 ஆக இருக்க,

(iii) முகமதிப்புகளின் கூடுதல் 3 இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது,

கூறுவெளி = {(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 1)
(2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) (3, 1) (3, 2)
(3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 1) (4, 2) (4, 3)
(4, 4) (4, 5) (4, 6) (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4)
(5, 5) (5, 6) (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5)
(6, 6)}

$$n(S) = 36$$

(i) முகமதிப்புகளின் கூடுதல் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்வு A என்க

A = {(1, 1) (1, 3) (3, 1) (2, 2) (1, 5) (5, 1)
(2, 4) (4, 2) (3, 3) (2, 6) (6, 2) (4, 4)
(5, 3) (3, 5) (5, 5) (6, 4) (4, 6) (6, 6)}

$$n(A) = 18$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

(ii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் குறைந்தது 10 ஆக இருக்கும் நிகழ்வு B என்க.

B = {(6, 4) (4, 6) (5, 5) (6, 5) (5, 6) (6, 6)}

$$n(B) = 6$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

∴ தேவையான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$.

(iii) C என்பது முகமதிப்புகளின் கூடுதல் 3 ன் மடங்காக இருக்கும் நிகழ்வு என்க.

C = { (1, 2) (2, 1) (1, 5) (5, 1) (2, 4) (4, 2)
(3, 3) (3, 6) (6, 3) (5, 4) (4, 5) (6, 6)}

$$n(C) = 12$$
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

∴ முக மதிப்பின் கூடுதல் 3ன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3}$

10ம் வகுப்பு கணக்கு

அரசு மாதிரி வினாத்தாள்

நேரம்: 15 நிமிடம் + 3.00 மணி | மொத்த மதிப்பெண்கள்: 100

அறிவுரை : i) அனைத்து வினாக்களும் சரியாக அச்சுப் பதிவாகி உள்ளதா என்பதை சரிபார்த்துக் கொள்ளவும். அச்சுப் பதிவில் குறையிருப்பின் அறை கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாக தெரிவிக்கவும்.

ii) நீலம் (அல்லது) கருப்பு மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும் அடிக்கோடிடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

குறிப்பு : இவ்வினாத்தாள் நான்கு பகுதிகளைக் கொண்டது.

பகுதி – I

(மதிப்பெண்கள்: 14)

குறிப்பு : 1) இப்பிரிவில் உள்ள 14 வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும். $14 \times 1 = 14$

2) கொடுக்கப்பட்டுள்ள நான்கு மாற்று விடைகளில் மிகவும் பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுத்து குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதவும்.

1. $n(A \times B) = 6$ மற்றும் $A = \{1, 3\}$ எனில், $n(B)$ ஆனது
   1) 1 2) 2 3) 3 4) 6

2. $F_1 = 1, F_2 = 3$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ என கொடுக்கப்படின் F_5 ஆனது
   1) 3 2) 5 3) 8 4) 11

3. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4. இந்த கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் எத்தனை உறுப்புகளின் கூடுதல் 120 ஆக இருக்கும்?
   1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

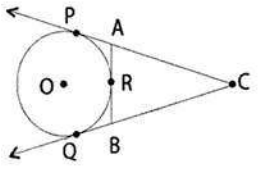
4. $f = \{(2,a), (3,6), (4,b), (5,c)\}$ ஒரு _____
   1) சமனிச் சார்பு 2) ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு
   3) பலவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கான சார்பு 4) மாறிலி சார்பு

5. $x^2 + 4x + 4$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை x அச்சோடு வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை
   1) 0 2) 1
   3) 0 (அல்லது) 1 4) 2

6. எந்தவோர் அலகு அணியிலும் மூலைவிட்டத்திலில்லாத உறுப்புகள்
   1) 0 2) 1 3) m 4) n

7. A என்ற அணியின் வரிசை 2×3, B என்ற அணியின் வரிசை 3×4 எனில், AB என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை யாது?
   1) 3 2) 4 3) 2 4) 5

8. படத்தில் O வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் CP மற்றும் CQ ஆகும். ARB ஆனது வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி R வழியாக செல்லும் மற்றொரு தொடுகோடு ஆகும். CP = 11 செமீ மற்றும் BC = 7 செமீ எனில் BR-ன் நீளம்,
   1) 6 செ.மீ 2) 5 செ.மீ
   3) 8 செமீ 4) 4 செ.மீ



9. (12, 3), (4, a) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{8}$ எனில், 'a' ன் மதிப்பு,
   1) 1 2) 4 3) –5 4) 2

10. $x = a\tan\theta$ மற்றும் $y = b\sec\theta$ எனில்

1) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

11. "PROBABILITY" என்ற சொல்லின் எழுத்துகளிலிருந்து ஒரு எழுத்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது உயிரெழுத்து இல்லாமலிருக்க நிகழ்தகவு

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{3}{5}$

12. ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் சாயுயரம் 13 செ.மீ உடைய நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரம்
1) 12 செ.மீ 2) 10 செ.மீ 3) 13 செ.மீ 4) 5 செ.மீ

13. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு முறையே 4 மற்றும் 87.5% எனில் திட்டவிலக்கமானது
1) 3.5 2) 3 3) 4.5 4) 2.5

14. முதல் 20 இயல் எண்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது
1) 32.25 2) 44.25 3) 33.25 4) 30

பகுதி - II

(மதிப்பெண்கள் : 20)

II. 10 வினாக்களுக்கு மட்டும் விடையளிக்கவும். $10 \times 2 = 20$
வினா எண் 28 க்கு கட்டாயமாக விடையளிக்க வேண்டும்.

15. சார்பு வரையறுக்க.

16. $10^4 \equiv x$ (மட்டு 19) என்றவாறு அமையும் x இன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

17. எளிய வடிவில் சுருக்குக. $\frac{4x^2y}{2z^2} \times \frac{6xz^3}{20y^4}$

18. ஒரு வேலையை 4 மணி நேரத்தில் பாரி செய்கிறார். யுவன் அதே வேலையை 6 மணி நேரத்தில் செய்கிறார் எனில் இருவரும் சேர்ந்து அந்த வேலையை செய்து முடிக்க எத்தனை மணி நேரமாகும்?

19. பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து x, y, z மதிப்புகளைக் காண்க. $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ x & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

20. சுவரின் அடியிலிருந்து 4 அடி தொலைவில் உள்ள ஏணியானது சுவரின் உச்சியை 7 அடி உயரத்தில் தொடுமெனில் தேவையான ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க.

21. நிறுவுக: $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

22. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 25% அதிகரிக்கும் போது, அதிகமாகும் புறப்பரப்பின் சதவீதம் காண்க.

23. ஒரு தரவின் திட்டவிலக்கம் மற்றும் சராசரி ஆகியன முறையே 6.5 மற்றும் 12.5 எனில் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

24. $f(x) = 3 + x, g(x) = x - 4$, எனில் $f \circ g = g \circ f$ என்பது சரியா?

25. ஒரு நிறுவனம் 25 தெருக்களில் செடிகளை நட திட்டமிட்டது. முதல் தெருவில் 1 செடியும், இரண்டாவது தெருவில் 3 செடிகளும், மூன்றாவது தெருவில் 9 செடிகளும் நட முடிவு செய்யப்பட்டது. இவ்வேலை நிறைவடைய எத்தனை செடிகள் தேவை?

26. –11, –15, –19, ... என்ற கூட்டுத்தொடரின் 19வது உறுப்பைக் காண்க.

27. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் $\angle BAC$ ஐக் காண்க.

28. A(–1,3), B(1,–1) மற்றும் C(5,1) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் எனில் முனை C வழியே செல்லும் நடுக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

பகுதி – III

(மதிப்பெண்கள் : 50)

III. பத்து வினாக்களுக்கு விடையளிக்க.
வினா எண் 42க்கு கட்டாயமாக விடையளிக்கவும். **$10 \times 5 = 50$**

29. $f : N \to N$ என்ற சார்பானது $f(x) = 3x + 2, x \in N$ என வரையறுக்கப்பட்டால்
i) 1, 2, 3-ன் நிழல் உருக்களைக் காண்க.
ii) 29 மற்றும் 53 ன் முன் உருக்களைக் காண்க.
iii) சார்பின் வகையைக் காண்க.

30. f: A→B என்ற சார்பானது $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு A= {2,4,6,10,12} B = { 0,1,2,4,5,9} ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f ஐப் பின்வரும் முறைகளில் குறிக்க.
i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் ii) அட்டவணை
iii) அம்புக்குறி படம் iv) வரைபடம்

31. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6வது மற்றும் 8வது உறுப்புகளின் விகிதம் 7 : 9 எனில் 9வது மற்றும் 13வது உறுப்புகளின் விகிதம் காண்க.

32. S_1, S_2, S_3 என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் முதல் n, 2n, 3n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். $S_3 = 3 (S_2 - S_1)$ என நிறுவுக.

33. $\frac{1}{x^4} - \frac{6}{x^3} + \frac{13}{x^2} + \frac{m}{x} + n$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவை முழு வர்க்கம் எனில் m மற்றும் n-ன் மதிப்பு காண்க.

34. $2x^2 - x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் $\alpha^2 \beta, \beta^2 \alpha$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

35. செங்கோண முக்கோணம் ABCல் $\angle C = 90°$, CA மற்றும் CBஇன் மையப்புள்ளிகள் P மற்றும் Q எனில், $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ என நிறுவுக.

36. (1, –4) என்ற புள்ளி வழிச்செல்வதும், வெட்டுத் துண்டுகளின் விகிதம் 2:5 உள்ளதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

37. 60 மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்தாக உள்ள ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 38° மற்றும் 60° எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. ($\tan 38^0 = 0.7813$, $\sqrt{3} = 1.732$)

38. ஓர் உள்ளீடற்ற பித்தளை கோளத்தின் உள்விட்டம் 14 செ.மீ, தடிமன் 1 மி.மீ மற்றும் பித்தளையின் அடர்த்தி 17.3 கிராம்/க.செமீ எனில், கோளத்தின் எடையைக் கணக்கிடுக.

39. 24, 26, 33, 37, 29, 31 ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

40. நீல நிறம் மற்றும் சாம்பல் நிறம் கொண்ட இரு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றன. இதன் அனைத்து விளைவுகளையும் எழுதுக. பகடைகளின் மீது விழும் எண்களின் கூடுதல் கீழ்வருமாறு கிடைக்க நிகழ்தகவு என்ன?
i) 8 ii) 13 iii) 12 -க்குச் சமமாகவும் அதை விட குறைவாகவும்

41. வர்க்கங்களின் கூடுதல் 365 வரக்கூடிய அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் இரண்டினைக் காண்க.

42. 32 செ.மீ உயரமும் 18 செ.மீ அடிப்பக்க ஆரமும் உடைய ஓர் உருளை வடிவ வாளியில் முழுமையாக மணல் உள்ளது. இந்த மணல் தரையில் கொட்டப்பட்டு கூம்பு வடிவில் அமைக்கப்படுகிறது. அந்தக் கூம்பின் உயரம் 24 செ.மீ எனில் அதன் ஆரத்தையும், சாயுயரத்தையும் காண்க.

பகுதி – IV

(மதிப்பெண்கள் : 16)

IV. இரு வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும். **$2 \times 8 = 16$**

43. அ) 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் PQ ஆனது 8 செ.மீ நீளமுள்ள நாண் ஆகும். P மற்றும் Q வின் வழியே செல்லும் தொடுகோடுகள் T என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது எனில், TP என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

(அல்லது)

ஆ) அடிப்பக்கம் BC = 8 செ.மீ, $\angle A = 60°$ மற்றும் $\angle A$ யின் இருசமவெட்டியானது BC ஐ D என்ற புள்ளியில் BD = 6 செ.மீ என்றவாறு சந்திக்கிறது எனில், முக்கோணம் ABC வரைக.

44. அ) $y = x^2 + 3x - 4$ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 3x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

(அல்லது)

ஆ) நிலையான தண்ணீரில் 18 கி.மீ/மணி வேகத்தில் செல்லும் ஓர் இயந்திரப் படகானது 24 கி.மீ தூரத்தை தண்ணீரின் திசையில் கடக்கும் நேரத்தைவிட தண்ணீரின் எதிர் திசையில் கடக்க கூடுதலாக 1 மணி நேரம் தேவைப்படுகிறது. தண்ணீரின் வேகம் காண்க.

* * * * *

You can buy our books
through our website



MOBILE APP

FOR **SCHOOL STUDENTS**

Download the App
over your mobile to get
new experience & education

GET IT ON Google Play

Download on the App Store

Published by:

Don Publications (P) Ltd.

3/100/1, Uthamapandiankulam, Tuticorin Main Road, **TIRUNELVELI** - 627 351.
☎ : (0462) 2520977, 2520978, Cell: 73730 88821, 94433 39941. E-Mail: feedback@donpltd.com

New No. 17, Old No 21-A, 2nd Floor, 11th Avenue, Ashok Nagar, **CHENNAI** - 600 083.
☎ : (044) 24892474, 48565226 Cell: 73730 88893., E-Mail: feedback@donpltd.com

Visit us at : 94890 51855 www.donbooks.co.in